

Об изоморфизме пар бесконечных абелевых групп

К. БУЗАШИ (Дебрецен)

Как известно (см. [4]), абелева группа G с её подгруппой H называется парой (G, H) этих групп. В работах [3] и [4] исследуется разложимость пар некоторых классов абелевых групп в прямую сумму пар, и степени неразложимых пар.

Пару (G, H) называют неразложимой, если не существует такое прямое разложение $G = G_1 \times G_2$ группы G , $G_1 \neq \{1\}$, $G_2 \neq \{1\}$ и $H = H_1 \times H_2$ подгруппы H , что $H_1 \subseteq G_1$; $H_2 \subseteq G_2$. В противном случае пара разложима. Две пары (G_1, H_1) и (G_2, H_2) называются изоморфными, если существует такой изоморфизм φ групп G_1 и G_2 , что $\varphi(G_1) = G_2$; $\varphi(H_1) = H_2$.

В работе [5] было доказано, что в случае конечной абелевой группы G и циклической подгруппы $H \subseteq G$ пара (G, H) с точностью до изоморфизма пар определяется инвариантами группы G и фактор-группы G/H .

В этой статье мы покажем, что результаты работы [5] справедливы и в случае ряда типов бесконечных абелевых групп.

Сформулируем здесь три леммы, которыми в дальнейшем часто будем пользоваться, доказательство которых изложено в [5].

Лемма 1. Пусть G — прямое произведение конечного числа циклических p -групп, H — циклическая подгруппа группы G . Пара (G, H) неразложима тогда и только тогда, когда группа G обладает таким базисом $\{a_i\}$, что при $a_i^{p^{\alpha_i}} = 1$ ($i = 1, \dots, n$) подгруппа H порождается элементом $a_1^{p^{\beta_1}} \cdot \dots \cdot a_n^{p^{\beta_n}}$, причём выполняются неравенства

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$$

$$\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n$$

$$\alpha_1 - \beta_1 < \alpha_2 - \beta_2 < \dots < \alpha_n - \beta_n.$$

Лемма 2. Пусть G — конечнопорождённая абелева группа, H — её подгруппа, $\{a_i\}$ — базис группы G , и

$$a_1^{\gamma_{1v}} \cdot a_2^{\gamma_{2v}} \cdot \dots \cdot a_n^{\gamma_{nv}} H = H \quad (v = 1, \dots, s)$$

все определяющие соотношения фактор-группы G/H . Тогда инварианты фактор-группы G/H получаются приведением целочисленной матрицы $\|\gamma_{ij}\|$ элементарными преобразованиями к диагональному виду $\|\delta_i\|$, где δ_k/δ_{k+1} ($k = 1, \dots, r+1$), δ_i — неотрицательные целые числа.

Лемма 3. Пусть дана неразложимая пара (G, H) , описанная в лемме 1. Тогда инварианты фактор-группы G/H суть числа

$$(1) \quad p^{\beta_1}, p^{x_1 - \beta_1 + \beta_2}, \dots, p^{x_{n-1} - \beta_{n-1} + \beta_n}.$$

Теорема 1. Пусть группа G — прямое произведение счётного числа конечных циклических p -групп, среди которых равного порядка имеется конечное число, и пусть H — циклическая подгруппа группы G . Тогда инварианты группы G и фактор-группы G/H определяют пару (G, H) с точностью до изоморфизма пар.

Доказательство. Пусть

$$G = (a_1) \times (a_2) \times \dots \times (a_n) \times \dots,$$

где $a_i^{p^{x_i}} = 1$. Пусть базисные элементы занумерованы так, что циклическая подгруппа H порождается элементом

$$a_1^{\gamma_1} \cdot a_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot a_s^{\gamma_s},$$

где $\gamma_i \geq 1$ ($i=1, \dots, s$). Так как H — конечная группа, легко выделить подгруппу $G_1 \subset G$ такую, что (G_1, H) — неразложимая пара. Согласно лемме 1, имеет место

$$G_1 = (a_1) \times \dots \times (a_s), \quad H = (a_1^{p^{\beta_1}} \cdot \dots \cdot a_s^{p^{\beta_s}}),$$

причём выполняется система неравенств

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_s$$

$$\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_s$$

$$\alpha_1 - \beta_1 < \alpha_2 - \beta_2 < \dots < \alpha_s - \beta_s.$$

Тогда группа G разлагается в прямое произведение

$$G = G_1 \times G_2$$

и имеет место

$$(2) \quad G/H \cong G_1/H \times G_2.$$

Согласно лемме 3, инварианты фактор-группы G_1/H имеют вид

$$(3) \quad p^{\beta_1}, p^{x_1 - \beta_1 + \beta_2}, \dots, p^{x_{s-1} - \beta_{s-1} + \beta_s}.$$

Пусть дана система инвариантов фактор-группы G/H . Расположим их в порядке возрастания

$$(4) \quad \delta_1, \delta_2, \dots$$

Пусть δ_{i_1} — первое в ряду (4) число, которое либо не участвует среди инвариантов p^{x_i} группы G , либо участвует, но входит в (4) с большей кратностью, чем в систему $\{p^{x_i}\}$. Покажем, что δ_{i_1} совпадает с наименьшим из инвариантов (3). Действительно, если он не является инвариантом группы G , то также не является инвариантом подгруппы G_2 , значит может быть только инвариантом фактор-группы G_1/H . Если δ_{i_1} входит в систему $\{p^{x_i}\}$, но в (4) участвует с боль-

шей кратностью, чем в $\{p^{x_i}\}$, то он также должен быть инвариантом фактор-группы G_1/H .

Так как в системе $\{p^{x_i}\}$ равных между собой инвариантов только конечное число, то выбор δ_{i_1} в обоих случаях обеспечивается однозначно.

Затем в системе

$$(5) \quad \delta_{i_1+1}, \delta_{i_1+2}, \dots$$

выбирается наименьшее число δ_{i_2} такое, которое либо не входит в систему $\{p^{x_i}\}$, либо входит в неё с меньшей кратностью, чем в (5). И т. д., после конечного числа шагов находятся все инварианты

$$(6) \quad \delta_{i_1} = p^{\beta_1}, \delta_{i_2} = p^{x_1 - \beta_1 + \beta_2}, \dots, \delta_{i_s} = p^{x_{s-1} - \beta_{s-1} + \beta_s}$$

фактор-группы G_1/H . Выбрасываем из системы (4) числа $\delta_{i_1}, \dots, \delta_{i_s}$, и мы получим все инварианты подгруппы G_2 , с помощью которых из оставшихся инвариантов $p^{x_1}, \dots, p^{x_s}$ в порядке возрастания определяются все числа $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}$. По формуле (6) подстановкой чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}$ последовательно определяются числа $\beta_1, \dots, \beta_s$ однозначно. Тем самым пара (G, H) определяется с точностью до изоморфизма пар. Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема 1 неверна для прямого произведения счётного числа таких конечных циклических p -групп, среди которых найдётся счётное число с равными порядками.

