

Цепи маркова с ограниченными снизу скачками и однородной второй компонентой

Л. ЛАКАТОШ (Будапешт)

1. В настоящей работе рассматривается неоднородная цепь Маркова ξ_t с фазовым пространством $\{0, 1, 2, \dots\}$ и присоединенной однородной второй компонентой. Возможные изменения состояний цепи могут быть двух типов: увеличения (положительные скачки) любого размера и уменьшения (отрицательные скачки), ограниченные некоторой константой c . К первой компоненте присоединим вторую компоненту, однородную во времени. Марковские процессы, однородные по второй компоненте, были введены и изучены И. И. Ежовым и А. В. Скороходом в [1] и [2]. Подобная система без присоединенной компоненты была рассмотрена в диссертационной работе М. Ф. Таирова [4], там состояния цепи Маркова интерпретировались как количество требований в марковской системе обслуживания с неординарным поступлением и групповым обслуживанием ограниченного размера. Аналогичная задача при условии, что отрицательные скачки равны единице, была решена в диссертационной работе И. Д. Олийныка [3].

2. Введем случайный процесс α_t , $t \geq 0$ с возможными значениями $1, 2, \dots$ и интенсивностями изменений $a_r(t)$, $r=1, 2, \dots$. Это означает, что если α_t -значение процесса в момент t , то α_t , $t \geq 0$ -процесс с независимыми приращениями и

$$(1) \quad M\Theta^{\alpha_s - \alpha_t} = \exp \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} (\Theta^r - 1) \int_t^s a_r(u) du \right\}, \quad |\Theta| \leq 1.$$

Предполагается, что если в момент t , $\alpha_t = k$, то, независимо от всего, что было до t в системе на интервале $[t, t+\Delta]$, $\Delta \rightarrow 0$, возможен отрицательный скачок, значение которого имеет то же распределение, что и

$$\min \{k, \beta_t - \beta_{t+\Delta}\},$$

где β_t — не зависящий от α_t -процесс с независимыми приращениями и характеристической функцией

$$(2) \quad M\Theta^{\beta_s - \beta_t} = \exp \left\{ \sum_{r=1}^c (\Theta^{-r} - 1) \int_t^s a_{-r}(u) du \right\}, \quad |\Theta| \leq 1,$$

(c -некоторое фиксированное натуральное число). Это означает, что если $k \geq c$ (некоторое фиксированное натуральное число). Это

$k \geq c$, то

$$\min \{k, \beta_t - \beta_{t+\Delta}\}$$

с точностью до $o(\Delta)$ имеет то же распределение, что и $\beta_t - \beta_{t+\Delta}$, т. е.

$$(3) \quad P\{\min(k, \beta_t - \beta_{t+\Delta}) = r\} = a_{-r}(t)\Delta + o(\Delta), \quad r = 1, 2, \dots, c.$$

Если же $0 < k < c$, то

$$(4) \quad P\{\min(k, \beta_t - \beta_{t+\Delta}) = r\} = \begin{cases} a_{-r}(t)\Delta + o(\Delta), & 0 < r < k, \\ \Delta \sum_{l=k}^c a_{-l}(t) + o(\Delta), & r = k. \end{cases}$$

Итак, дополнительно мы еще ввели совокупность независимых между собой и не зависящих от α_t процессов с независимыми приращениями

$$\beta_t(0), \beta_t(1), \beta_t(2), \dots, \beta_t(c-1)$$

с характеристическими функциями

$$(5) \quad M\Theta^{\beta_s(k) - \beta_t(k)} = \exp \left\{ \sum_{m=1}^{k-1} (\Theta^{-m} - 1) \int_t^s a_{-m}(u) du + (\Theta^{-k} - 1) \sum_{j=k}^c \int_t^s a_{-j}(u) du \right\}.$$

