

Обобщенные группы Цассенхауза

А. И. ВЕЙЦБЛИТ (Херсон), Э. М. ЖМУДЬ (Харьков)

В дальнейшем «группа» и «характер» означают соответственно «конечная группа» и «комплексный характер».

Каждая группа Цассенхауза («Z-группа») обладает неприводимым нелинейным характером, модули значений которого на отличных от единицы элементах группы равны 0 или 1: так как Z-группа является строго дважды транзитивной группой подстановок,¹⁾ то вычитание главного характера Z-группы от ее естественного подстановочного характера дает неприводимый характер, принимающий на неединичных элементах группы значения 0, -1 , 1 ²⁾.

В настоящей работе изучается класс групп, для которых вышеуказанное свойство Z-групп является определяющим. Неприводимый нелинейный характер χ группы G назовем VZ-характером, если функция $|\chi(x)|$ ($x \in G$) принимает на $G^* = G \setminus \{1\}$ значения 0 и 1. Группу с отмеченным VZ-характером назовем VZ-группой³⁾; VZ-группу будем называть VZ-группой 1-го рода, если она порождается множеством нулей ее VZ-характера и VZ-группой 2-го рода — в противном случае. Известны примеры VZ-групп, не являющихся Z-группами: $PSL(3, 4)$, M_{11} , простая группа Янко J_1 порядка 175.560.

Основные результаты работы

1. Доказана простота VZ-групп 1-го рода с тривиальной подгруппой Фиттинга и VZ-характером нечетной степени. (Теорема 3.2.)⁴⁾

2. Доказано (предложение 2.28 и теорема 3.8), что VZ-группа с тривиальной подгруппой Фиттинга и VZ-характером χ четной степени является VZ-группой 1-го рода, ее инволюции сопряжены, централизаторы инволюций являются холловскими подгруппами порядка $\chi(1)$, цоколь является нециклической простой группой, вне которой характер χ обращается в нуль; если централизаторы инволюций не самонормализуются, VZ-группа рассматриваемого типа изоморфна одной из простых групп $PSL(2, 5)$, $PSL(2, 7)$, $PSL(2, q)$ ($q = 2^\lambda$, $\lambda > 1$), $Sz(q)$ ($q = 2^{2\lambda+1}$), $PSL(3, 4)$ ⁵⁾.

¹⁾ См. [18].

²⁾ Значение 1 может выпускаться.

³⁾ Существуют группы с несколькими VZ-характерами ($A_5 \cong PSL(2, 5)$ имеет два VZ-характера χ_1 и χ_2 : $\chi_1(1) = 4$, $\chi_2(1) = 5$). Каждая такая группа определяет несколько VZ-групп.

⁴⁾ Примеры: $M_{11}(\chi(1) = 55)$, $J_1(\chi(1) = 209)$.

⁵⁾ Среди этих групп лишь $PSL(3, 4)$ не является Z-группой.

3. Дано описание класса VZ -групп с нетривиальной подгруппой Фиттинга: этот класс совпадает с классом Z -групп с нетривиальной подгруппой Фиттинга (теорема 4.4 и следствие 4.6).

Изложение в настоящей работе существенно опирается на результаты статьи [18], содержание которой предполагается известным.

Обозначения и термины

В настоящей работе сохраняются обозначения и терминология принятые в [18]. Дополнительно вводятся следующие обозначения: $\text{Sc}(X)$ — цокль группы X ; $I(X)$ — множество всех инволюций группы X ; $\text{Irr}(X)$ — множество всех неприводимых характеров группы X ; f_χ — степень $\chi(1)$ характера $\chi \in \text{Irr}(X)$; $\text{Ker } \chi = \{x \in X \mid \chi(x) = f_\chi\}$ — ядро характера χ , ψ^x ($x \in X$)-характер X — сопряженный с характером ψ подгруппы $Y \triangleleft X$: $\psi^x(y) = \psi(xy x^{-1})$ ($y \in Y$), $\chi \downarrow Y$ — ограничение характера χ группы X на подгруппу Y ; 1_X — главный характер группы X . $(\theta_1, \theta_2)_X$ — скалярное произведение $|X|^{-1} \sum \theta_1(x) \overline{\theta_2(x)}$ функций θ_j : $X \rightarrow \mathbb{C}$ ($j=1, 2$); $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел.

§ 1. Некоторые леммы

В этом параграфе G — неабелева группа с заданным нелинейным характером $\chi \in \text{Irr}(G)$; $T_\chi = \{x \in G \mid \chi(x) = 0\}$ — множество «нулей» характера χ ; $U_\chi = \{x \in G \mid \chi(x) \text{ — корень из } 1\}$ — множество «унитарных элементов» характера χ ; $N_\chi = \langle T_\chi \rangle$ (очевидно, $N_\chi \triangleleft G$). Подгруппу $H \trianglelefteq G$ будем называть T -подгруппой, если $H \subseteq T_\chi$ и U -подгруппой, если $H \subseteq U_\chi$.

1.1. Лемма (Бернсайд [1]). $T_\chi \neq \emptyset$.

1.2. Лемма (Галлакер [9]). (I) $\chi \downarrow N_\chi \in \text{Irr}(N_\chi)$; (II) $G \setminus N_\chi \subseteq U_\chi$.

1.3. Лемма (Галлакер [8]). *Имеет место неравенство*

$$(1) \quad f_\chi^2 - 1 \equiv \frac{|T_\chi|}{|Q(\chi)|} \pmod{6}$$

Знак равенства в (1) достигается тогда и только тогда, когда $G \setminus Q(\chi) = T_\chi \cup U_\chi$.

1.4. Лемма. *Если $N \triangleleft G$, $N \cap U_\chi \neq \emptyset$, то $\chi \downarrow N$ неразветвлен.*

Доказательство. Пусть $\chi \downarrow N = e(\psi_1 + \dots + \psi_r)$, где $\psi_1, \dots, \psi_r \in \text{Irr}(N)$ и попарно различны, e — индекс ветвления $\chi \downarrow N$. Если $x \in N \cap U_\chi$, то $e(\psi_1(x) + \dots + \psi_r(x))$ — корень из 1, откуда $e=1$.