Доказательство. Пусть $G_1 = (a_1)$, где $a_1^{p^{x_1}} = 1$, и пусть $H_1 = (a_1^{p^{\beta_1}})$. Фактор-группа G_1/H_1 имеет порядок p^{β_1} . Пусть $\bar{G}_1 = (\bar{a}_1) \times (\bar{a}_2)$, где $\bar{a}_1^{p^{\bar{x}_1}} = \bar{a}_2^{p^{\bar{x}_2}} = 1$, и пусть $H_2 = (\bar{a}_1^{p^{\bar{\beta}_1}} \cdot \bar{a}_2^{p^{\bar{\beta}_2}})$, где $\bar{x}_1 > \bar{x}_2$, $\bar{\beta}_1 > \bar{\beta}_2$, $\bar{x}_1 - \bar{\beta}_1 > \bar{x}_2 - \bar{\beta}_2$. Как известно, инварианты фактор-группы $\bar{G}_1/H_2$: $p^{\bar{\beta}_2}, p^{\bar{\beta}_1 + (\bar{x}_2 - \bar{\beta}_2)}$. Предположим также, что числа $\beta_1, \bar{\beta}_1$ и $\bar{x}_2$ выбраны так, что $\beta_1 = \bar{\beta}_1 + \bar{x}_2$, то есть что порядки фактор-групп G_1/H_1 и $\bar{G}_1/H_2$ совпадают.

Пусть теперь G_{p^γ} — прямое произведение счётного числа циклических групп порядков p^γ , и пусть группа G_2 определяется равенством

$$G_2 = G_{p^{x_1}} \times G_{p^{\bar{x}_1}} \times G_{p^{\bar{x}_2}} \times G_{p^{\beta_1}} \times G_{p^{\bar{\beta}_2}} \times G_{p^{\bar{\beta}_1 + (\bar{x}_2 - \bar{\beta}_2)}}.$$

Определим группы

$$G = G_2 \times G_1 \cong G_2, \quad G_2 \times \bar{G}_1 \cong G_2.$$

Тогда имеет место

$$G/H_1 \cong G_2, \quad G/H_2 \cong G_2,$$

так как

$$G/H_1 \cong G_2 \times G_1/H_1 \cong G_2$$

$$G/H_2 \cong G_2 \times \bar{G}_1/H_2 \cong G_2.$$

Значит фактор-группы G/H_1 и G/H_2 изоморфны, а пары (G, H_1) и (G, H_2) не изоморфны как пары, поэтому характеризующие их инварианты не совпадают.

Лемма 4. Пусть группа G является полным прямым произведением циклических групп $(a_1), \dots, (a_n), \dots$ порядков p^{x_i} ($i=1, 2, \dots$), причём $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots$.

Пусть H — циклическая группа, порождённая элементом

$$(a_1^{p^{\beta_1}}, a_2^{p^{\beta_2}}, \dots, a_n^{p^{\beta_n}}, \dots)$$

где $\beta_1 < \beta_2 < \dots$; $\alpha_1 - \beta_1 < \alpha_2 - \beta_2 < \dots$. Тогда фактор-группа G/H является полным прямым произведением циклических p -групп порядков

$$p^{\beta_1}, p^{\alpha_1 - \beta_1 + \beta_2}, \dots, p^{\alpha_{n-1} - \beta_{n-1} + \beta_n}, \dots$$

Доказательство. Рассмотрим для любого натурального числа n группы $G_n = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $H_n = (a_1^{p^{\beta_1}} \cdot \dots \cdot a_n^{p^{\beta_n}})$, где $a_i^{p^{\alpha_i}} = 1$, $(i = 1, \dots, n)$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$; $\beta_1 < \dots < \beta_n$; $\alpha_1 - \beta_1 < \dots < \alpha_n - \beta_n$. Как известно, (см. [5]) фактор-группа G_n/H_n порождается смежными классами

$$(7) \quad b_i^{(n)} = (a_i a_{i+i}^{p^{\beta_{i+1} - \beta_i}} \cdot \dots \cdot a_n^{p^{\beta_n - \beta_i}}) H_n \quad (i = 1, \dots, n)$$

порядков $p^{\beta_1}, p^{\alpha_j - \beta_j + \beta_{j+1}}$ ($j = 1, \dots, n-1$). Любой смежный класс $a_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot a_n^{\gamma_n} H_n$ однозначно выражается через смежные классы (7) по формуле

$$(8) \quad a_1^{\gamma_1} \cdot a_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot a_n^{\gamma_n} H_n = b_1^{(n)\gamma_1} \cdot b_2^{(n)\gamma_2 - \gamma_1 p^{\beta_2 - \beta_1}} \cdot \dots \cdot b_n^{(n)\gamma_n - \gamma_{n-1} p^{\beta_n - \beta_{n-1}}}.$$

Рассмотрим аддитивную абелеву группу счётномерных векторов

$$M = \{(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots)\},$$

где δ_1 пробегает класс вычетов по модулю p^{β_1} , и δ_i — класс вычетов по модулю $p^{\beta_i + (\alpha_{i-1} - \beta_{i-1})}$ ($i = 2, 3, \dots, n, \dots$).

Пусть теперь

$$(9) \quad aH = (a_1^{\gamma_1}, a_2^{\gamma_2}, \dots, a_n^{\gamma_n}, \dots) H$$

— произвольный смежный класс фактор-группы G/H . Поставим в соответствие каждому смежному классу вида (9) вектор m_a группы M вида

$$(10) \quad m_a = (\gamma_1, \gamma_2 - \gamma_1 p^{\beta_2 - \beta_1}, \dots, \gamma_n - \gamma_{n-1} p^{\beta_n - \beta_{n-1}}, \dots),$$

если для каждого конечного натурального числа n смежный класс $a_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot a_n^{\gamma_n} H_n$ выражается по формуле (8). Отображение

$$(11) \quad \varphi: aH \rightarrow m_a$$

однозначно, так как с увеличением числа n показатели $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ по формуле (8) вычисляются однозначно. Более того, отображение (11) между фактор-группой G/H и подгруппой M будет взаимно однозначным, так как при фиксированных $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ постепенным увеличением числа n по формуле (8) однозначно определяется смежный класс aH .

Отображение (11) является также изоморфизмом, так как для любого конечного натурального числа n из формулы (8) и

$$a_1^{\gamma'_1} \cdot a_2^{\gamma'_2} \cdot \dots \cdot a_n^{\gamma'_n} H_n = b_1^{(n)\gamma'_1} \cdot b_2^{(n)\gamma'_2 - \gamma'_1 p^{\beta_2 - \beta_1}} \cdot \dots \cdot b_n^{(n)\gamma'_n - \gamma'_{n-1} p^{\beta_n - \beta_{n-1}}}$$

следует

$$a_1^{\gamma_1+\gamma'_1} \cdot \dots \cdot a_n^{\gamma_n+\gamma'_n} H_n = (b_1^{(n)\gamma_1} \cdot b_2^{(n)\gamma_2-\gamma_1 \cdot p^{\beta_2-\beta_1}} \cdot \dots \cdot b_n^{(n)\gamma_n-\gamma_{n-1} \cdot p^{\beta_n-\beta_{n-1}}}) \cdot \\ \cdot (b_1^{(n)\gamma'_1} \cdot b_2^{(n)\gamma'_2-\gamma'_1 \cdot p^{\beta_2-\beta_1}} \cdot \dots \cdot b_n^{(n)\gamma'_n-\gamma'_{n-1} \cdot p^{\beta_n-\beta_{n-1}}}).$$