Очевидно,

$$\beta_t(c) = \beta_t(c+1) = \beta_t(c+2) = \dots = \beta_t.$$

Предположим, что для всех t

$$\sum_{\substack{r=-c \\ r \neq 0}}^{\infty} a_r(t) = -a_0(t) < +\infty,$$

и все $a_r(t)$, $r \geq -c$ непрерывны на $(0, \infty)$. Пусть

$$\xi_t = \alpha_t - \beta_t(k), \quad k = 0, 1, \dots, c-1.$$

Из сказанного выше следует, что ξ_t , $t \geq 0$ — целочисленная цепь Маркова, переходные вероятности которой на малом интервале $[t, t+\Delta]$ имеют вид:

$$(6) \quad k \xrightarrow{[t, t+\Delta]} \begin{cases} k+r, & \text{с вероятностью } a_r(t)\Delta + o(\Delta), \quad r \neq 0, \quad k+r > 0, \quad r \geq -c, \\ 0, & \text{с вероятностью } \Delta \sum_{l=k}^c a_{-l}(t) + o(\Delta), \quad 0 < k \leq c. \end{cases}$$

Определяем процесс

$$\xi_t^* = \alpha_t - \beta_t, \quad t \geq 0,$$

с характеристической функцией

$$\begin{aligned} M\Theta^{\xi_s^* - \xi_t^*} &= M\Theta^{\alpha_s - \alpha_t} \cdot M\Theta^{\beta_s - \beta_t} = \\ &= \exp \left\{ \sum_{m=-c}^{\infty} (\Theta^m - 1) \int_t^s a_m(u) du \right\}, \quad |\Theta| \leq 1, \end{aligned}$$

и присоединим к ξ_t^* компоненту ε_t со значениями из конечномерного арифметического пространства $\mathbf{R}$ таким образом, чтобы

$$\bar{\xi}_t^* = \{\xi_t^*, \varepsilon_t\}$$

был процессом с независимыми приращениями со значениями в $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \times \mathbf{R}$.

Будем предполагать, что кумулянта этого процесса непрерывно дифференцируема по t .

$$(7) \quad M\Theta^{\zeta_s^* - \zeta_t^*} e^{i(z, \varepsilon_s - \varepsilon_t)} = \exp \left\{ \int_t^s a^{(z)}(u, \Theta) du \right\},$$

где

$$a^{(z)}(t, \Theta) = a_0(t) + \varepsilon_0(t) + \sum_{\substack{r=-c \\ r \neq 0}}^{\infty} \Theta^r a_r(t) \varepsilon_r^{(z)}(t),$$

и (для каждого фиксированного t) $\varepsilon_0^{(z)}(t)$ — кумулянта безгранично делимого распределения в $\mathbf{R}$, а $\varepsilon_r^{(z)}(t)$ ($r \neq 0$) — характеристические функции некоторых распределений в $\mathbf{R}$.

Вероятностный смысл $\varepsilon_r^{(z)}(t)$ следующий:

$$M(e^{i(z, \varepsilon_s - \varepsilon_t)} | \zeta_u^* = \text{const}, u \in [t, s]) = \exp \left\{ \int_t^s \varepsilon_0^{(z)}(u) du \right\},$$

$$M(e^{i(z, \varepsilon_{t+0} - \varepsilon_{t-0})} | \zeta_{t+0}^* - \zeta_{t-0}^* = r) = \varepsilon_r^{(z)}(t), \quad r \neq 0.$$

Очевидно,

$$\varrho_r^{(z)}(t, s) = M(e^{i(z, \varepsilon_s - \varepsilon_t)}, \zeta_s^* - \zeta_t^* = r) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\Theta|=1} \exp \left\{ \int_t^s a^{(z)}(u, \Theta) du \right\} \frac{d\Theta}{\Theta^{r+1}}.$$

