

Об инвариантах пар конечных абелевых групп

К. БУЗАШИ (Дебрецен)

В работах [3], [4] рассматриваются вопросы, связанные с совместной разложимостью абелевой группы G с её подгруппой H (так называемой «пары» (G, H) группы G с подгруппой H).

В настоящей заметке исследуется вопрос, поставленный С. Д. Берманом: какими инвариантами описывается пара (G, H) , где G — абелева группа, H — её подгруппа. Доказывается, что если G — конечная абелева группа, $H \subseteq G$ — циклическая группа, то пара (G, H) с точностью до изоморфизма пар характеризуется инвариантами фактор-группы G/H .

Определение 1. Пусть G — произвольная группа, H — подгруппа группы G . Пару (G, H) называем неразложимой, если не существует такое разложение группы G и подгруппы H в прямое произведение своих подгрупп

$$G = G_1 \times G_2 \\ H = H_1 \times H_2 \quad (G_1 \neq \{1\}, G_2 \neq \{1\}),$$

что $H_1 \subseteq G_1, H_2 \subseteq G_2$. В противном случае пара (G, H) называется разложимой.

Определение 2. Пусть G_i ($i=1, 2$) — произвольные группы, и H_i — подгруппа группы G_i . Пары (G_1, H_1) и (G_2, H_2) называются изоморфными, если существует изоморфизм $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ такой, что $\varphi(H_1) = H_2$.

Лемма 1.* Пусть G — прямое произведение конечного числа циклических p -групп, H — циклическая подгруппа группы G . Пара (G, H) неразложима тогда и только тогда, когда группа G обладает таким базисом $\{a_i\}$, что при $a_i^{p^{\alpha_i}} = 1$ ($i=1, \dots, n$) подгруппа H порождается элементом $a_1^{p^{\beta_1}} \cdot \dots \cdot a_n^{p^{\beta_n}}$, причём выполняются неравенства

$$(1) \quad \begin{aligned} \alpha_1 &< \alpha_2 < \dots < \alpha_n \\ \beta_1 &< \beta_2 < \dots < \beta_n \\ \alpha_1 - \beta_1 &< \alpha_2 - \beta_2 < \dots < \alpha_n - \beta_n. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $G = (a_1) \times \dots \times (a_n)$, $a_i^{p^{\alpha_i}} = 1$ ($i=1, \dots, n$), $H = (a_1^{\mu_1} \cdot \dots \cdot a_n^{\mu_n})$. Предположим, что $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$ очевидно, ни одно из чисел μ_i ($i=1, \dots, n$) не равно нулю, так как при $\mu_k = 0$ для фиксированного

*) Лемма 1 принадлежит С. Д. Берману. Идеями предложенного здесь доказательства в дальнейшем будем пользоваться.

k ($1 \leq k \leq n$) разложению $G = G_1 \times (a_k)$ группы G , где $G_1 = (a_1) \times \dots \times (a_{k-1}) \times (a_{k+1}) \times \dots \times (a_n)$ соответствовало бы разложение $H = H \times \{1\}$, группы H , где $H \subseteq G_1$, значит пара (G, H) была бы разложимой.

Рассмотрим отображение

$$(2) \quad \varphi(a_i) = a_i^{\lambda_i} = \bar{a}_i$$

где $\mu_i = \lambda_i p^{\beta_i}$, $(\lambda_i, p) = 1$, $(i = 1, \dots, n)$. Отображение (2) является автоморфизмом группы G . Действительно, из-за $(\lambda_i, p) = 1$, порядки элементов a_i и $\bar{a}_i$ совпадают, значит φ взаимно однозначно отображает группу G на себя. Очевидно, φ является гомоморфизмом. Значит φ переводит базис $\{a_i\}$ группы G в такой базис $\{\bar{a}_i\}$, в котором подгруппа H порождается элементом $\bar{a}_1^{p^{\beta_1}} \cdot \dots \cdot \bar{a}_n^{p^{\beta_n}}$.

