

О представлениях бесконечной группы диэдра

С. Д. БЕРМАН (Харьков)—К. БУЗАШИ (Дебрецен)

Хорошо известно, что теория представлений бесконечной циклической группы $H=(a)$ над произвольным полем K эквивалентна теории модулей над кольцом $K[x]$. Это позволяет дать полное описание всех конечно-порождённых KH -модулей.

В связи с этим возникает естественная задача изучения K -представлений неабелевых групп F , являющихся расширениями бесконечной циклической группы H с помощью конечной группы. Простейшей из таких групп является бесконечная группа диэдра G , причём задача описания K -представлений любой группы F указанного типа, как легко видеть, почти всегда содержит такую же задачу для группы G .

В настоящей статье мы дадим полное описание всех конечно-порождённых KG -модулей, где K -поле, характеристика которого отлична от 2. Это описание основано на том, что всякий конечно-порождённый KG -модуль разлагается в прямую сумму циклических подмодулей, несмотря на то, что групповая алгебра KG не является кольцом (односторонних) главных идеалов.

§ 1.

Пусть G — полупрямое произведение бесконечной циклической группы $H=(a)$ и циклической группы (b) порядка 2:

$$G = (a) \cdot (b), \quad b^{-1}ab = a^{-1}, \quad b^2 = 1.$$

Пусть K — произвольное поле, характеристика которого отлична от числа 2, а KG — групповая алгебра группы G над полем K . Элементы поля K будут неизменно обозначаться малыми греческими буквами, а под KG -модулями понимаются левые унитарные KG -модули.

В этом параграфе даётся полное описание всех конечнопорождённых KG -модулей без KH -кручения.

Сделаем сначала ряд предварительных замечаний, и докажем вспомогательные утверждения.

Хорошо известно, что алгебра KH является целостным кольцом главных идеалов, а обратимые элементы этой алгебры имеют вид λa^i , где $\lambda \in K$, $a^i \in H$. Отображение $\varphi: \sum \lambda_i a^i \rightarrow \sum \lambda_i a^{-i}$ является автоморфизмом над K алгебры KH . Для элемента $p \in KH$ положим $\bar{p} = \varphi(p)$. Ясно, что $\overline{\bar{p}} = p$. Как обычно, наибольший общий делитель элементов $p_1, p_2 \in KH$ будет обозначаться через (p_1, p_2) . Элемент $p \in KH$ будем называть симметричным, если имеет место

равенство главных идеалов: $(p) = (\bar{p})$. Очевидно, элемент $p \in KH$ симметричен тогда и только тогда, когда $\bar{p} = \lambda a^t p$.

Лемма 1. Пусть $p_1, \dots, p_s$ — ненулевые симметричные элементы алгебры KH , $p = (p_1, \dots, p_s)$, $p_i = p \cdot p'_i$ ($i = 1, \dots, s$). Тогда элементы $p, p'_1, \dots, p'_s$ также симметричны.

Доказательство. Имеем

$$p = q_1 p_1 + \dots + q_s p_s, \quad p_i = p p'_i \quad (q_i \in KH)$$

$$\bar{p} = \bar{q}_1 \bar{p}_1 + \dots + \bar{q}_s \bar{p}_s, \quad \bar{p}_i = \bar{p} \cdot \bar{p}'_i \quad (i = 1, \dots, s).$$

Так как элементы p_i — симметричны, то $\bar{p}_i = t_i p_i$, где t_i — обратимый элемент в KH ($i = 1, \dots, s$). Следовательно,

$$\bar{p} = \bar{q}_1 t_1 p_1 + \dots + \bar{q}_s t_s p_s, \quad p_i = t_i^{-1} \bar{p} \bar{p}_i,$$

и, значит

$$\bar{p} = (p_1, \dots, p_s), \quad (\bar{p}) = (p).$$

Далее,

$$(\bar{p}_i) = (\bar{p}) \cdot (\bar{p}'_i), \quad (p_i) = (p) \cdot (p'_i),$$

и так как

$$(\bar{p}_i) = (p_i), \quad (\bar{p}) = (p),$$

то

$$(\bar{p}'_i) = (p'_i) \quad (i = 1, \dots, s).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $p = (q, \bar{q})$ ($q \in KH$). Тогда $(\bar{p}) = (p)$.

Доказательство. Из равенств

$$q = p q_1, \quad \bar{q} = p q_2, \quad p = t_1 q + t_2 \bar{q}$$

вытекает, что

$$\bar{q} = \bar{p} \bar{q}_1, \quad q = \bar{p} \cdot \bar{q}_2, \quad \bar{p} = \bar{t}_1 \bar{q} + \bar{t}_2 q.$$

Следовательно, $\bar{p} = (q, \bar{q})$ и $(\bar{p}) = (p)$. Лемма доказана.

Каждый элемент $g \in G$ порядка 2 имеет вид $g = a^i b$. С помощью этого элемента можно получить разложение единицы алгебры KG в сумму двух ортогональных ненулевых идемпотентов

$$(1) \quad 1 = \frac{1}{2}(1+g) + \frac{1}{2}(1-g).$$

Лемма 3. Пусть $\varepsilon = \pm 1$, $g = a^i b$, $e = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon g)$, а M -произвольный KG -модуль без KH -кручения. Для любого элемента $x \in M$, такого, что $ex \neq 0$, подмодуль $N = KGex$ является также свободным циклическим KH -модулем: $N = KHex$. При этом естественный KH -изоморфизм свободных KH -модулей $KHex$ и $KHex$:

$$\Theta: te \rightarrow tex \quad (t \in KH)$$

является одновременно KG -изоморфизмом модулей KGe и N .

Доказательство. Так как

$$b(1 + \varepsilon a^i b) = \varepsilon a^{-i}(1 + \varepsilon a^i b),$$

то

$$KGe = KHe, \quad KGex = KHex.$$

Модуль $KHex$ есть свободный KH -модуль, ибо $ex \neq 0$ и M является модулем без KH -крючения.