Можно аналогично ввести и процесс $\vec{\zeta}_t = \{\zeta_t, \varepsilon_t\}$, который принимает значения в $\{0, 1, 2, \dots\} \times \mathbf{R}$; в связи с этим подчеркиваем одну особенность нашей системы. Она состоит в том, что если осуществляется переход из k -го состояния в нулевое ($k=1, 2, \dots, c-1$), то вероятность такого события равна $\Delta \sum_{l=k}^c a_{-l}(t) + o(\Delta)$, и так параметры $a_{-l}(t)$ нужно суммировать. Однако присоединенная вторая компонента зависит лишь от величины отрицательного скачка, так что в таком случае вместо $\sum_{l=k}^c a_{-l}(t) \varepsilon_{-l}^{(z)}(t)$, данной в (7), мы должны положить $\varepsilon_{-k}^{(z)}(t) \sum_{l=k}^c a_{-l}(t)$. Такая ситуация имеет место лишь в случае перехода в нулевое состояние, во всех остальных случаях мы должны пользоваться выражением, определенным по (7).

3. Выведем прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей процесса $\vec{\zeta}_t = \{\zeta_t, \varepsilon_t\}$

$$P_{kr}(t, s, A) = P\{\zeta_s = r, \varepsilon_s - \varepsilon_t \in A | \zeta_t = k\},$$

где A — множество возможных значений присоединенной компоненты.

Положим

$$P_{kr}^{(z)}(t, s) = \int_{\mathbf{R}} e^{i(z, x)} P_{kr}(t, s, dx)$$

и займемся нахождением $P_{kr}^{(z)}(t, s)$. Пусть $\Delta \rightarrow 0$. Тогда имеем

$$(8) \quad P_{k0}^{(z)}(t, s + \Delta) = P_{k0}^{(z)}(t, s) \left\{ 1 + \Delta \left[\sum_{j=0}^c a_{-j}(s) + \varepsilon_0^{(z)}(s) \right] + o(\Delta) \right\} + \\ + \Delta \sum_{l=1}^c P_{kl}^{(z)}(t, s) \varepsilon_{-l}^{(z)}(s) \sum_{j=l}^c a_{-j}(s) + o(\Delta),$$

$$(9) \quad P_{kr}^{(z)}(t, s + \Delta) = P_{kr}^{(z)}(t, s) \{ 1 + \Delta [a_0(s) + \varepsilon_0^{(z)}(s)] + o(\Delta) \} + \\ + \Delta \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq r}}^{r+c} P_{kl}^{(z)}(t, s) a_{r-l}(s) \varepsilon_{r-l}^{(z)}(s) + o(\Delta), \quad r \geq 1.$$

Для обоснования, например, (8) достаточно его записать в форме

$$P_{k0}(t, s + \Delta, dy) = \\ = \int_{\mathbb{R}} P_{k0}(t, s, dx) \left\{ 1 + \Delta \sum_{j=0}^c a_{-j}(s) + o(\Delta) \right\} P\{\varepsilon_{s+\Delta} - \varepsilon_s + x \in dy | \zeta_{s+\Delta} - \zeta_s = \text{const}\} + \\ + \Delta \sum_{l=1}^c \int_{\mathbb{R}} P_{kl}(t, s, dx) \sum_{j=l}^c a_{-j}(s) P\{\varepsilon_{s+\Delta} - \varepsilon_s + x \in dy | \zeta_{s+\Delta} - \zeta_s = -l\} + o(\Delta)$$

и перейти к преобразованию Фурье в обеих частях равенства по y .

На основании (8) и (9) получаем

$$(10) \quad \frac{\partial P_{k0}^{(z)}(t, s)}{\partial s} = P_{k0}^{(z)}(t, s) \left[\varepsilon_0^{(z)}(s) + \sum_{j=0}^c a_{-j}(s) \right] + \sum_{l=1}^c P_{kl}^{(z)}(t, s) \varepsilon_{-l}^{(z)}(s) \sum_{j=l}^c a_{-j}(s),$$

$$(11) \quad \frac{\partial P_{kr}^{(z)}(t, s)}{\partial s} = P_{kr}^{(z)}(t, s) [a_0(s) + \varepsilon_0^{(z)}(s)] + \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq r}}^{r+c} P_{kl}^{(z)}(t, s) a_{r-l}(s) \varepsilon_{r-l}^{(z)}(s), \quad r \geq 1.$$