Мы будем предполагать, что подгруппа H порождается элементом

$$a_1^{p^{\beta_1}} \cdot a_2^{p^{\beta_2}} \cdot \dots \cdot a_n^{p^{\beta_n}}.$$

Покажем теперь, что для неразложимости пары (G, H) необходимо выполнение неравенства

$$\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n.$$

Пусть наоборот, для фиксированного индекса k ($1 \leq k \leq n$) имеет место неравенство $\beta_k \geq \beta_{k+1}$. Так как

$$a_k^{p^{\beta_k}} \cdot a_{k+1}^{p^{\beta_{k+1}}} = (a_k^{p^{\beta_k - \beta_{k+1}}} \cdot a_{k+1})^{p^{\beta_{k+1}}},$$

то мы положим

$$(3') \quad \bar{a}_i = \begin{cases} a_i & , \text{ если } i \neq k+1 \\ a_k^{p^{\beta_k - \beta_{k+1}}} \cdot a_{k+1} & , \text{ если } i = k+1 \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Очевидно, множество $\{\bar{a}_i\}$ является базисом группы G , так как $(\bar{a}_\gamma) \cap (\bar{a}_\mu) = e$ ($1 \leq \gamma \neq \mu \leq n$) и порядок элемента $\bar{a}_{k+1}$ равен порядку элемента a_{k+1} (ибо $\alpha_k \leq \alpha_{k+1}$). Поэтому отображение

$$(3) \quad \psi(a_i) = \bar{a}_i,$$

где элементы $\bar{a}_i$ ($i = 1, \dots, n$) определены равенствами (3'), является автоморфизмом группы G . Однако, подгруппа H лежит в подгруппе $G_2 = (a_1) \times \dots \times (a_{k-1}) \times (a_{k+1}) \times \dots \times (a_n)$, поэтому разложению $G = G_2 \times (a_k)$ соответствует разложение $H = H \times \{1\}$ подгруппы H , значит пара (G, H) разложима.

Покажем, что для неразложимости пары (G, H) необходимо также выполнение неравенств

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n.$$

Действительно, пусть для некоторого фиксированного индекса k ($1 \leq k < n$) выполняется $\alpha_k = \alpha_{k+1}$. Тогда из-за равенства

$$a_k^{p^{\beta_k}} \cdot a_{k+1}^{p^{\beta_{k+1}}} = (a_k \cdot a_{k+1}^{p^{\beta_{k+1} - \beta_k}})^{p^{\beta_k}}$$

мы можем положить

$$(4') \quad \bar{a}_i = \begin{cases} a_i & , \text{ если } i \neq k \\ a_k \cdot a_{k+1}^{p^{\beta_{k+1} - \beta_k}} & , \text{ если } i = k \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Множество $\{\bar{\bar{a}}_i\}$ является базисом группы G , в котором подгруппа H имеет вид

$$H = (\bar{\bar{a}}_1^{p^{\beta_1}} \cdot \dots \cdot \bar{\bar{a}}_k^{p^{\beta_k}} \cdot \bar{\bar{a}}_{k+2}^{p^{\beta_{k+2}}} \cdot \dots \cdot \bar{\bar{a}}_n^{p^{\beta_n}}),$$

значит она лежит в истинной подгруппе $G_3 = (\bar{\bar{a}}_1) \times \dots \times (\bar{\bar{a}}_k) \times (\bar{\bar{a}}_{k+2}) \times \dots \times (\bar{\bar{a}}_n)$ группы G , и G разлагается в прямое произведение $G = G_3 \times (\bar{\bar{a}}_{k+1})$. Следовательно, пара (G, H) разложима.

Покажем также необходимость выполнения неравенств

$$\alpha_1 - \beta_1 < \alpha_2 - \beta_2 < \dots < \alpha_n - \beta_n$$

для неразложимости пары (G, H) . Пусть для некоторого фиксированного индекса k ($1 \leq k < n$) имеет место неравенство

$$\alpha_k - \beta_k \geq \alpha_{k+1} - \beta_{k+1}.$$

Тогда можно записать равенство

$$a_k^{p^{\beta_k}} \cdot a_{k+1}^{p^{\beta_{k+1}}} = (a_k \cdot a_{k+1}^{p^{\beta_{k+1}-\beta_k}})^{p^{\beta_k}}.$$

Порядок элемента $a_{k+1}^{p^{\beta_{k+1}-\beta_k}}$ равняется числу $p^{\alpha_{k+1}-\beta_{k+1}+\beta_k}$, которое, по нашему предположению, не больше числа p^{α_k} —порядка элемента a_k . Поэтому, порядок элемента

$$\tilde{a}_k = a_k \cdot a_{k+1}^{p^{\beta_{k+1}-\beta_k}}$$

равен числу p^{α_k} . Положим

$$(5') \quad \tilde{a}_i = \begin{cases} a_i, & \text{если } i \neq k \\ a_k \cdot a_{k+1}^{p^{\beta_{k+1}-\beta_k}}, & \text{если } i = k. \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n)$$