Так как алгебра KG есть KG -модуль без KH -крючения, то модуль KGe — также свободный KH -модуль, и отображение $\theta: te \rightarrow tex$ есть KH -изоморфизм KGe на $KGex$.

Пусть $y \in KG$. Тогда $y(te) = t_1 e$ ($t, t_1 \in KH$), и

$$\theta(yte) = \theta(t_1 e) = t_1 \theta(e) = t_1 ex = (yte)x = y(tex) = y\theta(te).$$

Следовательно, θ — KG -изоморфизм модуля KGe на N . Лемма доказана.

Следствие. Если $p \in KH$, $p \neq 0$, а e -идемпотент, участвующий в лемме 3, то $KGer$ есть свободный циклический KH -модуль, изоморфный модулю KGe .

Доказательство. KG является модулем без KH -крючения, и $ep \neq 0$.

Лемма 4. Имеют место KG -изоморфизмы

$$KG(1 + \varepsilon a^{2i} b) \cong KG(1 + \varepsilon b),$$

$$KG(1 + \varepsilon a^{2i+1} b) \cong KG(1 + \varepsilon ab), \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Доказательство. Имеем

$$(1') \quad \begin{aligned} (1 + \varepsilon b)a^{-i}(1 + \varepsilon a^{2i} b) &= (a^{-i} + \varepsilon a^i b) \cdot (1 + \varepsilon a^{2i} b) = \\ &= (a^{-i} + \varepsilon a^i \cdot \varepsilon a^{-2i})(1 + \varepsilon a^{2i} b) = 2a^{-i}(1 + \varepsilon a^{2i} b); \end{aligned}$$

$$(1'') \quad \begin{aligned} (1 + \varepsilon ab)a^{-i}(1 + \varepsilon a^{2i+1} b) &= (a^{-i} + \varepsilon a^{1+i} b) \cdot (1 + \varepsilon a^{2i+1} b) = \\ &= (a^{-i} + \varepsilon a^{1+i} \cdot \varepsilon a^{-2i-1})(1 + \varepsilon a^{2i+1} b) = 2a^{-i}(1 + \varepsilon a^{2i+1} b). \end{aligned}$$

Так как каждый из модулей $KG(1 + \varepsilon a^{2i} b)$ и $KG(1 + \varepsilon a^{2i+1} b)$ порождается также соответственно элементами $2a^{-i}(1 + \varepsilon a^{2i} b)$ и $2a^{-i}(1 + \varepsilon a^{2i+1} b)$, то утверждение леммы сразу вытекает из формул (1'), (1'') и леммы 3.

Пусть

$$(2) \quad e_1 = \frac{1}{2}(1 + b), \quad e_2 = \frac{1}{2}(1 - b), \quad e_3 = \frac{1}{2}(1 + ab), \quad e_4 = \frac{1}{2}(1 - ab),$$

$$I_j = KGe_j \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Лемма 5. KG -модули I_1, I_2, I_3, I_4 попарно неизоморфны над KG .

Доказательство. Обозначим через $\bar{I}_j$ KG -подмодуль модуля I_j , порождённый всевозможными элементами $(1 + b)x$, $x \in I_j$ ($j = 1, \dots, 4$). Так как по лемме 3 I_j -свободный KH -модуль, порождённый элементом e_j , то каждый из подмодулей $\bar{I}_j$ ($j = 1, \dots, 4$) также является свободным циклическим KH -

модулем. Имеем

$$\begin{aligned}(1+b)e_1 &= 2e_1, \\ (1+b)\left(\sum_i \lambda_i a^i\right)e_2 &= \sum_i \lambda_i(a^i - a^{-i})e_2, \\ (1+b)\left(\sum_i \lambda_i a^i\right)e_3 &= \sum_i \lambda_i(a^i + a^{-i-1})e_3, \\ (1+b)\left(\sum_i \lambda_i a^i\right)e_4 &= \sum_i \lambda_i(a^i - a^{-i-1})e_4.\end{aligned}$$

Из этих формул следует, что

$$\bar{I}_1 = I_1; \quad \bar{I}_2 = KH(a^2 - 1)e_2; \quad \bar{I}_3 = KH(a + 1)e_3; \quad \bar{I}_4 = KH(a - 1)e_4.$$

Тогда для фактор-модулей $I_j/\bar{I}_j$ как для KH -модулей имеет место KH -изоморфизм

$$(2') \quad \begin{aligned}I_1/\bar{I}_1 &\cong (0); \quad I_2/\bar{I}_2 \cong KH/(a^2 - 1); \\ I_3/\bar{I}_3 &\cong KH/(a + 1); \quad I_4/\bar{I}_4 \cong KH/(a - 1).\end{aligned}$$

Формулы (2') показывают, что различные модули I_j попарно неизоморфны над KG , ибо из KG -изоморфизма модулей I_i и I_j ($i \neq j$) вытекал бы KH -изоморфизм фактор-модулей $I_i/\bar{I}_i$ и $I_j/\bar{I}_j$. Лемма доказана.

Мы также используем формулы (2') в последующих рассуждениях.

Заметим, что KG -модули I_j ($j = 1, \dots, 4$) являются неразложимыми циклическими KG -модулями без KH -крючения.

Предложение 1. *Каждый неразложимый циклический KG -модуль без KH -крючения изоморфен одному из модулей I_j ($j = 1, \dots, 4$). Модули I_1, I_2, I_3, I_4 неразложимы и попарно неизоморфны.*

Доказательство. Пусть M -циклический KG -модуль. Тогда M изоморфен фактор-модулю KG/J , где J -некоторый левый идеал алгебры KG . Произвольный элемент $x \in J$ записывается в виде

$$(3) \quad x = p + qb, \quad (p, q \in KH).$$

Если x пробегает идеал J , то элемент $p(q)$ в (3) пробегает идеал $V_0(V_1)$ в KH . Так как $bx = \bar{q} + \bar{p}b \in J$, то легко видеть, что $V_1 = \bar{V}_0$. Пусть $V_0 = (p_0)$. Тогда $V_1 = (\bar{p}_0)$.