Преобразуем второе слагаемое в правой части последнего уравнения:

$$(12) \quad \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq r}}^{r+c} P_{kl}^{(z)}(t, s) a_{r-l}(s) \varepsilon_{r-l}^{(z)}(s) = \\ = \sum_{l=0}^{r-1} P_{kl}^{(z)}(t, s) a_{r-l}(s) \varepsilon_{r-l}^{(z)}(s) + \sum_{j=1}^c P_{k, r+j}^{(z)}(t, s) a_{-j}(s) \varepsilon_{-j}^{(z)}(s) = \\ = \sum_{j=1}^c P_{k, r+j}^{(z)}(t, s) a_{-j}(s) \varepsilon_{-j}^{(z)}(s) + P_{k0}^{(z)}(t, s) a_r(s) \varepsilon_r^{(z)}(s) + \\ + \sum_{l=1}^r P_{kl}^{(z)}(t, s) a_{r-l}(s) \varepsilon_{r-l}^{(z)}(s) - P_{kr}^{(z)}(t, s) [a_0(s) + \varepsilon_0^{(z)}(s)].$$

Здесь для простоты положили $a_0(s) + \varepsilon_0^{(z)}(s) = a_0(s) \varepsilon_0^{(z)}(s)$. Выведем уравнение

для производящей функции

$$(13) \quad P_k^{(z)}(t, s, \Theta) = \sum_{r=0}^{\infty} P_{kr}^{(z)}(t, s) \Theta^r.$$

Умножив (11) на Θ^r , суммируя по r и используя (12), получаем

$$(14) \quad \begin{aligned} & \sum_{r=1}^{\infty} \Theta^r \sum_{j=1}^c P_{k, r+j}^{(z)}(t, s) a_{-j}(s) \varepsilon_{-j}^{(z)}(s) = \\ & = \sum_{j=1}^c a_{-j}(s) \varepsilon_{-j}^{(z)}(s) \Theta^{-j} \sum_{r=1}^{\infty} P_{kr}^{(z)}(t, s) \Theta^r - \sum_{j=1}^c a_{-j}(s) \varepsilon_{-j}^{(z)}(s) \sum_{l=1}^j P_{kl}^{(z)}(t, s) \Theta^{l-j}; \\ & \sum_{r=1}^{\infty} \Theta^r \sum_{l=1}^r P_{kl}^{(z)}(t, s) a_{r-l}(s) \varepsilon_{r-l}^{(z)}(s) = \sum_{r=1}^{\infty} P_{kr}^{(z)}(t, s) \Theta^r \sum_{l=0}^{\infty} a_l(s) \varepsilon_l^{(z)}(s) \Theta^l. \end{aligned}$$

На основании (11) с использованием (14) имеем

$$(15) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial P_k^{(z)}(t, s, \Theta)}{\partial s} - \frac{\partial P_{k0}^{(z)}(t, s)}{\partial s} = P_{k0}^{(z)}(t, s) \sum_{r=1}^{\infty} a_r(s) \varepsilon_r^{(z)}(s) + \\ & + \sum_{r=1}^{\infty} P_{kr}^{(z)}(t, s) \Theta^r \sum_{l=0}^{\infty} a_l(s) \varepsilon_l^{(z)}(s) \Theta^l + \sum_{r=1}^{\infty} P_{kr}^{(z)}(t, s) \Theta^r \sum_{j=1}^c a_{-j}(s) \varepsilon_{-j}^{(z)}(s) \Theta^{-j} - \\ & - \sum_{j=1}^c a_{-j}(s) \varepsilon_{-j}^{(z)}(s) \sum_{l=1}^j P_{kl}^{(z)}(t, s) \Theta^{l-j} = \\ & = P_{k0}^{(z)}(t, s) \sum_{r=1}^{\infty} a_r(s) \varepsilon_r^{(z)}(s) \Theta^r + a^{(z)}(s, \Theta) \sum_{r=1}^{\infty} P_{kr}^{(z)}(t, s) \Theta^r - \\ & - \sum_{j=1}^c a_{-j}(s) \varepsilon_{-j}^{(z)}(s) \sum_{l=1}^j P_{kl}^{(z)}(t, s) \Theta^{l-j}. \end{aligned}$$