1.5. Лемма. *Порядок каждого унитарного (т.е. состоящего из унитарных элементов характера χ) G — класса делится на f_χ .*

⁶⁾ $Q(\chi) = \{x \in G \mid |\chi(x)| = f_\chi\}$ — «квазицентр» характера χ .

Доказательство. Пусть $x \in U_\chi$, $h_x = |x^G|$. Так как $\frac{h_x \chi(x)}{f_\chi}$ — целое алгебраическое число и $\chi(x)$ — корень из 1, то $f_\chi | h_x$.

1.6. Лемма. Если — T -подгруппа, то $|H| | f_\chi$.

Доказательство. $f_\chi = \sum_{x \in H} \chi(x) = |H|k$, где $k = (\chi \downarrow H, 1_H)_H \in \mathbb{Z}$.

1.7. Лемма. (Фейт—Томпсон [7]⁷). Если $N \triangleleft G$ и $\text{Ker } \chi \not\subseteq N$, то из $x \in G$, $C_G(x) \cap N = \{1\}$ следует $x \in T_\chi$.

1.8. Лемма. ([14]). $x \in T_\chi$ влечет $C_G(x) \subseteq N_\chi$.

1.9. Следствие. $Sc(G) \subseteq N_\chi$.

Доказательство. Если F — минимальный нормальный делитель группы G , $F \not\subseteq N_\chi$, то $F \cap N_\chi = \{1\}$, откуда $F \subseteq C_G(N_\chi)$; ввиду 1.8 отсюда вытекает $F \subseteq N_\chi$ — противоречие.

1.10. Лемма (Фробениус—Шур [3])

$$(2) \quad \sum_{x \in G} \chi(x^2) = \begin{cases} |G|, & \text{если } \chi = \bar{\chi} \text{ и } \text{ind}_R \chi = 1 \\ -|G|, & \text{если } \chi = \bar{\chi} \text{ и } \text{ind}_R \chi = 2. \\ 0, & \text{если } \chi \neq \bar{\chi}. \end{cases}$$

Здесь $\text{ind}_R \chi$ — индекс Шура характера χ относительно поля $\mathbb{R}$.

1.11. Лемма⁸). Пусть G — несвязная группа четного порядка, $\{A, B\}$ — ее нормальное S -разбиение, причем $c(A)$ четно (т. е. A содержит все элементы четного порядка группы G). Если $\chi \in \text{Irr}(G)$ и $A \subseteq T_\chi$, то (I) $\chi = \bar{\chi}$ и $\text{ind}_R \chi = 1$; (II) Инволюции группы G сопряжены; (III) Если $x \in I(G)$, то $C_G(x)$ — холловская подгруппа, $|C_G(x)| = f_\chi = c(A)$; (IV) $N_\chi = G$.

Доказательство. Утверждения (I)—(III) вытекают из леммы 3.14 статьи [18] при $\alpha = 0$. Для доказательства (IV) заметим что в силу 1.2 $\Theta = \chi \downarrow N_\chi \in \text{Irr}(N_\chi)$. Поскольку A — замкнутое нормальное подмножество множества $N_\chi^\#$, то к группе N_χ ее характеру Θ и подмножеству $A \subseteq N_\chi^\#$ применимы уже доказанные утверждения (II) и (III). В частности, $I(N_\chi) = N_\chi$ -класс. С другой стороны, так как $I(G) \subset A \subseteq N_\chi$, то $I(N_\chi) = I(G)$. Таким образом, $I(G)$ является G -классом и, вместе с тем, N_χ -классом, откуда $(G : C_G(x)) = (N_\chi : C_{N_\chi}(x))$ для любого $x \in I(G)$. Так как $x \in T_\chi$, то ввиду 1.8 $C_G(x) = C_{N_\chi}(x)$. Поэтому $N_\chi = G$, что доказывает (IV).

1.12. Лемма (Кронекер). Если модули целого алгебраического числа α и всех чисел сопряженных с ним (относительно поля $\mathbb{Q}$) равны единице, то α — корень из единицы.

⁷) См. также [6].

⁸) В формулировке этой леммы используются терминология и обозначения принятые в [18].

§ 2. Общие свойства VZ -групп

При помощи 1.12 легко показать, что данное во введении определение VZ -характера равносильно следующему:

2.1. Определение. Неприводимый нелинейный характер χ неабелевой группы G называется VZ -характером, если $G^\# = T_\chi \cup U_\chi$.

Некоторые из нижеследующих утверждений частично или полностью содержатся в статье [18] (см. доказательство теоремы 3 статьи [18])⁹⁾ и поэтому сформулированы, как правило, без доказательств.

2.2. Предложение. Неприводимый нелинейный характер χ группы G является VZ -характером тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$(3) \quad f_\chi^2 - 1 = |T_\chi|.$$

Доказательство. Если χ VZ -характер, то

$$|G| = \sum_{x \in G} |\chi(x)|^2 = f_\chi^2 + \sum_{x \in T_\chi} |\chi(x)|^2 + \sum_{x \in U_\chi} |\chi(x)|^2 = f_\chi^2 + |U_\chi| = f_\chi^2 + |G^\# \setminus T_\chi|,$$

откуда вытекает (3). Обратно, из (3) следует, что в (1) имеет место знак равенства. Поэтому $|Q(\chi)| = 1$ и в силу 1.3 $G^\# = T_\chi \cup U_\chi$, т. е. χ — VZ -характер.

В дальнейшем G — VZ -группа с VZ -характером χ .

2.3. Предложение. $Z(G) = \text{Ker } \chi = \{1\}$.

Доказательство. Вытекает из 2.1.

2.4. Предложение ([18], Лемма 3.4). $\{T_\chi, U_\chi\}$ -нормальное C -разбиение группы G .

2.5. Следствие. VZ -группы несвязны.

2.6. Предложение ([18], лемма 3.7 и следствие 3.11). Если $H \leq G$, то (I) H является T -подгруппой тогда и только тогда, когда $|H| \mid f_\chi$, (II) H является U -подгруппой тогда и только тогда, когда $|H| \mid g_\chi$, где $g_\chi = \frac{|G|}{f_\chi}$.