Идеал J , в частности, содержит элемент

$$(4) \quad y = p_0 + t\bar{p}_0b.$$

Предположим теперь, что M —неразложимый KG -модуль без KH -крючения. Тогда $J \neq (0)$, ибо алгебра KG разлагается в прямую сумму левых идеалов (см. (1)). Следовательно, в (4) имеет место $p_0 \neq 0$. Покажем, что в (4) также

$$(5) \quad (p_0, \bar{p}_0) = 1, \quad t = \pm a^i.$$

В самом деле, пусть $(p_0, \bar{p}_0) \neq 1$. Тогда

$$p_0 = p \cdot p'_0, \quad \bar{p}_0 = p \cdot p'_1, \quad \text{где } p'_0 \not\equiv 0 \pmod{p_0}.$$

Значит

$$y = p(p'_0 + p'_1 b),$$

где $(p'_0 + p'_1 b) \notin J$ (см. определение идеала V_0). Таким образом, ненулевой элемент $(p'_0 + p'_1 b) + J$ фактор-модуля $M = KG/J$ аннулируется при умножении на элемент $p \in KH$, $p \neq 0$, а это противоречит тому, что M — модуль без KH -кручения. Следовательно, $(p_0, \bar{p}_0) = 1$.

Имеем

$$y = p_0 + t\bar{p}_0 b = (1 + tb)p_0,$$

$$(1 - tb)(1 + tb) = 1 - (tb)^2 = 1 - t \cdot \bar{t}.$$

Если $1 - t\bar{t} \neq 0$, то

$$(1 - tb)y = (1 - t\bar{t})p_0 \in J,$$

откуда

$$(1 - t\bar{t})p_0(1 + J) = J,$$

а это снова противоречит условию, что M — KG -модуль без KH -кручения.

Значит $t\bar{t} = 1$. Но тогда t — обратимый элемент в KH , и имеет вид $t = \lambda a^i$. Тогда

$$t\bar{t} = \lambda a^i \cdot \lambda a^{-i} = \lambda^2 = 1,$$

то есть $\lambda = \pm 1$ и $t = \pm a^i$. Мы доказали отношение (5).

Произвольный элемент $x \in J$ записывается в виде

$$x = (p_0 q_1 + q_2 t \bar{p}_0 b).$$

Тогда

$$x - q_1 y = (q_2 t \bar{p}_0 - q_1 t \bar{p}_0) b \in J.$$

Если $q_2 \neq q_1$, то снова получаем, что M есть модуль с KH -кручением. Следовательно, $q_2 = q_1$, и

$$(6) \quad J = KGy = KG(1 + \varepsilon a^i b)p_0,$$

где $\varepsilon = \pm 1$, а элемент $p_0 \in KH$ удовлетворяет условию (5): $(p_0, \bar{p}_0) = 1$. Тогда для некоторых $q_2, q_1 \in KH$ выполняется

$$q_1 p_0 + q_2 \bar{p}_0 = 1,$$

откуда

$$\bar{q}_1 \bar{p}_0 + \bar{q}_2 \cdot p_0 = 1.$$

Последние два равенства дают соотношение

$$(7) \quad \frac{q_1 + \bar{q}_2}{2} \cdot p_0 + \frac{q_2 + \bar{q}_1}{2} \bar{p}_0 = 1,$$

что имеет смысл, так как $\text{Char } K \neq 2$.

Полагая в (7) $\frac{q_1 + \bar{q}_2}{2} = q$, получаем, что существует такой элемент $q \in KH$,

что

$$(8) \quad p_0 q + \bar{p}_0 \bar{q} = 1.$$

Положим теперь

$$(9) \quad z = (1 - \varepsilon a^i b)q,$$

и докажем, что имеет место прямое разложение

$$(10) \quad KG = KGz \dot{+} KGy.$$

Как было показано выше, каждый элемент $x \in KH(1 \pm \varepsilon a^i b)$ однозначно записывается в виде $t(1 \pm \varepsilon a^i b)$ ($t \in KH$).

Пусть $p_1 + p_2 b$ ($p_1, p_2 \in KH$) — произвольный элемент алгебры KG . Докажем, что существуют такие однозначно определённые элементы $t_1, t_2 \in KH$, что

$$(11) \quad p_1 + p_2 b = t_1(1 - \varepsilon a^i b)\bar{q} + t_2(1 + \varepsilon a^i b)p_0.$$

Равенство (11) эквивалентно системе уравнений относительно t_1, t_2 :

$$(12) \quad \begin{aligned} \bar{q}t_1 + p_0t_2 &= p_1 \\ -\varepsilon a^i q t_1 + \varepsilon a^i \bar{p}_0 t_2 &= p_2 \end{aligned}$$

с определителем

$$\begin{vmatrix} \bar{q} & p_0 \\ -\varepsilon a^i q & \varepsilon a^i \bar{p}_0 \end{vmatrix} = \varepsilon a^i (\bar{p}_0 \bar{q} + p_0 q),$$

который, в силу (8), равен $\varepsilon a^i = \pm a^i$. Так как εa^i — обратимый элемент в KH , то система (12) имеет единственное решение (t_1, t_2) , $t_1, t_2 \in KH$, что доказывает прямое разложение (10).

Ввиду (10)

$$M = KG/J \cong KGz = KG(1 - \varepsilon a^i b)\bar{q}.$$

В силу следствия из леммы 3 и леммы 4, модуль $KG(1 - \varepsilon a^i b)\bar{q}$ изоморфен модулю $KG(1 - \varepsilon b)$, если $i = 2n$, и модулю $KG(1 - \varepsilon ab)$, если $i = 2n + 1$.

Итак, каждый неразложимый циклический KG -модуль M KG -изоморфен одному из модулей I_j ($j = 1, \dots, 4$).

Так как KH — целостное кольцо главных идеалов, то свободные циклические KH -модули I_j неразложимы в прямую сумму KH -модулей и, тем более, KG -модулей. Далее, по лемме 5, различные модули I_j попарно неизоморфны. Предложение доказано.