Из (15)

$$(16) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial P_k^{(z)}(t, s, \Theta)}{\partial s} - \frac{\partial P_{k0}^{(z)}(t, s)}{\partial s} = P_k^{(z)}(t, s, \Theta) a^{(z)}(s, \Theta) - \\ & - P_{k0}^{(z)}(t, s) \sum_{r=0}^c a_{-r}(s) \varepsilon_{-r}^{(z)}(s) \Theta^{-r} - \sum_{j=1}^c a_{-j}(s) \varepsilon_{-j}^{(z)}(s) \sum_{l=1}^j P_{kl}^{(z)}(t, s) \Theta^{l-j}. \end{aligned}$$

Сложив (10) и (16), и используя равенства

$$\begin{aligned}
 P_{k0}(t, s) \left[\varepsilon_0^{(z)}(s) + \sum_{j=0}^c a_{-j}(s) \right] - P_{k0}^{(z)}(t, s) \sum_{r=0}^c a_{-r}(s) \varepsilon_{-r}^{(z)}(s) \Theta^{-r} = \\
 = P_{k0}^{(z)}(t, s) \sum_{j=1}^c a_{-j}(s) [1 - \varepsilon_{-j}^{(z)}(s) \Theta^{-j}], \\
 \sum_{l=1}^c P_{kl}^{(z)}(t, s) \varepsilon_{-l}^{(z)}(s) \sum_{j=l}^c a_{-j}(s) - \sum_{l=1}^c P_{kl}^{(z)}(t, s) \sum_{j=l}^c a_{-j}(s) \varepsilon_{-j}^{(z)}(s) \Theta^{l-j} = \\
 = \sum_{l=1}^c P_{kl}^{(z)}(t, s) \sum_{j=l}^c a_{-j}(s) \{ \varepsilon_{-l}^{(z)}(s) - \varepsilon_{-j}^{(z)}(s) \Theta^{l-j} \} = \\
 = \sum_{l=1}^{c-1} P_{kl}^{(z)}(t, s) \sum_{j=l+1}^c a_{-j}(s) \{ \varepsilon_{-l}^{(z)}(s) - \varepsilon_{-j}^{(z)}(s) \Theta^{l-j} \},
 \end{aligned}$$

окончательно получаем

$$\begin{aligned}
 (17) \quad \frac{\partial P_k^{(z)}(t, s, \Theta)}{\partial s} = P_k^{(z)}(t, s, \Theta) a^{(j)}(s, \Theta) + P_{k0}^{(z)}(t, s) \sum_{j=1}^c a_{-j}(s) [1 - \varepsilon_{-j}^{(z)}(s) \Theta^{-j}] + \\
 + \sum_{l=1}^{c-1} P_{kl}^{(z)}(t, s) \sum_{j=l+1}^c a_{-j}(s) \{ \varepsilon_{-l}^{(z)}(s) - \varepsilon_{-j}^{(z)}(s) \Theta^{l-j} \}.
 \end{aligned}$$

(17) представляет собой линейное дифференциальное уравнение по отношению к $P_k^{(z)}(t, s, \Theta)$, и так

$$\begin{aligned}
 (18) \quad P_k^{(z)}(t, s, \Theta) = \Theta^k \exp \left\{ \int_t^s a^{(z)}(u, \Theta) du \right\} + \\
 + \int_t^s P_{k0}^{(z)}(t, u) \sum_{j=1}^c a_{-j}(u) (1 - \varepsilon_{-j}^{(z)}(u) \Theta^{-j}) \exp \left\{ \int_u^s a^{(z)}(r, \Theta) dr \right\} du + \\
 + \sum_{l=1}^{c-1} \int_t^s P_{kl}^{(z)}(t, u) \sum_{j=l+1}^c a_{-j}(u) \{ \varepsilon_{-l}^{(z)}(u) - \varepsilon_{-j}^{(z)}(u) \Theta^{l-j} \} \exp \left\{ \int_u^s a^{(z)}(r, \Theta) dr \right\} du.
 \end{aligned}$$