Нетрудно заметить, что множество $\{\tilde{a}_i\}$ является базисом группы G , образом базиса $\{a_i\}$ при автоморфизме

$$(5) \quad \tilde{\psi}(a_i) = \tilde{a}_i, \quad (i = 1, \dots, n)$$

где элементы $\tilde{a}_i$ определены равенствами (5'). В этом базисе образующий элемент

$$\tilde{a}_1^{p^{\beta_1}} \cdot \dots \cdot \tilde{a}_k^{p^{\beta_k}} \cdot \tilde{a}_{k+2}^{p^{\beta_{k+2}}} \cdot \dots \cdot \tilde{a}_n^{p^{\beta_n}}$$

подгруппы H не зависит от элемента $\tilde{a}_{k+1}$ группы G . Разложение $G = G_4 \times (\tilde{a}_{k+1})$ группы G , где $G_4 = (\tilde{a}_1) \times \dots \times (\tilde{a}_k) \times (\tilde{a}_{k+2}) \times \dots \times (\tilde{a}_n)$, и включение $H \subseteq G_4$ делает очевидной разложимость пары (G, H) .

Осталось показать, что условия (1) являются достаточными для неразложимости пары (G, H) . Пусть выполняются условия леммы. Так как циклическая группа H не разлагается в нетривиальное прямое произведение своих подгрупп, то для разложимости пары (G, H) было бы необходимо существование такой подгруппы $\tilde{G}_1 \subseteq G$, для которой $H \subseteq \tilde{G}_1$ и $\tilde{G}_1 \neq G$. Предположим, что такая подгруппа $\tilde{G}_1$ существует, то есть имеется такой базис $a_1^*, \dots, a_n^*$

группы G , в котором имеет место разложение $G = \tilde{G}_1 \times G_2$, $G_2 \neq \{1\}$ и $H \subset \tilde{G}_1$. Это возможно только тогда, когда в базисе $\{a_i^*\}$ группы G , в выражение элемента $a_1^{p^{\beta_1}} \cdot \dots \cdot a_n^{p^{\beta_n}} \in H$ через этот базис, входят не все элементы базиса $\{a_i^*\}$.

Переход от базиса $\{a_i\}$ к базису $\{a_i^*\}$ является автоморфизмом φ^* группы G . Предположим, что элементы a_{ij}^* ($i=1, \dots, n$) занумерованы так, что

$$\text{ord } a_i = \text{ord } a_i^* \quad (i = 1, \dots, n).$$

Пусть

$$a_n = a_1^{*\gamma_{1n}} \cdot a_2^{*\gamma_{2n}} \cdot \dots \cdot a_n^{*\gamma_{nn}},$$

где $\gamma_{nn} \not\equiv 0 \pmod{p}$, так как порядок элемента a_n^* равен p^{α_n} ($> p^{\alpha_j}$, $j=1, 2, \dots, n-1$), значит, в случае $\gamma_{nn} \equiv 0 \pmod{p}$, порядок элемента a_n не был бы равен p^{α_n} . Пусть далее

$$a_{n-1} = a_1^{*\gamma_{1n-1}} \cdot \dots \cdot a_{n-1}^{*\gamma_{n-1n-1}} \cdot a_n^{*\gamma_{nn-1}},$$

где, подобно выше сказанному,

$$\gamma_{n-1n-1} \not\equiv 0 \pmod{p}, \quad \gamma_{nn-1} \equiv 0 \pmod{p^{\alpha_n - \alpha_{n-1}}}.$$

Для элемента a_{n-2} получаем выражение

$$a_{n-2} = a_1^{*\gamma_{1n-2}} \cdot \dots \cdot a_{n-2}^{*\gamma_{n-2n-2}} \cdot \dots \cdot a_n^{*\gamma_{nn-2}},$$

где

$$\gamma_{n-2n-2} \not\equiv 0 \pmod{p}, \quad \gamma_{n-1n-2} \equiv 0 \pmod{p^{\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}}}, \quad \gamma_{nn-2} \equiv 0 \pmod{p^{\alpha_n - \alpha_{n-2}}}.$$