Лемма 6. Пусть KG -модуль M есть прямая сумма циклических KG -модулей

$$M = (u_1) \dot{+} \dots \dot{+} (u_s),$$

где $KG u_i = KH u_i$ — свободный KH -модуль, и $b u_i = t_i u_i$, где t_i — обратимый в KH элемент ($i = 1, \dots, s$). Пусть

$$u = p_1 u_1 + \dots + p_s u_s \quad (p_i \in KH, p_i \neq 0; i = 1, \dots, s),$$

и $N = KG u = KH u$. Если

$$p = (p_1, \dots, p_s), \quad p_i = p \cdot p'_i \quad (i = 1, \dots, s),$$

то

$$KG(p'_1 u_1 + \dots + p'_s u_s) = KH(p'_1 u_1 + \dots + p'_s u_s).$$

Доказательство. Покажем сначала, что $p_1, \dots, p_s$ — симметричные элементы алгебры KH . Действительно,

$$b(p_1 u_1 + \dots + p_s u_s) = \bar{p}_1 t_1 u_1 + \dots + \bar{p}_s t_s u_s,$$

где по условию t_i обратимы в KH . Предположим, что $(\bar{p}_i) \neq (p_i)$ для некоторого i ($1 \leq i \leq s$). Тогда идеал $(q) = (p_i, \bar{p}_i)$ собственным образом содержит идеал (p_i) . Так как

$$p_1 u_1 + \dots + p_s u_s, \quad \bar{p}_1 t_1 u_1 + \dots + \bar{p}_s t_s u_s \in N,$$

и

$$q = q_1 p_i + q_2 \bar{p}_i t_i \quad (q_1, q_2 \in KH),$$

то подмодуль N содержит элемент вида $\dots + q u_i + \dots$. Это противоречит тому, что все элементы модуля N имеют вид $t(p_1 u_1 + \dots + p_s u_s)$. Значит, $(\bar{p}_i) = (p_i)$ для всех $i = 1, \dots, s$. В силу леммы 2 теперь получаем, что $(\bar{p}) = (p)$, $(\bar{p}_i') = (p_i')$ ($i = 1, \dots, s$). Следовательно

$$(13) \quad \bar{p} = f p, \quad \bar{p}_i' = p_i' f_i,$$

где f, f_i ($i = 1, \dots, s$) — обратимые элементы алгебры KH . Ввиду (13) и условий леммы, имеем

$$(14) \quad b(p_1' u_1 + \dots + p_s' u_s) = d_1 p_1' u_1 + \dots + d_s p_s' u_s,$$

где $d_1, \dots, d_s$ — обратимые элементы в KH . На основании (13) и (14),

$$(15) \quad \begin{aligned} b(p_1 u_1 + \dots + p_s u_s) &= b p (p_1' u_1 + \dots + p_s' u_s) = \\ &= \bar{p} (d_1 p_1' u_1 + \dots + d_s p_s' u_s). \end{aligned}$$

С другой стороны

$$(16) \quad \begin{aligned} b p (p_1' u_1 + \dots + p_s' u_s) &= t p (p_1' u_1 + \dots + p_s' u_s) = \\ &= t \bar{p} f^{-1} (p_1' u_1 + \dots + p_s' u_s), \quad (t \in KH). \end{aligned}$$

Сравнивая (14), (15) и (16), получим

$$b(p_1' u_1 + \dots + p_s' u_s) = t f^{-1} (p_1' u_1 + \dots + p_s' u_s).$$

Лемма доказана.

Теорема 1. Каждый конечно-порождённый KG -модуль без KH -крючения разлагается в прямую сумму циклических модулей, каждый из которых изоморфен одному из модулей I_j ($j = 1, \dots, 4$).

Доказательство. Пусть модуль M порождается элементами $x_1, \dots, x_n$. Так как $1 = e_1 + e_2$, то

$$KGx_i = KGe_1 x_i + KGe_2 x_i.$$

При этом, по лемме 3, $KGe_j x_i \cong KGe_j$, если $e_j x_i \neq 0$. Таким образом, модуль M есть сумма (не прямая) циклических модулей, изоморфных I_j ($1 \leq j \leq 4$):

$$(17) \quad M = (v_1) + \dots + (v_k),$$

где

$$(18) \quad (v_i) \cong I_j \quad (1 \leq j \leq 4).$$

Будем доказывать теорему индукцией по числу слагаемых k в сумме (17). Рассмотрим сначала случай $k = 1, 2$.

Если в (17) $k=1$, то теорема очевидна. Пусть

$$M = (v_1) + (v_2).$$

Если $(v_1) \cap (v_2) = 0$, то теорема также очевидна. Предположим, что $(v_1) \cap (v_2) \neq 0$. Тогда, в силу (18) и леммы 3, M как KH -модуль есть сумма двух непересекающихся свободных KH -модулей. На основании известных теорем о модулях над кольцом главных идеалов M тогда является свободным KH -модулем, и, следовательно, M -неразложимый циклический KG -модуль. Применяя предложение 1, получим, что M изоморфен одному из модулей I_j ($1 \leq j \leq 4$).

Предположим теперь, для чисел $k \leq n$ уже показано, что сумма (17) может быть записана в виде прямой суммы $r \leq k$ циклических модулей, каждый из которых изоморфен одному из модулей I_j ($1 \leq j \leq 4$).