2.7. Предложение ([18], лемма 3.8)

$$f_\chi = c(T_\chi), \quad g_\chi = c(U_\chi).$$

2.8. Следствие ([18], следствие 3.10)

$$\hat{T}_\chi = \{x \in G \mid x^{f_\chi} = 1\}, \quad \hat{U}_\chi = \{x \in G \mid x^{g_\chi} = 1\}.$$

2.9. Следствие ([18], следствие 3.11)

$$(f_\chi, g_\chi) = 1.$$

2.10. Предложение. $g_\chi \mid f_\chi^2 - 1$.

⁹⁾ Как видно из определения VZ -характеров, утверждения 3.3—3.11 статьи [18] относятся к VZ -группе G с VZ -характером χ .

Доказательство. Если $p \in \pi(g_x)$, то в силу 2.6 любая $\mathfrak{S}_p$ -подгруппа P группы G содержится в U_x . Следовательно, $\sum_{x \in P} |\chi(x)|^2 = f_x^2 + |P| - 1$. Так как левая часть $\equiv 0 \pmod{|P|}$, то $|P| \mid f_x^2 - 1$. Таким образом, при любом $p \in \pi(g_x)$ $f_x^2 - 1$ делится на p -часть g_x , откуда и вытекает утверждение.

2.11. Предложение. *Группа G не содержит отличных от $\{1\}$ нормальных T -подгрупп.*

Доказательство. Если $\{1\} \neq N \triangleleft G$, $N \subseteq \hat{T}_x$, то, ввиду 2.3 и 1.7, $x \in U_x$ влечет $C_G(x) \cap N \neq \{1\}$. Так как (в силу 2.4) $C_G(x) \subseteq \hat{U}_x$, то $U_x \cap N \neq \emptyset$ — противоречие.

Из 2.11 и 1.4 вытекает

2.12. Следствие. *Если $\{1\} \neq N \triangleleft G$, то характер $\chi \downarrow N$ неразветвлен.*

2.13. Предложение. *Нормальный делитель группы G является U -подгруппой тогда и только тогда, когда он нильпотентен.*

Доказательство. Если $N \triangleleft G$ и N нильпотентен, то N — U -подгруппа, ввиду 2.6, 2.11 и следствия 1.6 статьи [18]. Обратно, если $N \triangleleft G$, $N \subseteq \hat{U}_x$, то N нильпотентен ввиду замкнутости U_x и леммы 2.2 статьи [18].

2.14. Предложение. *Если G — VZ -группа 2-го рода, то N_x — VZ -группа 1-го рода с VZ -характером $\Theta = \chi \downarrow N_x$; при этом, $G \setminus N_x \subset U_x$ (включение строгое!).*

Доказательство. Вытекает из 1.2.

2.15. Предложение. *Если G — VZ -группа 1-го рода и H — собственная подгруппа группы G , то $\Theta = \chi \downarrow H$ приводим.*

Доказательство. Очевидно, $f_x^2 + |U_x \cap H| = \sum_{x \in H} |\Theta(x)|^2 = \mu \cdot |H|$ где $\mu = (\Theta, \Theta)_H \in \mathbb{Z}$. Поэтому $|T_x \cap H| = |H^\#| - |U_x \cap H| = f_x^2 - 1 - (\mu - 1)|H|$. Если $\Theta \in \text{Irr}(H)$, то $\mu = 1$ и $|T_x \cap H| = f_x^2 - 1 = |T_x|$, откуда $T_x \subset H$, $G = \langle T_x \rangle \subseteq H$ — противоречие.

2.16. Предложение. *Если G — VZ -группа 1-го рода, $\{1\} \neq N \triangleleft G$, то*

- (I) $\chi = \psi^G$, где $\psi \in \text{Irr}(N)$
- (II) $G \setminus N \in T_x$
- (III) $\chi \downarrow N$ неразветвлен; $\chi \downarrow N = \psi_1 + \dots + \psi_r$, где $\psi_1 = \psi$ и $\{\psi_i\}$ -класс характеров подгруппы N G — сопряженных с ψ ; $r = (G:N)$.

Доказательство. Случай $N = G$ тривиален. Если $N \neq G$, то в силу 2.15 и 2.12 характер $\chi \downarrow N$ приводим и неразветвлен. Пусть ψ — неприводимая компонента $\chi \downarrow N$, I_ψ -группа инерции ψ , $r = (G:I_\psi)$, $G = \bigcup_{i=1}^r I_\psi t_i$ ($t_1 = 1$) — разложение G по I_ψ , $\psi_i = \psi^{t_i}$ ($i = 1, \dots, r$). Тогда

$$(4) \quad \chi \downarrow N = \psi_1 + \dots + \psi_r,$$

откуда $r > 1$. Так как $|G| = (G:I_\psi)(I_\psi:N) = r|N|(I_\psi:N)$, $f_x = rf_\psi$, то $g_x = \frac{|N|}{f_\psi}(I_\psi:N)$,

откуда

$$(5) \quad |I_\psi \setminus N| |g_x|$$

Докажем, что $I_\psi = N$. Допуская противное, докажем сначала, что

$$(6) \quad D = I_\psi \setminus N \subseteq U_x.$$

Если $D \cap T_x \neq \emptyset$, $x \in D \cap T_x$, то $x^{|I_\psi \setminus N|} \in N$, откуда, ввиду (5), 2.8 и 2.9, $x \in N$ — противоречие. Следовательно, $D \cap T_x = \emptyset$, откуда и вытекает (6). Ввиду $I_{\psi_i} = I_{\psi_i}^{t_i}$ ($i = 1, \dots, r$) из (6) следует

$$(7) \quad D_i = D_i^{t_i} = I_{\psi_i} \setminus N \subseteq U_x \setminus N \quad (i = 1, \dots, r).$$