Группа M является полной прямой суммой циклических подгрупп, порождённых векторами

$$m_1 = (\bar{1}_1, 0, \dots, 0, \dots)$$

$$m_i = (0, \dots, 0, \bar{1}_i, 0, \dots, 0, \dots) \quad (i = 2, 3, \dots),$$

где для вектора m_i , $\bar{1}_i$ стоит на i -ом месте, и является единичным классом-вычетом по модулю $p^{\alpha_{i-1}-\beta_{i-1}+\beta_i}$, а для вектора m_1 — по модулю p^{β_1} . Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть G — полное прямое произведение счётного числа конечных циклических p -групп порядков p^{α_i} ($i=1, 2, \dots$), H — циклическая подгруппа группы G . Пара (G, H) неразложима тогда и только тогда, когда группа G обладает таким базисом $\{a_i\}$, в котором подгруппа H порождается элементом

$$b = a_1^{p^{\beta_1}} \cdot a_2^{p^{\beta_2}} \cdot \dots \cdot a_n^{p^{\beta_n}} \cdot \dots,$$

причём выполняются неравенства

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \dots$$

$$\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n < \dots$$

$$\alpha_1 - \beta_1 < \alpha_2 - \beta_2 < \dots < \alpha_n - \beta_n < \dots$$

Доказательство. Пусть G — полное прямое произведение циклических групп $(\bar{a}_i)$ порядков p^{α_i} ($i=1, 2, \dots$), и пусть имеет место неравенство

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n \leq \dots$$

Пусть циклическая подгруппа H порождается элементом

$$b = (\tilde{a}_1^{\gamma_1} \cdot \tilde{a}_2^{\gamma_2} \cdot \dots),$$

где $\tilde{a}_i = (1, \dots, 1, \bar{a}_i, 1, \dots) \in G$; $\gamma_i \geq 0$ ($i=1, 2, \dots$). Очевидно, отображение $\varphi: \tilde{a}_i \rightarrow \tilde{a}_i^{\lambda_i}$ группы G в себя, где $\gamma_i = \lambda_i \cdot p^{\beta_i}$, $\lambda_i \not\equiv 0 \pmod{p}$ ($i=1, 2, \dots$) является автоморфизмом группы G , переводящим базис $\{\tilde{a}_i\}$ группы G в такой базис $\{a_i\}$,

$$a_i = (1, \dots, 1, \tilde{a}_i^{\lambda_i}, 1, \dots),$$

в котором образующий элемент b подгруппы H имеет вид

$$b = a_1^{p^{\beta_1}} \cdot a_2^{p^{\beta_2}} \cdot \dots$$

Покажем, что для неразложимости пары (G, H) необходимо выполнение неравенств $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n < \dots$. Пусть, наоборот, для фиксированного индекса

s ($1 \leq s$) имеет место неравенство $\beta_s \geq \beta_{s+1}$. Тогда положим

$$(12) \quad \hat{a}_i = \begin{cases} a_i, & \text{если } i \neq s+1 \\ a_s^{p^{\beta_s + \beta_{s+1}}} \cdot a_{s+1}, & \text{если } i = s+1 \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Так как

$$a_s^{p^{\beta_s}} \cdot a_s^{p^{\beta_{s+1}}} = (a_s^{p^{\beta_s - \beta_{s+1}}} \cdot a_{s+1})^{p^{\beta_{s+1}}},$$

то порядок элемента a_{s+1} и $\hat{a}_{s+1}$ равны. Учитывая ещё, что $(\hat{a}_\nu) \cap (\hat{a}_\mu) = 1$ ($1 \leq \nu \neq \mu$), мы заключаем, что множество $\{\hat{a}_i\}$ является базисом группы G . Поэтому отображение

$$(13) \quad \psi(a_i) = \hat{a}_i,$$

где элементы $\hat{a}_i$ определены равенством (12), является автоморфизмом группы G . Однако, подгруппа H лежит в подгруппе

$$G_2 = (\hat{a}_1) \times \dots \times (\hat{a}_{s-1}) \times (\hat{a}_{s+1}) \times \dots,$$

поэтому прямое разложение $G = G_2 \times (\hat{a}_s)$ показывает разложимость пары (G, H) . Противоречие показывает, что выполняются неравенства $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n < \dots$.

Для неразложимости пары (G, H) необходимо также выполнение неравенств $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \dots$. Действительно, пусть для некоторого фиксированного индекса s ($1 \leq s$) имеет место $\alpha_s = \alpha_{s+1}$. Положим

$$(14) \quad \hat{a}_i^* = \begin{cases} a_i, & \text{если } i \neq s \\ a_s \cdot a_{s+1}^{p^{\beta_{s+1} - \beta_s}}, & \text{если } i = s \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Так как при $\alpha_s = \alpha_{s+1}$ имеет место

$$a_s^{p^{\beta_s}} \cdot a_{s+1}^{p^{\beta_{s+1}}} = (a_s \cdot a_{s+1}^{p^{\beta_{s+1} - \beta_s}})^{p^{\beta_s}},$$

то множество $\{\hat{a}_i^*\}$ является базисом группы G , в котором подгруппа H порождается элементом

$$(15) \quad b = \hat{a}_1^{*p^{\beta_1}} \cdot \dots \cdot \hat{a}_s^{*p^{\beta_s}} \cdot \hat{a}_{s+2}^{*p^{\beta_{s+2}}} \cdot \dots,$$

значит подгруппа H лежит в истинной подгруппе

$$(16) \quad G_3 = (\hat{a}_1^*) \times \dots \times (\hat{a}_s^*) \times (\hat{a}_{s+2}^*) \times \dots$$

группы G , и прямое разложение $G = G_3 \times (\hat{a}_{s+1}^*)$ делает очевидной разложимость пары (G, H) .

Покажем, наконец, что выполнение неравенств

$$\alpha_1 - \beta_1 < \alpha_2 - \beta_2 < \dots < \alpha_n - \beta_n < \dots$$

является также необходимым для неразложимости пары (G, H) . Действительно, пусть для некоторого фиксированного индекса s ($1 \leq s$) имеет место неравенство

$$\alpha_s - \beta_s \geq \alpha_{s+1} - \beta_{s+1}.$$

Тогда порядок элемента $a_{s+1}^{p^{\beta_{s+1}-\beta_s}}$ равняется числу $p^{\alpha_{s+1}-\beta_{s+1}+\beta_s} \leq p^{\alpha_s}$. Поэтому порядок элемента

$$a_s^* = a_s \cdot a_{s+1}^{p^{\beta_{s+1}-\beta_s}}$$

равен p^{α_s} . Значит, и в этом случае множество, заданное равенством (14), является базисом группы G , в котором образующий элемент b подгруппы H имеет вид (15), следовательно, группа H лежит в истинной подгруппе G_3 (см. (16)), и пара (G, H) — разложима.