Пусть

$$M = (v_1) + \dots + (v_n) + (v_{n+1}).$$

В силу индуктивного предположения сумма $(v_1) + \dots + (v_n)$ может быть записана в виде прямой суммы $r \leq n$ неразложимых циклических KG -модулей. Если $r < n$, то M удовлетворяет индуктивному предположению. Поэтому можно записать, что

$$M = L + (v_{n+1}),$$

где

$$L = (v_1) + \dots + (v_n),$$

и

$$(19) \quad (v_i) \cong I_{j_i}, \quad e_{j_i} v_i = v_i \quad (i = 1, \dots, n+1; 1 \leq j_i \leq 4).$$

Если $L \cap (v_{n+1}) = 0$, то теорема уже доказана. Пусть

$$N = L \cap (v_{n+1}) \neq 0.$$

Так как (v_{n+1}) — свободный циклический KH -модуль, то N — также свободный циклический KH -модуль:

$$(20) \quad N = KH(p_1 v_1 + \dots + p_n v_n).$$

Если в (20), например, $p_1 = 0$, то

$$M = [(v_2) + \dots + (v_{n+1})] + (v_1),$$

где подмодуль $(v_2) + \dots + (v_{n+1})$ удовлетворяет предположению индукции, и тогда для M индуктивное предположение также доказано. Поэтому мы будем предполагать, что в (20) $p_i \neq 0$ ($i = 1, \dots, n$). Пусть

$$p = (p_1, \dots, p_n), \quad p_i = p p'_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Положим

$$u = p'_1 v_1 + \dots + p'_n v_n.$$

Тогда, по лемме 6

$$N_1 = KHu = KG u.$$

Так как $(p'_1, \dots, p'_n) = 1$, то, в силу известных теорем о модулях над кольцами

главных идеалов, элемент u можно дополнить до KH -базиса модуля L и, следовательно, фактор-модуль $\bar{L} = L/N_1$ есть KG -модуль без KH -кручения.

Покажем, что модуль $\bar{L}$ удовлетворяет предположению индукции. Действительно,

$$\bar{L} = KG(v_1 + N_1) + \dots + KG(v_n + N_1),$$

где, ввиду (19)

$$e_{j_i}(v_i + N_1) = v_i + N_1 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Следовательно, по лемме 3 ненулевой модуль $KG(v_i + N_1)$ изоморфен модулю I_{j_i} . На основании предположения индукции модуль $\bar{L}$ разлагается в прямую сумму модулей, изоморфных модулям I_j . Так как каждый модуль I_j — проективный KG -модуль, то $\bar{L}$ — также проективный KG -модуль. Значит, N_1 выделяется в L прямым слагаемым:

$$L = N_1 \dot{+} L_1.$$

Так как $L_1 \neq \bar{L}$, то KH -ранг модуля L_1 равен точно $n-1$ и L_1 есть прямая сумма $n-1$ неразложимых циклических KH -модулей:

$$L_1 = (u_1) \dot{+} \dots \dot{+} (u_{n-1}),$$

а

$$M = L_1 \dot{+} T,$$

где

$$T = N_1 + (v_{n+1}).$$

Так как $N_1 \cap (v_{n+1}) \neq 0$, то, в силу доказанного индуктивного предположения для $k=2$, T есть неразложимый циклический KG -модуль. Это завершает индукцию и доказательство теоремы.

В силу теоремы 1, конечно-порождённые KG -модули без KH -кручения — это в точности конечно-порождённые проективные KG -модули. Эта теорема не даёт полную систему инвариантов проективного модуля, так как для разложений в прямую сумму неразложимых проективных модулей не выполняется теорема Круля—Шмидта. Например

$$(21) \quad KG = I_1 \dot{+} I_2 = I_3 \dot{+} I_4.$$

Из последних результатов будет видно, что все остальные соотношения неоднозначности для прямых сумм проективных (конечно-порождённых) KG -модулей являются следствиями соотношения (21).

В последующих записях нам будет удобно отождествлять изоморфные между собой модули. Запись

$$A = n_1 B \dot{+} n_2 C$$

будет означать, что в прямое разложение модуля A модуль B входит с кратностью n_1 , а модуль C — с кратностью n_2 .

Теорема 2. Пусть M_1 и M_2 — конечно-порождённые KG -модули без KH -кручения, а $\bar{M}_i$ — подмодуль модуля M_i , порождённый всевозможными элементами $(1+b)x$, $x \in M_i$ ($i=1, 2$). Модули M_1 и M_2 KG -изоморфны тогда и только тогда, когда они KH -изоморфны, и, кроме того, KH -изоморфны модули $M_1/\bar{M}_1$ и $M_2/\bar{M}_2$.

Доказательство. Пусть M — произвольный конечно-порождённый проективный KG -модуль. Произведём, согласно теореме 1, разложение модуля M в прямую сумму модулей, изоморфных модулям I_j ($1 \leq j \leq 4$):

$$(22) \quad M = n_1 I_1 \dot{+} n_2 I_2 \dot{+} n_3 I_3 \dot{+} n_4 I_4.$$

Пусть S — свободный циклический KG -модуль ($S \cong KG$). Применяя несколько раз соотношения $S = I_1 \dot{+} I_2$ и $S = I_3 \dot{+} I_4$ (см. (21)), мы приведём равенство (22) к одному из следующих видов:

$$(23) \quad \begin{cases} M^{(1)} = mS + m_1 I_1 + m_3 I_3 \\ M^{(2)} = mS + m_1 I_1 + m_4 I_4 \\ M^{(3)} = mS + m_2 I_2 + n_3 I_3 \\ M^{(4)} = mS + m_2 I_2 + m_4 I_4. \end{cases}$$

KH -ранг r_i модулей $M^{(i)}$ ($i=1, \dots, 4$) соответственно равен

$$(24) \quad \begin{cases} r_1 = 2m + m_1 + m_3; & r_2 = 2m + m_1 + m_4 \\ r_3 = 2m + m_2 + m_3; & r_4 = 2m + m_2 + m_4. \end{cases}$$

В силу (23) и (2') каждый из модулей $M^{(i)}/\overline{M}^{(i)}$ как KH -модуль разлагается в прямую сумму одномерных над K KH -модулей $KH/(a+1)$ и $KH/(a-1)$.