Вообще, для базисного элемента a_{n-i} получаем выражение

$$a_{n-i} = a_1^{*\gamma_{1n-i}} \cdot \dots \cdot a_{n-i}^{*\gamma_{n-i n-i}} \cdot \dots \cdot a_n^{*\gamma_{nn-i}}, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

причём выполняются сравнения

$$\gamma_{n-i n-i} \not\equiv 0 \pmod{p}, \quad \gamma_{n-k n-i} \equiv 0 \pmod{p^{\alpha_{n-k} - \alpha_{n-i}}}, \quad (k = 0, 1, \dots, i-1).$$

Пусть

$$\gamma_{rs} = \begin{cases} \gamma_{rs} & , \text{ если } r \leq s \\ c_{rs} p^{\alpha_r - \alpha_s} & , \text{ если } r > s \end{cases} \quad (r, s = 1, \dots, n),$$

где $c_{rs} \not\equiv 0 \pmod{p}$ ($r > s$). Тогда матрица автоморфизма φ^* имеет вид

$$F = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \dots & \gamma_{1n-1} & \gamma_{1n} \\ c_{21} p^{\alpha_2 - \alpha_1} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \dots & \gamma_{2n-1} & \gamma_{2n} \\ c_{31} p^{\alpha_3 - \alpha_1} & c_{32} p^{\alpha_3 - \alpha_2} & \gamma_{33} & \dots & \gamma_{3n-1} & \gamma_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ c_{n-11} p^{\alpha_{n-1} - \alpha_1} & c_{n-12} p^{\alpha_{n-1} - \alpha_2} & c_{n-13} p^{\alpha_{n-1} - \alpha_3} & \dots & \gamma_{n-1n-1} & \gamma_{n-1n} \\ c_{n1} p^{\alpha_n - \alpha_1} & c_{n2} p^{\alpha_n - \alpha_2} & c_{n3} p^{\alpha_n - \alpha_3} & \dots & c_{nn-1} p^{\alpha_n - \alpha_{n-1}} & \gamma_{nn} \end{pmatrix}.$$

Поэтому образующий элемент циклической подгруппы в новом базисе выражается так:

$$\begin{aligned}
 a_1^{p^{\beta_1}} \cdot \dots \cdot a_n^{p^{\beta_n}} &= a_1^{*\gamma_{11}p^{\beta_1} + \gamma_{12}p^{\beta_2} + \dots + \gamma_{1n-1}p^{\beta_{n-1}} + \gamma_{1n}p^{\beta_n}} \cdot \\
 &\quad \cdot a_2^{*c_{21}p^{\alpha_2} - \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_{22}p^{\beta_2} + \dots + \gamma_{2n}p^{\beta_n}} \cdot \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad \cdot a_i^{*c_{i1}p^{\alpha_i} - \alpha_1 + \beta_i + \dots + c_{i,i-1}p^{\alpha_{i-1}} - \alpha_{i-1} + \beta_i + \gamma_{ii}p^{\beta_i} + \dots + \gamma_{in}p^{\beta_n}} \cdot \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad \cdot a_{n-1}^{*c_{n-1,1}p^{\alpha_{n-1}} - \alpha_1 + \beta_{n-1} + \dots + c_{n-1,n-2}p^{\alpha_{n-2}} - \alpha_{n-2} + \beta_{n-1} + \gamma_{n-1,n-1}p^{\beta_{n-1}} + \gamma_{n-1,n}p^{\beta_n}} \cdot \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad \cdot a_n^{*c_{n1}p^{\alpha_n} - \alpha_1 + \beta_n + \dots + c_{nn}p^{\beta_n}} = \\
 &= a_1^{*\gamma_{11}p^{\beta_1}} \cdot a_2^{*\gamma_{22}p^{\beta_2}} \cdot \dots \cdot a_n^{*\gamma_{nn}p^{\beta_n}},
 \end{aligned}$$

где показатели γ_i взаимно просты с p^{β_i} , так как

$$\gamma_i = c_{i1}p^{\alpha_i - \alpha_1} + \dots + c_{i,i-1}p^{\alpha_i - \alpha_{i-1}} + \gamma_{ii} + \gamma_{i,i+1}p^{\beta_{i+1} - \beta_i} + \dots + \gamma_{in}p^{\beta_n - \beta_i},$$

где выполняется $\alpha_i - \alpha_v > 0$ для всех $v=1, \dots, i-1$ ($i=1, \dots, n$), а γ_{ii} взаимно просты с p ($i=1, \dots, n$).