Пусть теперь выполняются условия леммы. Мы покажем, что они достаточны для неразложимости пары (G, H) . Предположим, что пара (G, H) — разложима. Так как подгруппа H — циклическая, разложимость пары (G, H) влечёт за собой существование такого прямого разложения $G = G_1 \times G_2$ группы G , что $H \subseteq G_1$, $G_2 \neq \{1\}$. Если фиксировать в группе G такой базис, который является объединением базисов подгрупп G_1 и G_2 , то переход к этому базису является автоморфизмом, сохраняющим порядки базисных элементов. Без ограничения на общность рассуждений можно предположить, что новый базис занумерован так, что выполняются неравенства для показателей числа p в условиях леммы. Но тогда для пар (G_1, H) и (G, H) выполняются условия леммы 4, значит инварианты фактор-групп G_1/H и G/H описаны леммой 3. Имеет место

$$(17) \quad G/H \cong G_1/H \times G_2.$$

Значит система инвариантов фактор-группы G/H является объединением систем инвариантов групп G_1/H и G_2 . Но, согласно лемме 3, ни один из инвариантов фактор-группы G/H не совпадает с инвариантами группы G , что противоречит разложению (17). Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть группа G — полное прямое произведение счётного числа конечных циклических p -групп, среди порядков которых встречается только конечное число равных между собой. Пусть H — циклическая подгруппа группы G . Тогда инварианты группы G и фактор-группы G/H определяют пару (G, H) с точностью до изоморфизма пар.

Доказательство. Пусть

$$G = (a_1^*) \times \dots \times (a_n^*) \times \dots,$$

где порядки подгрупп (a_i^*) равны числам p^{z_i} ($i=1, 2, \dots$) и введём привычные обозначения

$$\bar{a}_i = (1, \dots, 1, a_i^*, 1, \dots) \in G \quad (i=1, 2, \dots).$$

Тогда группа G порождается базисом $\{\bar{a}_i\}$. Пусть циклическая подгруппа H порождается элементом

$$h = \bar{a}_{i_1}^{\gamma_{i_1}} \cdot \bar{a}_{i_2}^{\gamma_{i_2}} \cdot \dots \cdot \bar{a}_{i_n}^{\gamma_{i_n}} \cdot \dots,$$

где $\gamma_{i_v} > 0$ целые числа, $1 \leq i_v$, $v=1, 2, \dots$.

Очевидно, отображение

$$a_j = \varphi(\bar{a}_j) = \begin{cases} \bar{a}_j, & \text{если } j \neq i_v \\ \bar{a}_{i_v}^{\lambda_{i_v}}, & \text{если } j = i_v \end{cases}$$

где $\gamma_{i_v} = \lambda_{i_v} \cdot p^{\beta_{i_v}}$, $\lambda_{i_v} \not\equiv 0 \pmod{p}$; $v, j = 1, 2, \dots$, является автоморфизмом группы G , приводящим к такому базису $\{a_j\}$ группы G , в котором элемент h имеет вид

$$h = a_{i_1}^{p\beta_{i_1}} \cdot a_{i_2}^{p\beta_{i_2}} \cdot \dots$$

Разбиваем множество индексов i_k во множителях элемента h на непересекающиеся подмножества $M_v = \{i_\mu^{(v)}\}$ так, что $\alpha_{i_\mu^{(v)}} = \alpha_{i_\mu^{(v)}}$ для любых двух индексов $i_{\mu_1}^{(v)}, i_{\mu_2}^{(v)} \in M_v$. По условиям теоремы все подмножества M_v конечны. Для каждого подмножества M_v выбираем минимальное число $\beta_{i_0}^{(v)} = \min \{\beta_{i_\mu^{(v)}} | i_\mu^{(v)} \in M_v\}$ и положим

$$\tilde{a}_v = \prod_{i_\mu^{(v)} \in M_v} a_{i_\mu^{(v)}}^{p\beta_{i_\mu^{(v)}} - \beta_{i_0}^{(v)}}.$$

Очевидно, элементы $\tilde{a}_v$ и $a_{i_0}^{(v)}$ имеют равные порядки, поэтому отображение

$$\psi(a_j) = \begin{cases} a_j, & \text{если } j \neq i_0^{(v)} \\ \tilde{a}_j, & \text{если } j = i_0^{(v)} \end{cases} \quad (v = 1, 2, \dots)$$

для всех v является автоморфизмом группы G , приводящим к такому базису $\{\tilde{a}_j\}$, в котором элемент h имеет вид

$$(18) \quad h = \tilde{a}_{v_1}^{p\beta_{v_1}} \cdot \tilde{a}_{v_2}^{p\beta_{v_2}} \cdot \dots$$

где выполняется $\alpha_{v_1} < \alpha_{v_2} < \dots$.

Рассмотрим теперь множество M всех индексов v_i базисных элементов $\tilde{a}_{v_i}$, участвующих в записи (18). Разбиваем множество M следующим образом. Фиксируем v_1 и выбираем все индексы $v_i \in M$, для которых $\beta_{v_i} \leq \beta_{v_1}$. Пусть они $M_1 = \{t_1^{(1)} = v_1, t_2^{(1)}, \dots\}$. Пусть во множестве $M \setminus M_1 = \bar{M}_1$ индекс $t_1^{(2)}$ — минимальный. Определим множество $M_2 \subset \bar{M}_1$ индексов $t_2^{(2)}, \dots$, для которых $\beta_{t_i^{(2)}} \leq \beta_{t_1^{(2)}}$. И т. д. Если уже построено множество M_s , то из множества $\bar{M}_s = M \setminus \{M_1 \cup \dots \cup M_s\}$ выбираем минимальный индекс $t_1^{(s+1)}$ и подмножество $\{t_i^{(s+1)}\} \subset \bar{M}_s$, где $\beta_{t_i^{(s+1)}} \leq \beta_{t_1^{(s+1)}}$. Описанный процесс однозначно определяет разбиение множества M на непересекающиеся подмножества M_s . Каждое такое подмножество M_s содержит такой индекс $t_0^{(s)}$, для которого $\beta_{t_0^{(s)}} \leq \beta_{t_i^{(s)}}$ при всех i . Положим для каждого s

$$a_s = \prod_{t_i^{(s)} \in M_s} \tilde{a}_{t_i^{(s)}}^{p\beta_{t_i^{(s)}} - \beta_{t_0^{(s)}}} \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Тогда отображение

$$\Theta(\tilde{a}_j) = \begin{cases} \tilde{a}_j, & \text{если } j \neq t_0^{(s)} \\ a_j, & \text{если } j = t_0^{(s)} \end{cases} \quad (s = 1, 2, \dots)$$

является автоморфизмом группы G , приводящим к такому базису $\{a_j\}$ группы G , в котором элемент h записывается в виде

$$h = a_{\mu_1}^{p\beta_{\mu_1}} \cdot a_{\mu_2}^{p\beta_{\mu_2}} \cdot \dots,$$

где выполняется

$$\alpha_{\mu_1} < \alpha_{\mu_2} < \dots; \quad \beta_{\mu_1} < \beta_{\mu_2} < \dots.$$