Обозначим через $n_{i1}(n_{i2})$ кратность вхождения модуля $KH/(a+1)$ (соответственно $KH/(a-1)$) в модуль $M^{(i)}/\overline{M}^{(i)}$ ($i=1, \dots, 4$). Тогда из (23) и (2') вытекают формулы

$$(25) \quad \begin{cases} n_{11} = m + m_3; & n_{12} = m; \\ n_{21} = m; & n_{22} = m + m_4; \\ n_{31} = m + m_2 + m_3; & n_{32} = m + m_2; \\ n_{41} = m + m_2; & n_{42} = m + m_2 + m_4. \end{cases}$$

Заметим, что числа r_i ($i=1, \dots, 4$) и числа n_{ij} ($i=1, \dots, 4; j=1, 2$) являются инвариантами модуля M , не зависящими от выбора прямого разложения (22).

Оказывается, эти числа позволяют однозначно восстановить каждое из разложений (23). В самом деле, из (23), (24) и (25) вытекает, что модули $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $M^{(3)}$ и $M^{(4)}$ характеризуются условиями соответственно:

$$(26) \quad \begin{cases} r_1 \equiv n_{11} + n_{12}; & n_{11} \equiv n_{12}; \\ r_2 \equiv n_{21} + n_{22}; & n_{21} \equiv n_{22}; \\ r_3 \equiv n_{31} + n_{32}; & n_{31} \equiv n_{32}; \\ r_4 \equiv n_{41} + n_{42}; & n_{41} \equiv n_{42}. \end{cases}$$

При этом для $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $M^{(3)}$, $M^{(4)}$ выполняются соответственно

$$(27) \quad \begin{cases} m_1 = r_1 - (n_{11} + n_{12}); & m_3 = n_{11} - n_{12}; \\ m_1 = r_2 - (n_{21} + n_{22}); & m_4 = n_{22} - n_{21}; \\ m_2 = (n_{31} + n_{32}) - r_3; & m_3 = n_{31} - n_{32}; \\ m_2 = (n_{41} + n_{42}) - r_4; & m_4 = n_{42} - n_{41}. \end{cases}$$

Формулы (26) и (27) показывают, что KH -ранг модуля M и инварианты фактор-модуля $M/\bar{M}$ однозначно восстанавливают разложение (23) модуля M .

Значит из KH -изоморфизма модулей M_1 и M_2 , а также модулей $M_1/\bar{M}_1$ и $M_2/\bar{M}_2$ вытекает KG -изоморфизм модулей M_1 и M_2 . Очевидно, что KG -изоморфизм модулей M_1 и M_2 влечёт за собой их KH -изоморфизм, а также KH -изоморфизм модулей $M_1/\bar{M}_1$ и $M_2/\bar{M}_2$. Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема 2 показывает, что полную систему инвариантов произвольного конечно-порождённого KG -модуля M без KH -крючения даёт вектор

$$(28) \quad \alpha(M) = (r, n_1, n_2),$$

где r — KH -ранг модуля M , n_1 — кратность вхождения в индуцированный KH -модуль $M/\bar{M}$ модуля $KH/(a+1)$, а n_2 — модуля $KH/(a-1)$. Вектор $\alpha(M)$ очевидным образом обладает свойством аддитивности по отношению к прямой сумме модулей, то есть, если $M = M_1 + M_2$, то $\alpha(M) = \alpha(M_1) + \alpha(M_2)$.

Отсюда, и из теоремы 2 вытекает следующее утверждение:

Теорема 3. Для конечно-порождённых KG -модулей без KH -крючения выполняется свойство сокращения, то есть $M+N=M+N_1$ тогда и только тогда, когда $N_1=N_2$.

Замечание 2. Из рассуждений теоремы 2 следует, что всякое соотношение вида

$$(29) \quad m_1 I_1 + m_2 I_2 + m_3 I_3 + m_4 I_4 = m'_1 I_1 + m'_2 I_2 + m'_3 I_3 + m'_4 I_4$$

является следствием соотношения (21): $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$.

В самом деле, как показано при доказательстве теоремы 2, разложение вида (23) проективного конечно-порождённого модуля M однозначно определяется вектором $\alpha(M)$ (см. (26) и (27)). Значит, правая и левая части (29) должны приводиться к одному и тому же виду (25), а такое приведение можно осуществить с помощью соотношения $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$.

Из замечания 2 вытекает

Теорема 4. Группа $Ko(KG)^*$ есть свободная абелева группа ранга 3.

Доказательство. Так как все соотношения вида (29) являются следствиями соотношения $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$, то группа $Ko(KG)$ есть фактор-группа свободной абелевой группы A с базой a_1, a_2, a_3, a_4 по циклической подгруппе $B = (a_1 + a_2 - a_3 - a_4)$. Легко подсчитать, что A/B есть свободная абелева группа ранга 3. Теорема доказана.

Теорема 3 является ослабленным аналогом теоремы Круля—Шмидта для конечно-порождённых проективных KG -модулей. Если бы для этих модулей выполнялась теорема Круля—Шмидта, то группа $Ko(KG)$ была бы свободной абелевой группой ранга 4. На самом деле, $Ko(KG)$ есть свободная абелева группа ранга 3.

* Группа $Ko(KG)$ определяется стандартным в алгебраической K -теории способом как фактор-группа свободной абелевой группы, натянутой на модули I_1, I_2, I_3, I_4 по подгруппе этой группы, соответствующей всевозможным соотношениям вида (29).

Замечание 3. Групповая алгебра KG не является кольцом односторонних главных идеалов.

В самом деле, рассмотрим левый идеал

$$I = (a+1, b+1).$$

Для любых $p_0, p_1 \in KH$ имеем

$$(30) \quad \begin{aligned} (p_0 + p_1 b)(a+1) - (p_0 a - p_1)(1 - a^{-1}b) = \\ = (p_0 + p_1)(1+b). \end{aligned}$$

Так как p_0, p_1 — произвольные элементы алгебры KH , то из (30) вытекает, что

$$(31) \quad KG(1 - a^{-1}b) \subset I.$$

Произвольный элемент $x \in I$ записывается в виде

$$(p_0 + p_1 b)(a+1) + q(1+b) \quad (p_0, p_1, q \in KH).$$

Отсюда, и из (30), (31) получаем, что

$$(32) \quad I = KG(1 - a^{-1}b) + KG(1+b).$$

Сумма (32) — прямая, ибо

$$q_1(1 - a^{-1}b) \neq q_2(1+b)$$

при $q_1 \neq 0$. Так как по лемме 4

$$KG(1 - a^{-1}b) \cong KG(1 - ab),$$

то (32) показывает, что идеал I изоморфен прямой сумме модулей I_1 и I_4 . Значит, I — не главный идеал, ибо тогда был бы свободным циклическим KG -модулем S , и выполнялось бы соотношение

$$S = I_1 + I_4$$

противоречащее единственности разложения (23).