Докажем, что подмножества D_i ($i = 1, \dots, r$) попарно не пересекаются. Так как $|D_i| = |D|$ ($i = 1, \dots, r$), то $\sum_{i=1}^r |D_i| = r|D| = r|I_\psi| - r|N| = |G| - r|N|$. С другой стороны, в силу (4), $|G| - r|N| = \sum_{x \in G} |\chi(x)|^2 - \sum_{x \in N} |\chi(x)|^2 = \sum_{x \in G \setminus N} |\chi(x)|^2 =$ числу $|U_x \setminus N|$ унитарных элементов входящих в $G \setminus N$. Следовательно,

$$(8) \quad \sum_{i=1}^r |D_i| = |U_x \setminus N|.$$

Далее, так как χ индуцируется из I_ψ и $\{I_{\psi_i}\}$ — полная система (возможно, с повторениями) подгрупп сопряженных с I_ψ , то $G \setminus \bigcup_{i=1}^r I_{\psi_i} \subseteq T_x$. Поэтому

$\bigcup_{i=1}^r I_{\psi_i} \supseteq \hat{U}_x$, откуда $\bigcup_{i=1}^r D_i = \bigcup_{i=1}^r (I_{\psi_i} \setminus N) = \left(\bigcup_{i=1}^r I_{\psi_i} \right) \setminus N \supseteq U_x \setminus N$. Ввиду (7) отсюда вытекает, что $\bigcup_{i=1}^r D_i = U_x \setminus N$, откуда следует ввиду (8), что подмножества

D_i ($i = 1, \dots, r$) попарно не пересекаются. Следовательно, подгруппы $\{I_{\psi_i}\}$ попарно различны и образуют класс подгрупп сопряженных с I_ψ . Поэтому $(G : N_G(I_\psi)) = r = (G : I_\psi)$, откуда $N_G(D) = N_G(I_\psi) = I_\psi$. Следовательно,

$$(9) \quad N_G(D_i) = N_G(I_{\psi_i}) = I_{\psi_i} \quad (i = 1, \dots, r).$$

Очевидно также, что

$$(10) \quad I_{\psi_i} \cap I_{\psi_j} = N \quad (i \neq j).$$

Рассмотрим транзитивное представление σ группы G подстановками $\sigma(x) = \begin{pmatrix} D_1 & \dots & D_r \\ D_1^x & \dots & D_r^x \end{pmatrix}$ ($x \in G$) множества $\Omega = \{D_1, \dots, D_r\}$. Группа $\mathfrak{G} = \sigma(G)$ является

подстановочной группой Фробениуса¹⁰⁾. Действительно, если $\sigma(x)$ имеет две неподвижные «точки» D_i и D_j ($i \neq j$), то в силу (9) и (10) $x \in N_G(D_i) \cap N_G(D_j) = I_{\psi_i} \cap I_{\psi_j} = N$, откуда $\sigma(x) = 1$; вместе с тем, если $x \in D_i$, подстановка $\sigma(x)$ имеет единственную неподвижную точку D_i . Очевидно, $\text{Ker } \sigma = N$. Пусть $\tilde{\mathfrak{G}}$ — ядро

¹⁰⁾ Подстановочной группой Фробениуса мы называем строго транзитивную, но не регулярную, группу подстановок.

группы Фробениуса $\mathfrak{G}$, $F = \sigma^{-1}(\mathfrak{F})$ — полный прообраз $\mathfrak{F}$ в G . Если $\mathfrak{H}$ — стабилизатор точки D_i в группе $\mathfrak{G}$, то $\sigma^{-1}(\mathfrak{H}^\#) = D_i$. Так как $\mathfrak{G} \setminus \mathfrak{F} = \bigcup_{i=1}^r \mathfrak{H}_i^\#$, то $G \setminus F = \sigma^{-1}(\mathfrak{G} \setminus \mathfrak{F}) = \bigcup_{i=1}^r \sigma^{-1}(\mathfrak{H}_i^\#) = \bigcup_{i=1}^r D_i$. Ввиду (7) отсюда вытекает, что $G \setminus F \subseteq U_\chi$. Следовательно, $T_\chi \subset F$, откуда $N_\chi = \langle T_\chi \rangle \subseteq F \neq G$, что невозможно, так как G — VZ -группа 1-го рода. Противоречие показывает, что $I_\psi = N$. Отсюда вытекает, что $\chi = \psi^G$ и, следовательно, $G \setminus N \subseteq T_\chi$. Так как $I_\psi = N$, то $r = (G:N)$.

2.17. Следствие. Если G — VZ -группа 1-го рода, то G — монолит¹¹⁾; минимальный нормальный делитель (цоколь) S группы G порождается множеством всех ее унитарных элементов:

$$(11) \quad S = \langle U_\chi \rangle.$$

Доказательство. В силу 2.16 U_χ содержится в каждом отличном от $\{1\}$ нормальном делителе группы G . Следовательно, G — монолит. В частности, $U_\chi \subset Sc(G) = S$, откуда, ввиду нормальности U_χ , вытекает (11).

2.18. Следствие. Любая VZ -группа является монолитом.

Доказательство. Если G — VZ -группа с VZ -характером χ , то в силу 2.14 N_χ — VZ -группа 1-го рода с VZ -характером $\theta = \chi|_{N_\chi}$. Поэтому N_χ — монолит; $S = Sc(N_\chi)$, очевидно, минимальный нормальный делитель группы G . В силу 1.9 каждый минимальный нормальный делитель F группы G содержится в N_χ ; следовательно, $F \supseteq S$, откуда $F = S$. Таким образом, G — монолит с цоколем S .

2.19. Следствие. Если G — VZ -группа 1-го рода, $S = Sc(G)$, то $|G/S|$ делит f_χ .

Доказательство. В силу 2.16 $G \setminus S \subseteq T_\chi$. Если $S \neq G$, $x \in G \setminus S$, то, ввиду 2.8, $|x| |f_\chi$. Поэтому порядки всех элементов группы G/S делят f_χ , откуда $(|G/S|, g_\chi) = 1$. Так как $|G/S|$ делит $|G| = f_\chi \cdot g_\chi$, то $|G/S| \mid f_\chi$.