Значит, в записи элемента $a_1^{p^{\beta_1}} \cdot \dots \cdot a_n^{p^{\beta_n}}$ подгруппы H в новом базисе $\{a_i^*\}$ участвуют все базисные элементы a_i^* , значит разложение $G = \tilde{G}_1 \times G_2$ невозможно. Следовательно, пара (G, H) неразложима. Лемма 1 доказана.

Лемма 2.*) Пусть G -конечнопорождённая абелева группа, H -её подгруппа. Пусть $\{a_i\}$ -базис группы G и

$$a_1^{\gamma_{1v}} a_2^{\gamma_{2v}} \cdot \dots \cdot a_n^{\gamma_{nv}} H = H \quad (v = 1, 2, \dots, s)$$

все определяющие соотношения фактор-группы G/H . Тогда инварианты фактор-группы G/H получаются приведением целочисленной матрицы

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1s} \\ \vdots & & \\ \gamma_{n1} & \dots & \gamma_{ns} \end{pmatrix}$$

элементарными преобразованиями к диагональному виду

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \delta_r & & \\ & & & 0 & \ddots \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

($r = \min \{n, s\}$), где δ_i / δ_{i+1} ($i=1, \dots, r-1$), δ_i -неотрицательные целые числа.

*) Так как в дальнейшем будем пользоваться им, мы приводим здесь одно доказательство этого известного факта.

Доказательство. Пусть $b_1, \dots, b_m$ — базис подгруппы H . Тогда, по известной теореме о конечнопорождённых абелевых группах, существует такой базис $a_1, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ группы G , что имеет место

$$b_1 = a_1^{\varepsilon_1}, \dots, b_m = a_m^{\varepsilon_m},$$

и выполняется

$$\varepsilon_i / \varepsilon_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, m-1).$$

В этом базисе фактор-группа G/H выражается в виде прямого произведения

$$G/H \cong (a_1)/(b_1) \times \dots \times (a_m)/(b_m) \times (a_{m+1}) \times \dots \times (a_n),$$

где порядки фактор-групп $(a_i)/(b_i)$ равняются числам ε_i ($i = 1, \dots, m$).

Переход к базису $\{a_i\}$ является автоморфизмом группы G , который характеризуется целочисленной матрицей диагонального вида. Так как при элементарных преобразованиях матрица задаёт автоморфизм группы, а при автоморфизмах определяющие соотношения переходят в определяющие соотношения, значит полученная диагональная матрица в диагонали содержит в точности инварианты фактор-группы G/H . Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть G — прямое произведение конечного числа циклических p -групп, H — такая циклическая подгруппа группы G , что пара (G, H) неразложима. Тогда пара (G, H) с точностью до изоморфизма пар определяется инвариантами группы G и фактор-группы G/H .

Доказательство. Пусть группа G порождается базисом $a_1, \dots, a_n$, где $a_i^{p^{\alpha_i}} = 1$ ($i = 1, \dots, n$) и имеет место неравенство $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$. Так как (G, H) — неразложимая пара, то, согласно лемме 1, подгруппа H имеет вид

$$H = (a_1^{p^{\beta_1}} \cdot \dots \cdot a_n^{p^{\beta_n}}),$$

причём выполняются неравенства

$$\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n; \quad \alpha_1 - \beta_1 < \alpha_2 - \beta_2 < \dots < \alpha_n - \beta_n.$$

Определяющие соотношения фактор-группы G/H имеют вид:

$$a_1^{p^{\beta_1}} \cdot \dots \cdot a_n^{p^{\beta_n}} H = H$$

$$a_i^{p^{\alpha_i}} H = H \quad (i = 1, \dots, n),$$

поэтому, согласно лемме 2, инварианты фактор-группы G/H получаются приведением элементарными преобразованиями к диагональному виду матрицы

$$\begin{pmatrix} p^{\beta_n} & 0 & \dots & 0 & p^{\alpha_n} \\ p^{\beta_{n-1}} & 0 & \dots & p^{\alpha_{n-1}} & 0 \\ \vdots & & & & \\ p^{\beta_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p^{\beta_1} & p^{\alpha_1} & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & p^{\alpha_{n-1} - \beta_{n-1} + \beta_n} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & p^{\alpha_{n-2} - \beta_{n-2} + \beta_{n-1}} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & p^{\alpha_1 - \beta_1 + \beta_2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ p^{\beta_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то есть инварианты фактор-группы G/H :

$$(6) \quad p^{\beta_1}, p^{x_1-\beta_1+\beta_2}, \dots, p^{x_{n-1}-\beta_{n-1}+\beta_n}.$$