§ 2.

Теперь дадим описание всех конечномерных неразложимых представлений группы G над полем K , характеристика которого отлична от 2.

Полином $f(x)$ степени m над полем K будем называть симметричным, если $f(x) = x - 1$, или если $f(x) = x^m f(x)$.

Теорема 5. Любой неразложимый над полем K KG -модуль M соответствует некоторому полиному $f(x)^n$, где $f(x) = x^m + \dots$ — нормированный над K полином. Если $f(x)$ — неприводимый над K полином, отличный от полиномов $x+1, x-1$, то каждому полиному $\varphi = f(x)^n$ (n -произвольное натуральное число) с точностью до изоморфизма соответствует точно один неразложимый KG -модуль M_φ .

Пусть I — главный идеал алгебры KH , порождённый элементом $\varphi(a)$. Если полином $f(x)$ не симметричный, то модуль M_φ есть индуцированный

KG -модуль $(KH/I)^G$. Если $f(x)$ — симметричный полином, то модуль M_φ изоморфен любому из идеалов $A(e_1+I)$, $A(e_2+I)$ фактор-алгебры $A=KG/I$, где $e_1=\frac{1}{2}(1+b)$, $e_2=\frac{1}{2}(1-b)$, а $I=KG\varphi(a)$ — двухсторонний идеал алгебры KG , порождённый элементом $\varphi(a)$. Если $f(x)=x+1$ (или $x-1$), то каждому полиному $\varphi=(x+1)^n$ (соответственно $(x-1)^n$) соответствуют точно два изоморфных модуля M_φ , один из которых есть идеал $A(e_1+I)$, а второй — идеал $A(e_2+I)$ фактор-алгебры $A=KG/((a+1)^n)$ (соответственно фактор-алгебры $KG/((a-1)^n)$). Различным полиномам $f_1(x)^n$, $f_2(x)^n$ (f_1, f_2 — неприводимые нормированные полиномы) соответствуют неизоморфные неразложимые KG -модули M .

Доказательство. В силу ограничения на характеристику поля, по теореме Хитмана ([1]), каждый неразложимый конечномерный KG -модуль M есть прямая компонента модуля, индуцированного неразложимым конечномерным KH -модулем N .

Так как KH -кольцо главных идеалов, то каждый неразложимый конечномерный KH -модуль KH -изоморфен факторкольцу KH/I , где I -идеал, порождённый степенью простого элемента p кольца KH : $I=(p^a)$, причём любой KH -модуль $KH/(p^a)$ (p -простой элемент кольца KH) неразложим. KH -модули $KH/(p_1^{a_1})$ и $KH/(p_2^{a_2})$ (p_1, p_2 -простые элементы кольца KH) изоморфны тогда и только тогда, когда $(p_1)=(p_2)$ и $a_1=a_2$. Классы ассоциированных между собой простых элементов $p \in KH$ взаимно однозначно соответствуют нормированным неприводимым полиномам над полем K .

Пусть $N=KH/(p^a)$ (p -простой элемент из KH). Индуцированный KG -модуль M имеет вид

$$(33) \quad M = N \dot{+} bN$$

(прямая сумма KH -модулей). Легко видеть, что KH -модуль bN изоморфен модулю $KH/(\bar{p}^a)$. Могут представиться два случая:

1. $(\bar{p}) \neq (p)$;
2. $(\bar{p}) = (p)$.

Покажем, что в первом случае модуль M неразложим. Действительно, в этом случае подмодули N и $N_1=bN$ определяются в M абсолютно однозначно. N (соответственно N_1) есть подмодуль KH -модуля M , состоящий из всех элементов модуля M , аннулирующихся элементом p^a (соответственно элементом $\bar{p}^a$).

Пусть KG -модуль M разложим:

$$(34) \quad M = M_1 \dot{+} M_2.$$

Тогда (34) является также разложением M как KH -модуля. Но прямое разложение KH -модуля абсолютно однозначно, то есть M_1 совпадает с одним из KH -модулей N, N_1 . Так как M_1 — KG -модуль, то M_1 содержит оба модуля N, N_1 , что даёт противоречие.

Пусть $(\bar{p})=(p)$. Тогда $KG(p^a)$ есть двухсторонний идеал в KG , а индуцированный KG -модуль M изоморфен (как KG -модуль) фактор-алгебре

$KG/(p^2) = A$. Элементы $\tilde{e}_1 = e_1 + I$ и $\tilde{e}_2 = e_2 + I$ ($I = (p^2)$) являются ненулевыми ортогональными идемпотентами алгебры A , и поэтому алгебра A разлагается в прямую сумму двух левых идеалов

$$(35) \quad A = A_1 \dot{+} A_2$$

где $A_i = A\tilde{e}_i$ ($i=1, 2$).

Легко видеть, что KG -модули A_1 и A_2 неразложимы. В самом деле, в силу (34) модуль M (как KH -модуль) есть прямая сумма двух неразложимых KH -модулей. Так как разложение M в прямую сумму неразложимых KH -модулей однозначно с точностью до изоморфизма, то идеалы A_i неразложимы как KH -модули, а, значит, они есть неразложимые KG -модули.