2.20. Предложение. Для любой VZ -группы G имеет место неравенство

$$(12) \quad f_\chi < g_\chi.$$

Если G — непростая VZ -группа 1-го рода, $S = Sc(G)$, $|G/S| = r$, то¹²⁾

$$(13) \quad g_\chi < \frac{r}{r-1} f_\chi \leq 2f_\chi,$$

$$(14) \quad |U_\chi| < \frac{f_\chi^2}{r-1} \leq f_\chi^2.$$

Доказательство. (12) вытекает из неравенства $f_\chi^2 < |G| = f_\chi \cdot g_\chi$. Пусть G — непростая VZ -группа 1-го рода. Так как $G \setminus S \subseteq T_\chi$, $S \supset U_\chi$, то $|T_\chi| \geq$

¹¹⁾ Монолит — группа, обладающая единственным минимальным нормальным делителем.

¹²⁾ Так как G непростой монолит, то $r > 1$.

$\cong |G \setminus S| = |S|(r-1) > |U_x|(r-1)$. Из $|T_x| = f_x^2 - 1 < f_x^2$, $|U_x| = |G| - |\hat{T}_x| = f_x(g_x - f_x)$ следует $f_x^2 > f_x(g_x - f_x)(r-1)$, откуда вытекает (13). Из (13) и равенства $|U_x| = f_x(g_x - f_x)$ вытекает (14).

2.20. Следствие. Если естественный VZ -характер χ^{13} Z -группы G является VZ -характером 1-го рода, то $F(G) = \{1\}$ влечет простоту группы G .

Доказательство. Если $n+1$ — степень Z -группы G , то $f_x = n$. Пусть N — стабилизатор одной из точек переставляемых группой G . Так как $F(G) = \{1\}$, то N -группа Фробениуса степени n . Если K — ядро N , H — дополнительный множитель N , $|H| = j$, то $|K| = n$, $j|n-1$. Так как $(G:N) = n+1$, то $|G| = n(n+1)j = f_x(f_x+1)j$. Следовательно, $g_x = (f_x+1)j > f_x j \cong 2f_x$, откуда, ввиду (13), вытекает простота G .

2.21. Предложение. Пусть G — VZ -группа с VZ -характером χ , обладающая следующими свойствами:

- (I) G содержит связную подгруппу H порядка f_x .
- (II) Множество T_x несвязно.

Тогда G — V -группа степени f_x+1 ; если, в частности, $N_G(H) = H$, то G — дважды транзитивная группа Фробениуса¹⁴). Обратно, всякая Z -группа обладает VZ -характером χ и подгруппой H удовлетворяющим условиям (I) и (II).

Доказательство. С точностью до терминологии предложение 2.21 совпадает с теоремой 3 статьи [18] (см. также доказательство этой теоремы).

2.22. Предложение. Если G — непростая VZ -группа с VZ -характером χ , то

- (I) $f = f_x$ — максимальная степень неприводимых характеров группы G ; χ — единственный неприводимый характер группы G имеющий степень f .
- (II) χ принимает на $G^\#$ значения 0, -1 и, быть может, $+1$. Значение « $+1$ » выпускается тогда и только тогда, когда G — дважды транзитивная группа Фробениуса.

Доказательство. Пусть $\{\chi_i\}_{1 \leq i \leq k}$ — полная система неприводимых характеров группы G , $\chi_1 = \chi$. Тогда $|U_x| = |G| - |\hat{T}_x| = |G| - f_x^2 = \sum_{i=2}^k \{\chi_i(1)\}^2$, откуда в силу (14), $\sum_{i=2}^k \{\chi_i(1)\}^2 < f_x^2$. Следовательно, $\chi_i(1) < f_x$ ($i \geq 2$), что доказывает (I). Так как $\bar{\chi}(1) = \chi(1) = f_x$, то, ввиду (I), $\bar{\chi} = \chi$. Поэтому χ принимает на U_x значения ± 1 . Поскольку $0 = \sum_{x \in G} \chi(x) = f_x + \sum_{x \in U_x} \chi(x)$, то значение « -1 » принимается обязательно. Если значение « $+1$ » выпускается, то $|U_x| = - \sum_{x \in U_x} \chi(x) = f_x$. Так как $|U_x| = f_x(g_x - f_x)$, то $g_x = f_x + 1 = |\hat{U}_x|$. С другой стороны, из $|U_x| = f_x$, ввиду 1.5, вытекает, что U_x — G -класс. Поэтому $x \in U_x$ влечет $|C_G(x)| =$

¹³) $\chi = \chi_s - 1_G$, где χ_s — естественный подстановочный характер группы G .

¹⁴) Т. е. G изоморфна дважды транзитивной подстановочной группе Фробениуса.

$= \frac{|G|}{|U_x|} = \frac{|G|}{f_x} = g_x = |\hat{U}_x|$. Так как, ввиду 2.4, $C_G(x) \subseteq \hat{U}_x$, то $C_G(x) = \hat{U}_x$. Таким образом, $\hat{U}_x \triangleleft G$, откуда вытекает, что G -группа Фробениуса с ядром $\hat{U}_x$. Так как $(G:\hat{U}_x) = f_x = |\hat{U}_x| - 1$, то G — дважды транзитивная группа Фробениуса. Каждая такая группа обладает VZ -характером, принимающим на $G^\#$ значения 0 и -1 .

2.23. Предложение. Если G — VZ -группа с VZ -характером χ четной степени, то

(I) χ принимает на $G^\#$ значения 0, -1 и, возможно, $+1$. Значение « $+1$ » выпускается лишь если G — дважды транзитивная группа Фробениуса.

(II) Инволюции группы G сопряжены.

(III) Централизаторы инволюций группы G являются холловскими подгруппами порядка f_x .

(IV) G — VZ -группа 1-го рода.

Доказательство. В силу 2.4 и 2.7 характер χ и подмножества $A = T_x$, $B = U_x$ удовлетворяют условиям леммы 1.11, откуда (с учетом доказательства 2.22 (II)) и вытекают утверждения (I)–(IV).

2.24. Следствие. Если G — VZ -группа с VZ -характером χ четной степени, то G является Z -группой степени $f_x + 1$ тогда и только тогда, когда T_x не-связно.

Доказательство. С точностью до терминологии 2.24 в основном совпадает с утверждением 3.15 статьи [18].

2.25. Предложение. При выполнении условий предложения 2.23 централизаторы инволюций группы G либо нильпотентны, либо совпадают со своими нормализаторами.