Покажем, что фактор-группа G/H порождается смежными классами

$$(7) \quad \begin{aligned} \bar{b}_1 &= \bar{a}_1 H = (a_1 a_2^{p^{\beta_2}-\beta_1} \cdot \dots \cdot a_n^{p^{\beta_n}-\beta_1}) H, \\ \bar{b}_2 &= \bar{a}_2 H = (a_2 \cdot a_3^{p^{\beta_3}-\beta_2} \cdot \dots \cdot a_n^{p^{\beta_n}-\beta_2}) H, \\ &\vdots \\ \bar{b}_{n-1} &= \bar{a}_{n-1} H = (a_{n-1} \cdot a_n^{p^{\beta_n}-\beta_{n-1}}) H, \\ \bar{b}_n &= \bar{a}_n H = a_n H. \end{aligned}$$

Порядок смежного класса $\bar{b}_i$ равен $p^{x_{i-1}-\beta_{i-1}+\beta_i}$ ($i=2, \dots, n$), так как

$$\begin{aligned} (\bar{a}_i)^{p^{x_{i-1}-\beta_{i-1}+\beta_i}} &= (a_i \cdot a_{i+1}^{p^{\beta_{i+1}}-\beta_i} \cdot \dots \cdot a_n^{p^{\beta_n}-\beta_i})^{p^{x_{i-1}-\beta_{i-1}+\beta_i}} = \\ &= a_i^{p^{x_{i-1}-\beta_{i-1}+\beta_i}} \cdot a_{i+1}^{p^{x_{i-1}-\beta_{i-1}+\beta_{i+1}}} \cdot \dots \cdot a_n^{p^{x_{i-1}-\beta_{i-1}+\beta_n}} = \\ &= (a_1^{p^{\beta_1}} \cdot \dots \cdot a_{i-1}^{p^{\beta_{i-1}}} \cdot a_i^{p^{\beta_i}} \cdot \dots \cdot a_n^{p^{\beta_n}})^{p^{x_{i-1}-\beta_{i-1}}} \in H, \end{aligned}$$

ибо $(a_1^{p^{\beta_1}} \cdot \dots \cdot a_{i-1}^{p^{\beta_{i-1}}})^{p^{x_{i-1}-\beta_{i-1}}} = 1$, но меньшая степень элемента $\bar{a}_i$ не попадает в H . Точно так же можно показать, что порядок элемента $\bar{b}_1$ равен p^{β_1} :

$$\bar{a}_1^{p^{\beta_1}} = (a_1 \cdot a_2^{p^{\beta_2}-\beta_1} \cdot \dots \cdot a_n^{p^{\beta_n}-\beta_1})^{p^{\beta_1}} = a_1^{p^{\beta_1}} \cdot \dots \cdot a_n^{p^{\beta_n}} \in H,$$

но меньшая степень элемента $\bar{a}_1$ не лежит в подгруппе H .

Покажем теперь, что любой смежный класс gH выражается через систему смежных классов (7). Пусть

$$g = a_1^{\gamma_1} \cdot a_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot a_n^{\gamma_n},$$

и рассмотрим смежный класс gH . Так как

$$a_1 H = \bar{b}_1 \cdot \bar{b}_2^{-p^{\beta_2}-\beta_1}; \dots; a_{n-1} H = \bar{b}_{n-1} \cdot \bar{b}_n^{-p^{\beta_n}-\beta_{n-1}}; a_n H = \bar{b}_n,$$

то также имеет место

$$a_1^{\gamma_1} H = \bar{b}_1^{\gamma_1} \cdot \bar{b}_2^{-\gamma_1 p^{\beta_2}-\beta_1}; \dots; a_{n-1}^{\gamma_{n-1}} H = \bar{b}_{n-1}^{\gamma_{n-1}} \cdot \bar{b}_n^{-\gamma_{n-1} p^{\beta_n}-\beta_{n-1}}; a_n^{\gamma_n} H = \bar{b}_n^{\gamma_n}.$$