Рассмотрим, наконец, множество N индексов $\{\mu_j\}$. Фиксируем индекс $\mu_1 = n_1^{(1)}$ и выбираем подмножество N_1 всех индексов $\mu_i \in N$ таких, что

$$\alpha_{\mu_1} - \beta_{\mu_1} \cong \alpha_{\mu_i} - \beta_{\mu_i}.$$

Во множестве $\bar{N}_1 = N \setminus N_1$ фиксируем минимальный индекс $n_1^{(2)}$ и подмножество N_2 индексов i таких, что

$$\alpha_{n_1^{(2)}} - \beta_{n_1^{(2)}} \cong \alpha_i - \beta_i.$$

И т. д. С помощью однозначного процесса, подобно предыдущему случаю, приходим к разбиению множества N на непересекающиеся подмножества $N_s = \{n_1^{(s)}, \dots\}$ ($s = 1, 2, \dots$). В каждом из подмножеств N_s существует такой индекс $n_0^{(s)}$, что

$$\alpha_{n_0^{(s)}} - \beta_{n_0^{(s)}} \cong \alpha_{n_i^{(s)}} - \beta_{n_i^{(s)}}$$

для каждого i . Положим для каждого подмножества N_s

$$\hat{a}_s = \prod_{n_i^{(s)} \in N_s} a_{n_0^{(s)}}^{p^{\beta_{n_i^{(s)}} - \beta_{n_0^{(s)}}}}.$$

Отображение

$$\tau(a_j) = \begin{cases} a_j, & \text{если } j \neq n_0^{(s)} \\ \hat{a}_s, & \text{если } j = n_0^{(s)} \end{cases} \quad (s = 1, 2, \dots).$$

Является автоморфизмом группы G , приводящим к такому базису $\{\hat{a}_i\}$ группы G , в котором элемент h записывается в виде

$$h = \hat{a}_{m_1}^{p^{\beta_{m_1}}} \cdot \hat{a}_{m_2}^{p^{\beta_{m_2}}} \cdot \dots,$$

причём выполняются неравенства

$$\alpha_{m_1} < \alpha_{m_2} < \dots; \quad \beta_{m_1} < \beta_{m_2} < \dots; \quad \alpha_{m_1} - \beta_{m_1} < \alpha_{m_2} - \beta_{m_2} < \dots.$$

Рассмотрим подгруппу G_1 , порождённую элементами $\hat{a}_{m_1}, \hat{a}_{m_2}, \dots$. Согласно лемме 5, пара (G_1, H) неразложима.

Нами выделена подгруппа G_1 , для которой имеет место прямое разложение $G = G_1 \times G_2$, и пара (G_1, H) — неразложима. Покажем, что система инвариантов группы G и фактор-группы G/H однозначно определяют систему инвариантов пары (G, H) . Так как

$$G/H \cong G_1/H \times G_2,$$

то система инвариантов фактор-группы G/H является объединением систем инвариантов групп G_1/H и G_2 . Инварианты фактор-группы G_1/H имеют вид

$$p^{\beta_{s_1}}, p^{\beta_{s_2} + (\alpha_{s_1} - \beta_{s_1})}, \dots, p^{\beta_{s_n} + (\alpha_{s_{n-1}} - \beta_{s_{n-1}})}, \dots$$

Пусть $\delta_1, \delta_2, \dots$ — все инварианты фактор-группы G/H . Пусть они расположены в порядке возрастания. Пусть δ_{k_1} — первый в этом ряду инвариант, который либо не совпадает ни с одним из инвариантов группы G , либо содер-

жится в системе $\{\delta_i\}$ с большей кратностью, чем в $\{p^{x_i}\}$. Так как равных среди p^{x_i} только конечное число, то δ_{k_1} определяется однозначно. Как было показано в доказательстве теоремы 2 работы [5], $\delta_{k_1} = p^{\beta_{s_1}}$. Рассмотрим подсистему $\{\delta_{k_1+1}, \dots\}$ и найдём первый такой инвариант δ_{k_2} , который обладает теми же свойствами, которые требовались при выделении элемента δ_{k_1} . Очевидно, $\delta_{k_2} = p^{\beta_{s_2} + (x_{s_1} - \beta_{s_1})}$. И т. д. Для любого конечного числа n путём конечного числа шагов найдутся инварианты

$$p^{\beta_{s_1}}, p^{\beta_{s_2} + (x_{s_1} - \beta_{s_1})}, \dots, p^{\beta_{s_n} + (x_{s_{n-1}} - \beta_{s_{n-1}})}.$$

Инварианты $\delta_1, \dots, \delta_{k_1-1}, \delta_{k_1+1}, \dots, \delta_{k_n-1}$ являются первыми инвариантами подгруппы G_2 . Если выпишем все инварианты группы G до $p^{x_m} = \delta_{k_n-1}$ и выбросим из них все инварианты G_2 , то оставшиеся в порядке возрастания определят все числа $p^{x_{s_1}}, \dots, p^{x_{s_n-1}}$. С их помощью можно определить числа $p^{\beta_{s_1}}, \dots, p^{\beta_{s_n}}$ однозначно. Постепенным увеличением числа n последовательно определяются все инварианты

$$p^{\beta_{s_1}}, p^{\beta_{s_2}}, \dots$$

пары (G_1, H) однозначно. Так как попутно находятся также все инварианты группы G_2 , то этим самым определены однозначно все инварианты пары (G, H) . Теорема доказана.

Замечание 2. Теорема 2 неверна в случае полного прямого произведения конечных циклических p -групп, среди которых найдётся счётное число групп равного порядка.

Доказательство. Контрпримером может служить группа, описанная в замечании 1, если в качестве G_{p^v} взять полное прямое произведение счётного числа циклических групп порядка p^v .

Лемма 6. Пусть G — конечнопорождённая абелева группа

$$G = (c_1) \times \dots \times (c_s) \times (a_1) \times \dots \times (a_n),$$

где элементы c_i ($i=1, \dots, s$) имеют бесконечный порядок, а порядки элементов a_j равны p^{x_j} ($j=1, \dots, n$). Пусть H — циклическая подгруппа

$$H = (c_1^{\mu_1} \cdot \dots \cdot c_s^{\mu_s} \cdot a_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot a_n^{\beta_n}).$$

Для того, чтобы пара (G, H) была неразложимой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\text{Либо } s=0, \text{ либо } s=1 \text{ и } \mu_1 = \lambda \cdot p^v \ (\lambda \not\equiv 0 \pmod{p}), \ \delta_j = p^{\beta_j} \ (j=1, \dots, n)$$

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n; \ \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n < \gamma;$$

$$\alpha_1 - \beta_1 < \alpha_2 - \beta_2 < \dots < \alpha_n - \beta_n.$$

Доказательство. Из теории свободных абелевых групп известно, что при $\mu_1, \mu_2 \neq 0$ в группе $(c_1) \times (c_2)$ существует такая циклическая подгруппа $(\bar{c}_1)$, изоморфная группе (c_1) , которая содержит элемент $c_1^{\mu_1} \cdot c_2^{\mu_2}$. Значит для неразложимости пары (G, H) необходимо, чтобы бесконечных циклических