Полагая

$$\exp \left\{ \int_t^s a^{(z)}(u, \Theta) du \right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varrho_m^{(z)}(t, s) \Theta^m,$$

то, приравнявая в (18) коэффициенты при Θ^r , получаем

$$\begin{aligned}
 P_{kr}^{(z)}(t, s) = \varrho_{r-k}^{(z)}(t, s) + \int_t^s P_{k0}^{(z)}(t, u) \sum_{j=1}^c a_{-j}(u) \{ \varrho_r^{(z)}(u, s) - \varepsilon_{-j}^{(z)}(u) \varrho_{r+j}^{(z)}(u, s) \} du + \\
 + \sum_{l=1}^{c-1} \int_t^s P_{kl}^{(z)}(t, u) \sum_{j=l+1}^c a_{-j}(u) \{ \varepsilon_{-l}^{(z)}(u) \varrho_r^{(z)}(u, s) - \varepsilon_{-j}^{(z)}(u) \varrho_{r-l+j}^{(z)}(u, s) \} du.
 \end{aligned}$$

Таким образом доказана

Теорема. Если $\tilde{\xi}_t^* = \{\xi_t^*, \varepsilon_t\}$ является процессом с независимыми приращениями с присоединенной однородной второй компонентой и характеристической

функцией

$$M\Theta^{\xi_s^* - \xi_t^*} e^{i(z, \varepsilon_s - \varepsilon_t)} = \exp \left\{ \int_t^s a^{(z)}(u, \Theta) du \right\},$$

где

$$a^{(z)}(t, \Theta) = a_0(t) + \varepsilon_0^{(z)}(t) + \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq 0}}^{\infty} a_r(t) \varepsilon_r^{(z)}(t) \Theta^r,$$

и $\varrho_m^{(z)}(t, s)$ является коэффициентом при Θ^m в разложении $\exp \left\{ \int_t^s a^{(z)}(u, \Theta) du \right\}$, далее

$$\pi_{0r}^{(z)}(t, s) = \sum_{j=1}^c a_{-j}(t) \{ \varrho_r^{(z)}(t, s) - \varepsilon_{-j}^{(z)}(t) \varrho_{r+j}^{(z)}(t, s) \},$$

$$\pi_{lr}^{(z)}(t, s) = \sum_{j=l+1}^c a_{-j}(t) \{ \varepsilon_{-l}^{(z)}(t) \varrho_r^{(z)}(t, s) - \varepsilon_{-j}^{(z)}(t) \varrho_{r-l+j}^{(z)}(t, s) \},$$

$$(1 \leq l < c, r \geq 0),$$

то для процесса $\vec{\xi}_t = \{\xi_t, \varepsilon_t\}$

$$(20) \quad P_{kr}^{(z)}(t, s) = \varrho_{r-k}^{(z)}(t, s) + \sum_{l=0}^{c-1} \int_t^s P_{kl}^{(z)}(t, u) \pi_{lr}^{(z)}(u, s) du.$$

Из (20) следует, что при каждом фиксированном k все $P_{kr}^{(z)}(t, s)$ выражаются через координаты вектора

$$\vec{P}_k^{(z)}(t, s) = \{P_{k0}^{(z)}(t, s), \dots, P_{k,c-1}^{(z)}(t, s)\}.$$

Положим

$$\vec{\varrho}_k^{(z)}(t, s) = \{\varrho_{-k}^{(z)}(t, s), \dots, \varrho_{c-1-k}^{(z)}(t, s)\},$$

$$\Pi(t, s) = \|\pi_{lr}^{(z)}(t, s), 0 \leq l, r < c\|.$$

Согласно (20)

$$\vec{P}_k^{(z)}(t, s) = \vec{\varrho}_k^{(z)}(t, s) + \int_t^s \vec{P}_k^{(z)}(t, u) \Pi(u, s) du$$