Следовательно,

$$(8) \quad gH = \bar{b}_1^{\gamma_1} \cdot \bar{b}_2^{\gamma_2 - \gamma_1 p^{\beta_2}-\beta_1} \cdot \dots \cdot \bar{b}_i^{\gamma_i - \gamma_{i-1} p^{\beta_i}-\beta_{i-1}} \cdot \dots \cdot \bar{b}_n^{\gamma_n - \gamma_{n-1} p^{\beta_n}-\beta_{n-1}}.$$

Если известны инварианты фактор-группы G/H , то по формуле (6) последовательно можно найти числа $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, и этим самым пара (G, H) определяется с точностью до изоморфизма пар. Наоборот, если задана пара (G, H) инвариантами группы G и числами $\beta_1, \dots, \beta_n$, то по формулам (7) и (8) каждый смежный класс gH взаимно однозначно определяется числами $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, которые по формуле (8) находятся последовательно. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть G —прямое произведение конечного числа циклических p -групп, H —циклическая подгруппа группы G . Тогда пара (G, H) определяется с точностью до изоморфизма пар инвариантами группы G и фактор-группы G/H .

Доказательство. Пусть

$$G = (a_1) \times (a_2) \times \dots \times (a_n),$$

где $a_i^{p^{\alpha_i}} = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Для удобства предположим, что $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$. Очевидно, группа G разлагается в прямое произведение своих подгрупп

$$G = G_1 \times G_2$$

так, что (G_1, H) -неразложимая пара. Пусть

$$G_1 = (a_{i_1}) \times \dots \times (a_{i_s}).$$

Используя лемму 1, мы предполагаем, что базис $\{a_i\}$ группы G выбран так, что подгруппа H имеет вид

$$H = (a_{i_1}^{p^{\beta_{i_1}}} \cdot \dots \cdot a_{i_s}^{p^{\beta_{i_s}}}),$$

причём выполняются неравенства

$$\alpha_{i_1} < \alpha_{i_2} < \dots < \alpha_{i_s},$$

$$\beta_{i_1} < \beta_{i_2} < \dots < \beta_{i_s},$$

$$\alpha_{i_1} - \beta_{i_1} < \alpha_{i_2} - \beta_{i_2} < \dots < \alpha_{i_s} - \beta_{i_s}.$$

Так как $H \subset G_1$, то имеет место прямое разложение

$$G/H \cong G_1/H \times G_2.$$

Ясно, что система инвариантов фактор-группы G/H получается объединением инвариантов фактор-группы G_1/H и группы G_2 . Покажем, что инварианты группы G и фактор-группы G/H определяют пару (G, H) с точностью до изоморфизма пар.

Пусть дана система инвариантов группы G : $p^{\alpha_1}, p^{\alpha_2}, \dots, p^{\alpha_n}$, причём $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$, и система инвариантов $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$ фактор-группы G/H . Так как (G_1, H) —неразложимая пара, то, согласно формуле (6), инварианты фактор-группы G_1/H имеют вид

$$p^{\beta_{i_1}}, p^{\beta_{i_2} + (\alpha_{i_1} - \beta_{i_1})}, \dots, p^{\beta_{i_s} + (\alpha_{i_{s-1}} - \beta_{i_{s-1}})}.$$

Будем искать инварианты фактор-группы G_1/H в таком виде среди инвариантов $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$ фактор-группы G/H . Расположим инварианты δ_i в порядке возрастания. Пусть δ_{r_1} —первый в этом ряду инвариант, который либо не совпадает ни с одним из инвариантов группы G , либо входит в систему инвариантов фактор-группы G/H с большей кратностью, чем в систему $\{p^{\alpha_i}\}$. Покажем, что тогда δ_{r_1} совпадает с наименьшим из инвариантов фактор-группы G_1/H .

Действительно, в первом случае (если не совпадает ни с одним из инвариантов группы G) он не является инвариантом группы G_2 , значит инвариант фактор-группы G_1/H . Во втором случае δ_{r_1} хотя бы один раз входит в систему инвариантов фактор-группы G_1/H , так как в систему инвариантов подгруппы G_2 он не может входить с большей кратностью, чем в систему $\{p^{x_i}\}$. Осталось заметить, что такое δ_{r_1} найдётся, так как в противном случае совпадали бы инварианты группы G и фактор-группы G/H .