Доказательство. Пусть $u \in I(G)$, $H = C_G(u)$, $N = N_G(H)$. Если $N \neq H$, $x \in (N \setminus H) \cap T_x$, то $|x| = f_x$. Так как $|H| = f_x$, $H^x = H$, то $H \langle x \rangle < G$, причем $|H \langle x \rangle| = f_x^2$. Поэтому $(|H \langle x \rangle|, g_x) = 1$, откуда $|H \cdot \langle x \rangle| = f_x$. Так как $|H| = f_x$, то $H \cdot \langle x \rangle = H$, что невозможно, ввиду $x \notin H$. Следовательно, $N \setminus H \subseteq U_x$. Так как $H \subseteq \hat{T}_x$, то элементы $N \setminus H$ действуют на H регулярно. Поэтому N -группа Фробениуса с ядром H , откуда вытекает нильпотентность H .

§ 3. VZ -группы с тривиальной подгруппой Фиттинга

3.1. Предложение. Цоколь S VZ -группы с тривиальной подгруппой Фиттинга является нециклической простой группой.

Доказательство. Вытекает из 2.4 и леммы 2.3 статьи [18].

3.2. Предложение. Если G — непростая VZ -группа 1-го рода, $F(G) = \{1\}$ и f_x нечетно, то

- (I) χ принимает на $G^\#$ значения 0, 1, -1.
 (II) $|I(G)| = f_\chi$.
 (III) Инволюции группы G образуют унитарный G -класс.
 (IV) $x \in I(G)$ влечет $|C_G(x)| = g_\chi$.
 (V) $x \in U_\chi \setminus I(G)$ влечет $\chi(x^2) = +1$. Таким образом, характер χ на унитарных элементах, являющихся квадратами, принимает значение «+1».

Доказательство. (I) следует из 2.22. Для доказательства остальных утверждений воспользуемся формулой (2). Обозначив ее левую часть через σ , получим $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, где $\sigma_1 = \sum_{x \in T_\chi} \chi(x^2) = f_\chi + \sum_{x \in T_\chi} \chi(x^2)$, $\sigma_2 = \sum_{x \in U_\chi \setminus I(G)} \chi(x^2)^{15}$, $\sigma_3 = \sum_{x \in I(G)} \chi(x^2)$. Так как T_χ замкнуто и f_χ нечетно, то $x \in T_\chi$ влечет $x^2 \in T_\chi$. Поэтому $\sigma_1 = f_\chi$. Замечая, что $\sigma_3 = f_\chi |I(G)|$, получаем

$$(15) \quad \sigma = f_\chi \{1 + |I(G)|\} + \sigma_2.$$

Если $x \in U_\chi \setminus I(G)$, то ввиду замкнутости U_χ , $x^2 \in U_\chi$; поэтому $\chi(x^2) = \pm 1$. Таким образом, $\sigma_2 \equiv -|U_\chi \setminus I(G)|$ и (15) дает: $\sigma \equiv f_\chi \{1 + |I(G)|\} - |U_\chi \setminus I(G)| = f_\chi \{1 + |I(G)|\} + |I(G)| - |U_\chi|$. Так как в силу 2.19 $r = |G/S|$ нечетно, а группа G непростая, то $r \geq 3$. Из (14) поэтому следует $|U_\chi| < \frac{f_\chi^2}{2}$. Следовательно

$$(16) \quad \sigma > f_\chi \{1 + |I(G)|\} + |I(G)| - \frac{f_\chi^2}{2}.$$

Пусть C_i ($i=1, \dots, l$)-классы инволюций группы G . Так как $I(G) \subset U_\chi$, то в силу 1.5 $f_\chi |C_i|$ ($i=1, \dots, l$). Поэтому $|I(G)| = \sum_{i=1}^l |C_i|$ делится на f_χ . Полагая $|I(G)| = f_\chi m$ ($m \in \mathbb{Z}, m \geq 1$) из (16) получаем: $\sigma > f_\chi(m+1) + \frac{f_\chi^2}{2}(2m-1) > 0$.

Отсюда, ввиду (2), $\sigma = |G|$, и, следовательно, $f_\chi(m+1) + \frac{f_\chi^2}{2}(2m-1) < |G|$. Так как, ввиду (13), $|G| = f_\chi g_\chi < \frac{3}{2} f_\chi^2$, то $f_\chi(m+1) + \frac{2m-1}{2} f_\chi^2 < \frac{3}{2} f_\chi^2$. Поэтому $m=1$, откуда следует, что $I(G)$ — G -класс и $|I(G)| = f_\chi$. Это доказывает (II) и (III), а потому и (IV). Ввиду (II) и равенства $\sigma = |G|$, соотношение (15) принимает вид: $|G| = f_\chi(f_\chi + 1) + \sigma_2$. Замечая, что $\sigma_2 \equiv |U_\chi \setminus I(G)| = |U_\chi| - |I(G)|$, получаем с помощью (3): $|G| \equiv f_\chi(f_\chi + 1) + |U_\chi| - f_\chi = f_\chi^2 + |U_\chi| = |G|$. Следовательно, $\sigma_2 = |U_\chi \setminus I(G)|$, откуда вытекает, что $x \in U_\chi \setminus I(G)$ влечет $\chi(x^2) = 1$. Тем самым, доказано (V).

3.3. Теорема. Если G — VZ -группа 1-го рода, $F(G) = \{1\}$ и f_χ нечетно, то G — нециклическая простая группа.

¹⁵ Так как $F(G) = \{1\}$, $|G| > 1_2$ то $|G|$ четно. Поэтому $2|g_\chi|$ и, следовательно, ввиду 2.8, $I(G) \subset U_\chi$.

Доказательство. Предполагая, что группа G не является простой, рассмотрим две возможности: $f_x \equiv 3 \pmod{4}$ и $f_x \equiv 1 \pmod{4}$.

$$(I) \quad f_x = 4n + 3 \quad (n \in \mathbb{Z}, n \geq 0).$$

Случай 1: $\mathfrak{S}_2$ -подгруппы группы G являются элементарными абелевыми группами.