множителей группы имелось не более одной. Случай $s=0$ нами уже исследован, поэтому мы предполагаем, что $s=1$ и

$$G = (c_1) \times (a_1) \times \dots \times (a_n); \quad H = (c_1^{\mu_1} \cdot a_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot a_n^{\alpha_n}).$$

Пусть $\mu_1 = \lambda p^\gamma$ ($\lambda \not\equiv 0 \pmod{p}$) и $\delta_i = \lambda_i p^{\beta_i}$ ($\lambda_i \not\equiv 0 \pmod{p}$, $i=1, \dots, n$). Автоморфизм

$$\varphi(c_1) = c_1; \quad \varphi(a_i) = a_i^{\lambda_i} \quad (i=1, \dots, n)$$

переводит базис группы G в такой базис $\{c_1, \bar{a}_1\}$, в котором подгруппа H имеет вид

$$H = (c_1^{\lambda p^\gamma} \cdot \bar{a}_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot \bar{a}_n^{\beta_n}).$$

Согласно лемме 1, мы можем предполагать, что $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n$. Покажем, что $\gamma > \beta_i$ ($1 \leq i \leq n$). Действительно, если, например, $\gamma \leq \beta_1$, то, воспользовавшись автоморфизмом

$$\varphi^*(c_1) = c_1; \quad \varphi^*(\bar{a}_i) = \begin{cases} \bar{a}_i, & \text{если } i \neq 1 \\ \bar{a}_1^{\lambda}, & \text{если } i = 1 \end{cases} \quad (i=1, \dots, n),$$

мы приводим погруппу H к виду

$$H = (c_1^{\lambda p^\gamma} \cdot \tilde{a}_1^{\lambda p^{\beta_1}} \cdot \tilde{a}_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot \tilde{a}_n^{\beta_n}),$$

и из равенства

$$c_1^{\lambda p^\gamma} \cdot \tilde{a}_1^{\lambda p^{\beta_1}} = (c_1 \cdot \tilde{a}_1^{p^{\beta_1-\gamma}})^{\lambda p^\gamma}$$

получаем, что под действием автоморфизма

$$\bar{\varphi}(c_1) = c_1 \cdot \tilde{a}_1^{p^{\beta_1-\gamma}}; \quad \bar{\varphi}(\tilde{a}_i) = \tilde{a}_i \quad (i=1, \dots, n)$$

пара (G, H) окажется разложимой.

Согласно лемме 1 мы можем считать также, что выполняются неравенства

$$\alpha_1 - \beta_1 < \alpha_2 - \beta_2 < \dots < \alpha_n - \beta_n,$$

то есть условия леммы необходимы для неразложимости пары (G, H) .

Предположим, что базис $\{c_1, a_i\}$ обладает всеми условиями леммы. Покажем, что эти условия и достаточны. Действительно, если бы пара (G, H) была разложимой, то существовал бы такой базис группы G , в котором группа G разлагалась бы в прямое произведение $G = G_1 \times G_2$, где $H \subseteq G_1$, $G_2 \neq \{1\}$, значит в запись образующего элемента группы H через новый базис не входят все базисные элементы. Мы покажем, что для любого автоморфизма $\tilde{\varphi}$ группы G это не так. Пусть

$$\tilde{\varphi}(c_1) = c_1^{\mu_0} \cdot a_1^{\mu_{01}} \cdot \dots \cdot a_n^{\mu_{0n}}.$$

Аutomорфизм сохраняет порядок элемента, поэтому здесь выполняется $\mu_0 = \pm 1$. Пусть далее

$$\tilde{\varphi}(a_n) = a_1^{\mu_{n1}} \cdot \dots \cdot a_n^{\mu_{nn}},$$

где $\mu_{nn} \not\equiv 0 \pmod{p}$.

$$\tilde{\varphi}(a_{n-1}) = a_1^{\mu_{n-1,1}} \cdot \dots \cdot a_{n-1}^{\mu_{n-1,n-1}} \cdot a_n^{\mu_{n-1,n}},$$

где для сохранения порядка элемента выполняются

$$\mu_{n-1n-1} \not\equiv 0 \pmod{p}; \quad \mu_{n-1n} \equiv 0 \pmod{p^{x_n-x_{n-1}}}.$$

Вообще, пусть

$$\tilde{\varphi}(a_{n-i}) = a_1^{\mu_{n-i1}} \cdot \dots \cdot a_{n-i}^{\mu_{n-i, n-i}} \cdot \dots \cdot a_n^{\mu_{n-i, n}} \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

Тогда выполняются сравнения

$$\mu_{n-in-i} \not\equiv 0 \pmod{p}, \quad \mu_{n-is} \equiv 0 \pmod{p^{x_s-x_{n-i}}} \quad (n-i < s \leq n).$$

Пусть

$$\mu_{kj} = c_{kj} p^{x_j-x_k} \quad (1 \leq k < j \leq n), \quad c_{kj} \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Тогда матрица F автоморфизма $\tilde{\varphi}$ имеет вид

$$F = \begin{pmatrix} \mu_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mu_{01} & \mu_{11} & \mu_{21} & \mu_{31} & \dots & \mu_{n1} \\ \mu_{02} & c_{12} p^{x_2-x_1} & \mu_{22} & \mu_{32} & \dots & \mu_{n2} \\ \mu_{03} & c_{13} p^{x_3-x_1} & c_{23} p^{x_3-x_2} & \mu_{33} & \dots & \mu_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{0n} & c_{1n} p^{x_n-x_1} & c_{2n} p^{x_n-x_2} & c_{3n} p^{x_n-x_3} & \dots & \mu_{nn} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(c_1^{\lambda p^\gamma} a_1^{p^{\beta_1}} \cdot \dots \cdot a_n^{p^{\beta_n}}) &= c_1^{\mu_0 \lambda p^\gamma} \cdot a_1^{\mu_{01} \lambda p^\gamma + \mu_{11} p^{\beta_1} + \dots + \mu_{n1} p^{\beta_n}} \cdot \\ &\cdot a_2^{\mu_{02} \lambda p^\gamma + c_{12} p^{x_2-x_1} + \beta_1 + \mu_{22} p^{\beta_2} + \dots + \mu_{n2} p^{\beta_n}} \cdot \\ &\vdots \\ &\cdot a_i^{\mu_{0i} \lambda p^\gamma + c_{1i} p^{x_i-x_1} + \beta_1 + \dots + c_{i-1i} p^{x_i-x_{i-1}} + \beta_{i-1} + \mu_{ii} p^{\beta_i} + \dots + \mu_{ni} p^{\beta_n}} \cdot \\ &\vdots \\ &\cdot a_n^{\mu_{0n} \lambda p^\gamma + c_{1n} p^{x_n-x_1} + \beta_1 + \dots + c_{n-1n} p^{x_n-x_{n-1}} + \beta_{n-1} + \mu_{nn} p^{\beta_n}} = \\ &= c_1^{\mu_0 \lambda p^\gamma} \cdot a_1^{\mu_{11} p^{\beta_1}} \cdot \dots \cdot a_i^{\mu_{ii} p^{\beta_i}} \cdot \dots \cdot a_n^{\mu_{nn} p^{\beta_n}}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \pm 1; \quad \mu_i = \mu_{0i} \lambda p^{\gamma-\beta_i} + c_{1i} p^{x_i-x_1+\beta_1-\beta_i} + \dots + c_{i-1i} p^{x_i-x_{i-1}+\beta_{i-1}-\beta_i} + \mu_{ii} + \\ &+ \mu_{i-1i} p^{\beta_{i-1}-\beta_i} + \dots + \mu_{ni} p^{\beta_n-\beta_i}. \end{aligned}$$

Значит все $\mu_i \not\equiv 0 \pmod{p}$. Лемма доказана.