и, стало быть,

$$(21) \quad \vec{P}_k^{(z)}(t, s) = \int_t^s \vec{\varrho}_k^{(z)}(t, u) R(\Pi, u, s) du,$$

где $R(\Pi, t, s)$ — квазирезольвента матрицы $\Pi(t, s)$. Положим

$$\|\Pi(t, s)\| = \max_{t \leq u \leq r \leq s} \max_{l, r} |\pi_{lr}^{(z)}(u, r)|,$$

тогда выполняется соотношение

$$\|\Pi(t, s)\| \leq a_{-}(t, s) = \max_{[t, s]} \sum_{j=1}^c a_{-j}(u),$$

которое является следствием неравенства

$$|\varepsilon_{-j}^{(z)}(u)| \leq 1, \quad 1 \leq j \leq c, \quad u \in [t, s].$$

Поэтому каждая координата вектора

$$\int_t^s \tilde{q}_k^{(z)}(t, u) \Pi^{m^0}(u, s) du$$

(m^0 означает, что речь идет об m -ом итерированном ядре) не превосходит по модулю

$$\frac{[c(s-t)a_-(t, s)]^m}{m!},$$

откуда следует, что если

$$\tilde{q}_{kn}^{(z)}(t, s) = \sum_{m \geq n} \int_t^s \tilde{q}_k^{(z)}(t, u) \Pi^{m^0}(u, s) du,$$

то каждая координата вектора $\tilde{q}_{kn}^{(z)}(t, s)$ не превосходит по модулю

$$\sum_{m \geq n} \frac{[c(s-t)a_-(t, s)]^m}{m!} < \exp \{c(s-t)a_-(t, s)\} \frac{[c(s-t)a_-(t, s)]^n}{n!} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, приведенная в п. 3 [4] теорема для рассмотренной системы формулируется следующим образом: Вектор $\tilde{P}_k^{(z)}(t, s) = \{P_{kj}^{(z)}(t, s), 0 \leq j < c\}$, координаты которого фигурируют в правой части (20), равен (21). Если $n > 1$, то

$$\tilde{P}_k^{(z)}(t, s) = \tilde{q}_k^{(z)}(t, s) + \sum_{m=1}^{n-1} \int_t^s \tilde{q}_k^{(z)}(t, u) \Pi^{m^0}(u, s) du + \tilde{q}_{kn}^{(z)}(t, s),$$

причем если

$$\tilde{q}_{kn}^{(z)}(t, s) = \{q_{knj}^{(z)}(t, s), 0 \leq j < c\},$$

то

$$\max_{0 \leq j < c} |q_{knj}^{(z)}(t, s)| < \exp \{c(s-t)a_-(t, s)\} \frac{[c(s-t)a_-(t, s)]^n}{n!}.$$

Автор выражает искреннюю благодарность И. И. Ежову за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

- [1] И. И. Ежов, Исследования по теории случайных процессов с дискретной компонентой, *докторская диссертация, Киев, 1967*.
- [2] И. И. Ежов, А. В. Скороход, Марковские процессы, однородные по второй компоненте, ч. I, II, *Теория вероятностей и ее применения*, 1969, №1, стр. 3—14, №4, стр. 679—692.
- [3] И. Д. Олийнык: Исследование одного класса стохастических систем с доходами, кандидатская диссертация, *Киевский госуниверситет, Киев, 1975*.
- [4] Танров, Махир Фаррух оглы: Исследование систем массового обслуживания, локальные характеристики которых зависят от времени, *кандидатская диссертация, Киевский госуниверситет, Киев, 1978*.

Институт математики АН УССР
Отдел теории вероятностей и математической статистики
252601 Киев ГСП, ул. Репина 3.

(Поступило 11. X. 1976. в исправленном виде получено 28. X. 1980.)