Так как $2|g_x$, то в силу 2.6 $\mathfrak{S}_2$ -подгруппы группы G являются U -подгруппами и, следовательно, ввиду 2.17, содержатся в S . Так как S — нециклическая простая группа и ее $\mathfrak{S}_2$ -подгруппы — элементарные абелевы 2-группы, то на основании [12] возможны лишь следующие случаи: (1) $S \cong PSL(2, q)$, $q \equiv 3, 5 \pmod{8}$; (2) $S \cong PSL(2, 2^n)$; (3) $S \cong J_1$; (4) S — простая группа типа Ри. Каждая из перечисленных групп, а потому и S , имеет единственный класс инволюций, что находится в противоречии с тем, что группа G (в силу 3.2) также обладает единственным классом инволюций. Действительно, так как $I(G) \subset U_x \subset S$, то $I(G) = I(S)$. Поэтому, $x \in I(G)$ влечет $(G : C_G(x)) = |I(G)| = |I(S)| = (S : C_S(x))$. Замечая, что $C_G(x) \subseteq U_x \subset S$, получаем $C_G(x) = C_S(x)$. Следовательно, $(G : C_G(x)) = (S : C_S(x))$, откуда $G = S$, что противоречит простоте группы G .

Случай 2: $\mathfrak{S}_2$ -подгруппы группы G не являются элементарными абелевыми группами.

В этом случае существует такой элемент $h \in G$, что $|h| = 4$. Пусть $H = \langle h \rangle = \{1, h, h^2, h^3\}$. Если $k = (1_H, \chi \downarrow H)_H$, то $4k = k|H| = \sum_{x \in H} \chi(x) = f_x + \chi(h) + \chi(h^2) + \chi(h^3)$. Так как $h \in U_x$, то в силу 3.2 $\chi(h) = \chi(h^{-1}) = \chi(h^3) = \varepsilon = \pm 1$, $\chi(h^2) = +1$. Поэтому $2k = \frac{1}{2}(f_x + 1 + 2\varepsilon) = 2(n+1) + \varepsilon$ — противоречие.

$$(II) \quad f_x = 4n + 1 \quad (n \in \mathbb{Z}, n \geq 1).$$

Докажем, что

$$(16) \quad g_x = 2(f_x - 1).$$

Полагая $g_x = 2^2 v$ ($\lambda \geq 1$, v нечетно), допустим сначала, что $v > 1$. Пусть $p \in \pi(v)$, p^x — p -часть v , P — любая $\mathfrak{S}_p$ -подгруппа группы G . Так как $|P| \nmid g_x$, то в силу 2.6 P — U -подгруппа. Ввиду $p \neq 2$, все элементы P^* являются квадратами. Поэтому в силу 3.2 $\chi(x) = +1$, если $x \in P^*$. Полагая $k = (1_P, \chi \downarrow P)_P$, получим: $k|P| = \sum_{x \in P} \chi(x) = f_x + |P| - 1$. Следовательно, $p^x |f_x - 1$, откуда, ввиду произвольности $p \in \pi(v)$:

$$(17) \quad v | f_x - 1.$$

Если $v = 1$, (17) выполняется тривиальным образом. Далее, из 2.10 вытекает, что $2^{\lambda-1} \mid (f_x - 1) \frac{f_x + 1}{2}$. Так как $\frac{f_x + 1}{2} = 2n + 1$, то $2^{\lambda-1} \mid f_x - 1$, откуда, ввиду (17), $2^{\lambda-1} v | f_x - 1$, и, следовательно, $g_x | 2(f_x - 1)$. Полагая $2(f_x - 1) = g_x \cdot l$ ($l \in \mathbb{Z}$, $l \geq 1$) при $l > 1$ получим $g_x \equiv f_x - 1$, что противоречит (12). Таким образом, $l = 1$ и, следовательно, имеет место (16). Равенство (16), однако, невозможно. Действительно, учитывая вытекающее (ввиду $r \geq 3$) из (13) неравенство $g_x <$

$< \frac{3}{2} f_x$, получаем из (16): $f_x < 4$. Так как f_x нечетно, то $f_x = 3$, что противоречит сравнению $f_x \equiv 1 \pmod{4}$.

Таким образом, предположение о непростоте группы G во всех случаях приводит к противоречию. Это доказывает утверждение теоремы. 34. В случае, если f_x четно, строение VZ -группы G описывается предложением 2.23. При дополнительном условии $F(G) = \{1\}$ утверждение 2.23 (I) переходит, очевидно, в следующее: VZ -характер χ принимает на $G^\#$ значения 0, -1 , и $+1$. На основании 2.25 подгруппы $C_G(x)$ ($x \in I(G)$) либо нильпотентны, либо самонормализуются. В последнем случае удастся получить полное описание VZ -групп с четным f_x .

3.5. Лемма (Виландт [13]). *Если конечная группа G обладает холловской нильпотентной π -подгруппой H , то любая π -подгруппа группы G содержится в одной из подгрупп сопряженных с H .*

3.6. Лемма (Судзуки [11]). *Пусть G — простая (CIT)-группа¹⁶. Тогда G изоморфна одной из следующих групп: $PSL(2, q)$ ($q = 2^\lambda$, $\lambda > 1$), $Sz(q)$ ($q = 2^{2\lambda+1}$), $PSL(2, p)$ (p — простое число Ферма или Мерсенна), $PSL(2, 9) \cong A_6$, $PSL(3, 4)$.*

3.7. Лемма ([10]). *Если $G \cong PSL(2, q)$, $q = p^n$ (p — простое число), то $|G| = \delta_p q(q^2 - 1)$, где $\delta_p = \frac{3 + (-1)^p}{4}$.*

3.8. Предложение. *Если G VZ -группа, $F(G) = \{1\}$, f_x четно и централизаторы инволюций группы G не совпадают с их нормализаторами, то G — простая группа.*

Доказательство. Если $x \in I(G)$, то в силу 2.23 $H = C_G(x)$ — холловская π -подгруппа группы G , где $\pi = \pi(f_x)$. Так как H нильпотентна, то ввиду 2.6 и 3.5 каждая T -подгруппа группы G содержится в одной из подгрупп сопряженных с H . В силу 2.8 отсюда вытекает, что $\hat{T}_x = \bigcup_{g \in G} H^g$. Следовательно, $f_x^2 = |\hat{T}_x| < k \cdot |H|$, где $k = (G : N_G(H)) = \frac{(G : H)}{(N_G(H) : H)} \leq \frac{1}{2} (G : H)$. Поэтому $f_x^2 < \frac{1}{2} |G|$. С другой стороны, если группа G не является простой, то в силу (13) $\frac{1}{2} |G| = \frac{1}{2} f_x g_x < f_x^2$. Противоречие показывает, что G — простая группа.