Покажем, что $A_1 \cong A_2$, если с простым элементом p ассоциирован неприводимый полином степени, большей чем 1, и что $A_1 \not\cong A_2$, если этот полином первой степени. Для этого исследуем сначала неприводимые A -модули. Рассмотрим нильпотентный двухсторонний идеал $B = (p + I)$ алгебры A . Очевидно, $B^2 = I$. Легко видеть, что

$$A/B \cong KG/(p).$$

Покажем, что алгебра $C = KG/(p)$ разлагается в прямую сумму двух минимальных идеалов. Действительно, C как KH -модуль, согласно (34), разлагается в прямую сумму двух простых KH -модулей, изоморфных $KH/(p)$. Следовательно, любое разложение C как KG -модуля в прямую сумму будет разложением в прямую сумму простых KH -модулей, а, следовательно, и простых KG -модулей. Таким образом, B — радикал алгебры A , а

$$C = C_1 \dot{+} C_2,$$

где $C_1 = C(e_1 + (p))$, $C_2 = C(e_2 + (p))$ есть разложение алгебры C в прямую сумму двух минимальных левых идеалов. В силу известных результатов теории полупростых алгебр, идеалы C_1 и C_2 не изоморфны тогда и только тогда, когда C_1 и C_2 являются телами, или, что то же самое, когда $e_1 + (p)$, $e_2 + (p)$ — единицы соответствующих идеалов C_1 и C_2 . Это, в свою очередь, эквивалентно тому, что $e_2 + C$ аннулирует каждый элемент идеала C_1 . В частности, должно быть $e_2 a e_1 + (p) = (p)$, или

$$(36) \quad (1 - b)a(1 + b) = (a - a^{-1})(1 + b) \in (p).$$

Каждый элемент двухстороннего идеала (p) в KG имеет вид $q_0 + q_1 b$, где $q_i \equiv 0 \pmod{p}$ ($i=0, 1$). Следовательно, из (36) вытекает, что $(a^2 - 1) \equiv 0 \pmod{p}$ в KH . Но простые делители элемента $a^2 - 1$ в KH ассоциированы только с $a + 1$ и $a - 1$. Следовательно, если p не ассоциирован с элементом $a - 1$ или $a + 1$, то идеалы C_1 и C_2 между собой изоморфны. Если же p ассоциирован с $a - 1$ или $a + 1$, то алгебра C двумерна над K , идеалы C_1 и C_2 одномерны над K , а e_i — единица в C_i ($i=1, 2$). В этом случае $C_1 \not\cong C_2$, ибо в идеалах C_1 и C_2 реализуются одномерные K -представления $a \rightarrow 1, b \rightarrow 1$; $a \rightarrow 1, b \rightarrow -1$ (соответственно представления $a \rightarrow -1, b \rightarrow 1$; $a \rightarrow -1, b \rightarrow -1$) группы G . В силу известной теоремы артиновых колец, число неразложимых проективных модулей над конечномерной алгеброй равно числу неприводимых модулей над этой алгеброй. Следовательно, идеалы A_1 и A_2 KG -изоморфны, если простой

элемент p ассоциирован с неприводимым полиномом степени, большей чем 1, и не изоморфны, если p ассоциирован с $a-1$ или $a+1$. Теорема доказана.

Теорема 6. *Каждый конечно-порождённый KG -модуль M разлагается в прямую сумму неразложимых циклических подмодулей. Неразложимые конечномерные над K циклические KG -модули описываются теоремой 5 и определены с точностью до изоморфизма, а каждый неразложимый бесконечномерный над K циклический модуль изоморфен одному из проективных модулей KGe_i ($i=1, \dots, 4$) (см. (2)), причём прямые суммы проективных неразложимых циклических KG -модулей, участвующих в разложении M , описываются теоремами § 1, применительно к фактор-модулю M/M_0 , где M_0 — подмодуль модуля M , состоящий из всех элементов этого модуля, имеющих нулевые аннуляторы в KH .*

Доказательство. Пусть M — конечно-порождённый KG -модуль, а M_0 — KH -подмодуль модуля M , указанный в формулировке теоремы. Тогда M_0 — KG -подмодуль модуля M . Действительно, пусть $x \in M_0$, $q_0 + q_1 b \in KG$, $q_0, q_1 \in KH$ и $tx = 0$ для некоторого $t \neq 0, t \in KH$. Тогда $t \cdot \bar{t} \neq 0$ и

$$t\bar{t}(q_0 + q_1 b)x = (q_0 + q_1 b)t\bar{t}x = 0,$$

то есть $(q_0 + q_1 b)x \in M_0$.

Образуем фактор-модуль M/M_0 . Тогда M/M_0 — KG -модуль без KH -закручивания. Кроме того, модуль M/M_0 — конечно-порождён как фактор-модуль конечно-порождённого модуля. В силу теоремы 1, M/M_0 — проективный KG -модуль и, следовательно, имеет место разложение

$$M = L \dot{+} M_0,$$

где $L \cong M/M_0$. В свою очередь M_0 — конечно-порождённый KG -модуль. Следовательно, M_0 — конечно-порождённый периодический KH -модуль, и разлагается в прямую сумму примарных KH -модулей. Так как последние конечномерны над K , то M_0 — конечномерный KG -модуль. Тогда к M_0 применима классическая теорема Круля—Шмидта, в силу которой M_0 однозначно с точностью до изоморфизма слагаемых разлагается в прямую сумму неразложимых KG -модулей. Последние описываются теоремой 5. В частности, они циклически.

По теореме 1, модуль L разлагается в прямую сумму подмодулей, изоморфных проективным модулям KGe_i ($i=1, \dots, 4$). Разлагая L и M_0 в прямые суммы неразложимых циклических KG -модулей, получим разложение M в прямую сумму неразложимых циклических подмодулей. Так как подмодуль M_0 определён в M абсолютно однозначно, то прямые суммы проективных циклических модулей в разложении M описываются теоремами § 1 в применении к фактор-модулю M/M_0 . Теорема доказана.

Литература

- [1] Ч. Кэртис—И. Райнер, Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. Изд. Наука, Москва 1969.
- [2] А. Карган—С. Эйленберг, Гомологическая алгебра. Изд. Иностранной Литературы, Москва 1960.

(Поступило 5. VI. 1978.)