После этого в подсистеме $\delta_{r_1+1}, \dots, \delta_m$ найдём такое $\delta_{r_2} (> \delta_{r_1})$, которое наименьшее из всех δ_i ($i > r_1 + 1$), которые либо не совпадают ни с одним из инвариантов p^{x_i} , либо входят в систему $\{\delta_\mu\}$ с большей кратностью, чем в систему $\{p^{x_i}\}$. Число δ_{r_2} является инвариантом фактор-группы G_1/H . Итд. После конечного числа шагов определяются все числа

$$(9) \quad \delta_{r_1} = p^{\beta_{i_1}}, \delta_{r_2} = p^{\beta_{i_2} + (\alpha_{i_1} - \beta_{i_1})}, \dots, \delta_{r_s} = p^{\beta_{i_s} + (\alpha_{i_{s-1}} - \beta_{i_{s-1}})}.$$

Так как все инварианты фактор-группы G/H , которые не входят в систему (9), являются инвариантами подгруппы G_2 , то инварианты $p^{x_{i_1}}, \dots, p^{x_{i_s}}$ подгруппы G_1 получаются из системы инвариантов группы G путём выбрасывания из $\{p^{x_i}\}$ инвариантов подгруппы G_2 (которые определяются в виде $\{\delta_1, \dots, \delta_m\} \setminus \{\delta_{r_1}, \dots, \delta_{r_s}\}$).

Так найденные инварианты расположим в порядке возрастания

$$p^{x_{i_1}} < p^{x_{i_2}} < \dots < p^{x_{i_s}}$$

и числа α_i , последовательно определяют показатели $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_s}$ по формуле (9) однозначно. Последние определяют пару (G_1, H) с точностью до изоморфизма пар. Значит числа $p^{\beta_{i_1}}, \dots, p^{\beta_{i_s}}$ вместе с инвариантами подгруппы G_2 определяют пару (G, H) с точностью до изоморфизма пар. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть G —произвольная конечная абелева группа, H —циклическая подгруппа группы G . Тогда инварианты группы G и фактор-группы G/H с точностью до изоморфизма пар определяют пару (G, H) .

Доказательство. Конечная абелева группа однозначно разлагается в прямое произведение примарных подгрупп:

$$G = G_{p_1} \times G_{p_2} \times \dots \times G_{p_s},$$

где $p_1, \dots, p_s$ различные простые числа. Каждая примарная подгруппа G_{p_i} разлагается в прямое произведение циклических p_i -групп, порядки которых определяются однозначно. Циклическая подгруппа $H \subseteq G$ разлагается в прямое произведение

$$H = H_1 \times \dots \times H_s,$$

где $H_i \subseteq G_{p_i}$ ($i = 1, 2, \dots, s$), причём

$$G/H \cong G_{p_1}/H_1 \times \dots \times G_{p_s}/H_s.$$

Инварианты фактор-группы G/H получаются объединением инвариантов фактор-групп G_{p_i}/H_i ($i=1, 2, \dots, s$). Так как инварианты фактор-группы G_{p_i}/H_i являются степенями простого числа p_i , то из инвариантов фактор-группы G/H однозначно можно выделить инварианты фактор-группы G_{p_i}/H_i для каждого i ($i=1, 2, \dots, s$). По теореме 2, пара (G_{p_i}, H_i) определяется с точностью до изоморфизма пар инвариантами группы G_{p_i} и фактор-группы G_{p_i}/H_i , поэтому инварианты всех подгрупп G_{p_i} и фактор-групп G_{p_i}/H_i в совокупности определяют пару (G, H) с точностью до изоморфизма пар. Теорема доказана.

Литература

- [1] М. Холл, Теория групп, *Изд. Иностран. Лит.*, 1962.
- [2] А. Г. Курош, Теория групп, *Изд. Наука*, 1967.
- [3] С. Д. Берман—З. П. Жилинская, О вложении подмодулей в конечнопорождённый модуль над кольцом главных идеалов, XI. Всесоюзный алгебраический коллоквиум, *Резюме сообщений и докладов, Кишинёв* (1971), 117—118.
- [4] С. Д. Берман—З. П. Жилинская, О совместных прямых разложениях конечнопорождённой абелевой группы и её подгруппы, *Докл. АН СССР*, **210**, (1973), 1004—1007.

(Поступила: 4. IX. 1978)