Теорема 3. Пусть G — конечнопорождённая абелева группа

$$G = (c_1) \times \dots \times (c_s) \times (a_1) \times \dots \times (a_n),$$

где $c_i (i=1, \dots, s)$ — элементы бесконечного порядка, $a_j^{p^{x_j}} = 1$ ($j=1, \dots, n$). Пусть H — циклическая подгруппа группы G . Тогда инварианты группы G и факторгруппы G/H определяют пару (G, H) с точностью до изоморфизма пар.

Доказательство. С помощью автоморфизмов группы G , использованных в лемме 6, можно перейти к такому базису $\{c_i, a_j\}$ группы G , в котором

циклическая подгруппа H имеет вид

$$H = (c_r^{\lambda p^\gamma} \cdot a_{i_1}^{p^{\beta_{i_1}}} \cdot \dots \cdot a_{i_m}^{p^{\beta_{i_m}}}), \quad (\lambda \not\equiv 0 \pmod{p})$$

причём выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \alpha_{i_1} &< \alpha_{i_2} < \dots < \alpha_{i_m} \\ \beta_{i_1} &< \beta_{i_2} < \dots < \beta_{i_m} < \gamma \\ \alpha_{i_1} - \beta_{i_1} &< \alpha_{i_2} - \beta_{i_2} < \dots < \alpha_{i_m} - \beta_{i_m}. \end{aligned}$$

Тогда группа G распадается в прямое произведение

$$G = G_2 \times G_1,$$

где

$$G_1 = (c_r) \times (a_{i_1}) \times \dots \times (a_{i_m}),$$

и пара (G_1, H) — неразложима.

Покажем, что инварианты пары (G_1, H) однозначно определяются инвариантами группы G_1 и фактор-группы G_1/H . Действительно, приведение к диагональному виду матрицы

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \lambda p^\gamma & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p^{\beta_{i_m}} & p^{\alpha_{i_m}} & 0 & & 0 & 0 \\ p^{\beta_{i_{m-1}}} & 0 & p^{\alpha_{i_{m-1}}} & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ p^{\beta_{i_2}} & 0 & 0 & & p^{\alpha_{i_2}} & 0 \\ p^{\beta_{i_1}} & 0 & 0 & & 0 & p^{\alpha_{i_1}} \end{pmatrix} \sim \\ & \begin{pmatrix} 0 & \lambda p^{\alpha_{i_m} + \gamma - \beta_{i_m}} & 0 & & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p^{\alpha_{i_m}} & p^{\alpha_{i_{m-1}} + \beta_{i_m} - \beta_{i_{m-1}}} & & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^{\alpha_{i_{m-1}}} & & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \dots & p^{\alpha_{i_2}} & p^{\alpha_{i_1} + \beta_{i_2} - \beta_{i_1}} \\ p^{\beta_{i_1}} & 0 & 0 & & \dots & 0 & p^{\alpha_{i_1}} \end{pmatrix} \sim \\ & \begin{pmatrix} 0 & \lambda p^{\alpha_{i_m} + \gamma - \beta_{i_m}} & 0 & & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^{\alpha_{i_{m-1}} + \beta_{i_m} - \beta_{i_{m-1}}} & & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \dots & 0 & p^{\alpha_{i_1} + \beta_{i_2} - \beta_{i_1}} \\ p^{\beta_{i_1}} & 0 & 0 & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

показывает, согласно лемме 3, что инварианты фактор-группы G_1/H равны числам

$$p^{\beta_{i_1}}, p^{\beta_{i_2} + (\alpha_{i_1} - \beta_{i_1})}, \dots, p^{\beta_{i_m} + (\alpha_{i_{m-1}} - \beta_{i_{m-1}})}, \lambda p^{\gamma + (\alpha_{i_m} - \beta_{i_m})}.$$

Нетрудно заметить, что фактор-группа G_1/H порождается смежными классами

$$\begin{aligned} b_{i_1} &= \bar{a}_{i_1} H = (a_{i_1} \cdot a_{i_2}^{p^{\beta_{i_2}-\beta_{i_1}}} \cdot \dots \cdot a_{i_m}^{p^{\beta_{i_m}-\beta_{i_1}}} \cdot c_r^{p^{\gamma-\beta_{i_1}}}) H, \\ b_{i_2} &= \bar{a}_{i_2} H = (a_{i_2} \cdot a_{i_3}^{p^{\beta_{i_3}-\beta_{i_2}}} \cdot \dots \cdot a_{i_m}^{p^{\beta_{i_m}-\beta_{i_2}}} \cdot c_r^{p^{\gamma-\beta_{i_2}}}) H, \\ &\vdots \\ b_{i_m} &= \bar{a}_{i_m} H = (a_{i_m} \cdot c_r^{p^{\gamma-\beta_{i_m}}}) H, \\ c &= \bar{c}_r H = c_r \cdot H. \end{aligned}$$

Действительно, смежные классы b_{i_v} имеют порядок $p^{\beta_{i_v}+(x_{i_v-1}-\beta_{i_v-1})}$ ($v=2, \dots, m$), так как

$$\begin{aligned} (a_{i_v} \cdot a_{i_{v+1}}^{p^{\beta_{i_{v+1}}-\beta_{i_v}}} \cdot \dots \cdot a_{i_m}^{p^{\beta_{i_m}-\beta_{i_v}}} \cdot c_r^{p^{\gamma-\beta_{i_v}}})^{p^{\beta_{i_v}+(x_{i_v-1}-\beta_{i_v-1})}} = \\ = (a_{i_1}^{p^{\beta_{i_1}}} \cdot \dots \cdot a_{i_{v-1}}^{p^{\beta_{i_{v-1}}}} \cdot a_{i_v}^{p^{\beta_{i_v}}} \cdot \dots \cdot a_{i_m}^{p^{\beta_{i_m}}} \cdot c_r^{p^{\gamma}})^{p^{x_{i_v-1}-\beta_{i_v-1}}} \in H, \end{aligned}$$

но меньшая степень этого элемента не лежит в H .

Точно так же можно показать, что порядок смежного класса b_{i_1} равен $p^{\beta_{i_v}}$, а порядок класса c — число $\lambda \cdot p^{\gamma+(x_m-\beta_{i_m})}$ в фактор-группе G_1/H .

Легко показать, что любой смежный класс $a_{i_1}^{x_1} \cdot \dots \cdot a_{i_m}^{x_m} \cdot c_r^e H$ однозначно выражается через смежные классы $b_{i_1}, \dots, b_{i_m}, c$. Таким образом, неразложимая пара (G_1, H) вполне определяется числами $\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_m}, \gamma$, которые взаимно однозначно выражаются через $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_m}$ с помощью инвариантов фактор-группы G_1/H (число λ определяется тем, что $\lambda \cdot p^{\gamma+(x_m-\beta_{i_m})}$ — единственный инвариант фактор-группы G/H , который не является степенью простого числа p).

Ввиду разложения $G = G_2 \times G_1$ имеет место

$$G/H \cong G_2 \times G_1/H,$$

значит инварианты фактор-группы G/H получаются объединением инвариантов группы G_2 и фактор-группы G_1/H . Так как метод нахождения инвариантов пары (G_1, H) из инвариантов фактор-группы G/H описан в теореме 2, и он переносится на случай нашей теоремы, то нами показано, что инварианты фактор-группы G/H и группы G однозначно определяют инварианты пары (G, H) . Теорема доказана.

Лемма 7. Пусть группа G — полное прямое произведение циклических групп, среди которых счётное число конечных циклических p -групп и по крайней мере одна бесконечная циклическая группа. Пусть H — любая циклическая подгруппа группы G . Тогда пара (G, H) — разложима.

Доказательство. Пусть конечные циклические прямые множители группы G порождаются элементами a_i порядков p^{x_i} ($i=1, 2, \dots$), а бесконечные — элементами c_j ($j=1, 2, \dots$). Рассмотрим для произвольной пары (n, s) натуральных чисел n и s подгруппу $G_{n,s}$, являющуюся полным прямым произведением циклических групп $\langle a_i^{x_i} \rangle$ и $\langle c_j^{x_j} \rangle$, для которых $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_n = 1$, $\gamma_{n+1} = \dots = \gamma_{n+s} = 0$ и $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_s = 1$, $\mu_j = 0$ при $j > s$. Очевидно, подгруппа $G_{n,s}$

изоморфна конечнопорождённой группе

$$\bar{G}_{n,s} = (a_1) \times \dots \times (a_n) \times (c_1) \times \dots \times (c_s).$$

Пусть теперь H — произвольная циклическая подгруппа группы G , имеющая вид

$$H = (a_1^{\delta_1} \cdot \dots \cdot a_n^{\delta_n} \cdot \dots \cdot c_1^{\delta_1} \cdot \dots \cdot c_s^{\delta_s} \cdot \dots).$$

Определим циклическую подгруппу $H_{n,s}$ следующим образом:

$$H_{n,s} = (a_1^{\delta_1} \cdot \dots \cdot a_n^{\delta_n} \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot c_1^{\delta_1} \cdot \dots \cdot c_s^{\delta_s} \cdot 1 \cdot \dots).$$

Очевидно, подгруппа $H_{n,s}$ изоморфна циклической группе

$$\bar{H}_{n,s} = (a_1^{\delta_1} \cdot \dots \cdot a_n^{\delta_n} \cdot c_1^{\delta_1} \cdot \dots \cdot c_s^{\delta_s}).$$

Достаточно рассматривать только случай, когда все конечные порядки различны, так как в противном случае, согласно лемме 5, пара (G, H) заведомо разложима.

По лемме 6 пара $(\bar{G}_{n,s}, \bar{H}_{n,s})$ неразложима только тогда, когда подгруппа $\bar{H}_{n,s}$ имеет вид

$$\bar{H}_{n,1} = (a_1^{p^{\beta_1}} \cdot \dots \cdot a_n^{p^{\beta_n}} \cdot c_1^{\lambda_1 p^{\gamma_1}}),$$

и группа $\bar{G}_{n,s}$ содержит только один прямой циклический множитель бесконечного порядка, причём выполняются неравенства $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$; $\beta_1 < \dots < \beta_n < \gamma_1$; $\alpha_1 - \beta_1 < \dots < \alpha_n - \beta_n$. Так как это имеет место для любых пар $(\bar{G}_{n,s}, \bar{H}_{n,s})$, то мы заключаем, что для неразложимости пары (G, H) необходимо, чтобы подгруппа H имела вид

$$H = (a_1^{p^{\beta_1}} \cdot \dots \cdot a_n^{p^{\beta_n}} \cdot \dots \cdot c_1^{\lambda_1 p^{\gamma_1}}),$$

причём должны выполняться неравенства $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \dots$; $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n < \dots < \gamma_1$; $\alpha_1 - \beta_1 < \alpha_2 - \beta_2 < \dots$. Однако для любого конечного натурального числа γ_1 в бесконечной строго возрастающей последовательности натуральных чисел $\beta_1 < \beta_2 < \dots$ найдётся такой конечный индекс m , для которого $\beta_m > \gamma_1$. Но тогда по лемме 6 пара $(\bar{G}_{m,1}, \bar{H}_{m,1})$ — разложима, значит и (G, H) — разложима. Лемма доказана.

Теорема 4. Пусть группа G — полное прямое произведение счётного числа конечных циклических p -групп, где число прямых множителей равного порядка только конечное, и счётного числа бесконечных циклических групп. Пусть G — циклическая подгруппа группы G . Тогда инварианты фактор-группы G/H и группы G определяют пару (G, H) с точностью до изоморфизма пар.

Доказательство. Применяя метод, использованный нами в доказательстве теоремы 2, и учитывая лемму 7, группы G и H можем записать в виде

$$G = G_2 \times G_1; H = (a_{i_1}^{p^{\beta_{i_1}}} \cdot \dots \cdot a_{i_m}^{p^{\beta_{i_m}}} \cdot \dots),$$

где $H \subset G_1$ и (G_1, H) — неразложимая пара. Тогда имеет место разложение

$$G/H \cong G_2 \times G_1/H.$$

Согласно теореме 2, инварианты фактор-группы G_1/H и группы G_1 однозначно определяют инварианты пары (G_1, H) . Так как инварианты фактор-группы G_1/H легко выделяются из инвариантов фактор-группы G/H по методу, изложенному в теореме 2, то инвариантами фактор-группы G/H и группы G однозначно определяются инварианты пары (G, H) . Теорема доказана.

Замечание 3. Теорема 4 неверна в случае, когда среди циклических прямых множителей группы G имеется счётное число групп равного конечного порядка.

Доказательство. Контрпримером может служить группа, описанная в замечании 1, если к прямым множителям группы прибавить счётное число циклических групп бесконечного порядка.

Литература

- [1] М. Холл, Теория групп, *Изд. Иностранная литература*, 1962.
- [2] А. Г. Курош, Теория групп, *Изд. Наука*, 1967.
- [3] С. Д. Берман—З. П. Жилинская, О вложении подмодулей в конечнопорождённый модуль над кольцом главных идеалов, XI. Всесоюзный алгебраический коллоквиум, *Резюме сообщений и докладов, Кишинёв*, 1971, 117—118.
- [4] С. Д. Берман—З. П. Жилинская, О совместных прямых разложениях конечнопорождённой абелевой группы и её подгруппы, *Докл. А. Н. СССР*, **210** № 5 (1973), 1004—1007.
- [5] К. Бузаши, Об инвариантах пар конечных абелевых групп, *Publ. Math. (Debrecen)*, **28** (1981), 317—326.

(Поступила 18. X. 1978)