3.9. Предложение. *Если G — VZ -группа, $F(G) = \{1\}$, f_x четно и централизаторы инволюций группы G нильпотентны, то $f_x = 2^\lambda$ ($\lambda \geq 1$)¹⁷.*

Доказательство. Если G Z -группа степени $f_x + 1$, утверждение вытекает из результатов Фейта [5]. Если G не является Z -группой степени $f_x + 1$,

¹⁶) (CIT)-группой называется конечная группа, централизаторы инволюций которой являются 2-подгруппами.

¹⁷) Утверждение остается верным также и при $F(G) \neq \{1\}$ (см. § 4 настоящей работы).

группы G , $|Q|=m$. Так как, ввиду 2.23, $|H|=f_x$, то в силу 2.6 H — максималь-
то в силу 2.24 T_x связно. Допустим, что $f_x=2^\lambda m$, где $m \in \mathbb{Z}$, m нечетно, $m > 1$.
Если, как и выше, $H=C_G(x)$ ($x \in I(G)$), то $H=P \times Q$, где $P \cong \mathfrak{S}_2$ -подгруппа
ная T -подгруппа группы G . Отсюда в силу 2.4 вытекает, что $y \in Z(H)^\#$ влечет
 $C_G(y)=H$. В частности, если $u \in Z(P)^\#$, $v \in Z(Q)^\#$, то

$$(18) \quad C_G(u) = C_G(v) = H.$$

Если $w \in H^\#$, то $w \in T_x$ и, следовательно, $C_G(w)$ — T -подгруппа. Так как
в силу 3.5 и 2.6 каждая T -подгруппа группы G содержится в одной из подгрупп
 H^g ($g \in G$), то $C_G(w)$ нильпотентна. Так как $u, v \in C_G(x)$, то $C_G(w)$ -подгруппа
четного порядка, не являющаяся 2-группой. Если $C_G(u)=P_1 \times Q_1$, где P_1 —
 $\mathfrak{S}_2$ -подгруппа группы $C_G(u)$, Q_1 -подгруппа нечетного порядка, то $u \in P_1$, $v \in Q_1$.
Поэтому $P_1 \subset C_G(v)$, $Q_1 \subset C_G(u)$, откуда в силу (18) $C_G(w)=P_1 \times Q_1 \subseteq H$. Это
показывает, что подмножество $H^\#$ замкнуто¹⁸⁾. Так как $H^\# \subseteq T_x$ и T_x связно,
отсюда вытекает, что $H^\# = T_x$. Это, однако, невозможно, так как $|H^\#|=f_x-1$,
 $|T_x|=f_x^2-1 > f_x-1$. Следовательно, $m=1$ и $f_x=2^\lambda$.

3.10. Теорема. Пусть G — VZ -группа, $F(G)=\{1\}$, f_x четно. Если централи-
заторы инволюций группы не совпадают с их нормализаторами, то G является
 ZT -группой¹⁹⁾ (т. е. изоморфна одной из групп $PSL(2, q)$ ($q=2^\lambda$, $\lambda \geq 1$), $Sz(q)$
($q=2^{2\lambda+1}$), либо изоморфна одной из простых групп $PSL(2, 5)$, $PSL(2, 7)$,
 $PSL(3, 4)$).

Доказательство. Из 3.8 и 3.9 следует, что G — простая (CIT)-группа.
Следовательно, в силу 3.6 G является ZT -группой (в этом случае G действи-
тельно обладает требуемыми свойствами), либо изоморфна одной из групп
 $PSL(2, p)$ (p — простое число Ферма или Мерсенна), $PSL(2, 9)$, $PSL(3, 4)$. Таб-
лицы характеров групп $PSL(2, p)$ показывают, что группа $PSL(2, p)$ (p —
простое число Ферма или Мерсенна) обладает VZ -характером четной степени
лишь при $p=5$ и $p=7$: $PSL(2, 5) \cong A_5$ имеет, наряду с естественным VZ -харак-
тером степени 5, VZ -характер степени 4, $PSL(2, 7)$ имеет, наряду с естествен-
ным VZ -характером степени 7, VZ -характер степени 8. Случай $G \cong PSL(2, 9)$
невозможен. Действительно, в силу 3.7 $|G|=|PSL(2, 9)|=\frac{1}{2} 9(9^2-1)=2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$,
откуда в силу 3.9 $f_x=2^3$, $g_x=3^2 \cdot 5$.

Следовательно, $f_x^2 \not\equiv 1 \pmod{g_x}$, что противоречит 2.10. $PSL(3, 4)$ является
группой рассматриваемого типа, ибо имеет VZ -характер степени 64, а центра-
лизаторы ее инволюций (совпадающие с $\mathfrak{S}_2$ -подгруппами) не совпадают с их
нормализаторами. Это завершает доказательство теоремы.

¹⁸⁾ Иначе говоря, H — сильно изолированная подгруппа.

¹⁹⁾ ZT -группа — Z -группа нечетной степени имеющая тривиальную подгруппу Фиттинга.

§ 4. VZ -группы с нетривиальной подгруппой Фиттинга

В дальнейшем, как и выше, G — конечная группа.

4.1. Теорема. Следующие утверждения, равносильны

(I) G — VZ -группа 1-го рода, $F(G) \neq \{1\}$.

(II) G — дважды транзитивная группа Фробениуса.

Доказательство. Пусть G — VZ -группа 1-го рода, χ — ее VZ -характер, $F(G) \neq \{1\}$, $S = Sc(G)$. Так как G — монолит (2.17), то $S \subseteq F(G)$; поэтому S — элементарная абелева p -группа ($p \in \pi(G)$). Так как $S \subseteq \hat{U}_\chi$ (см. 2.13) и $G \setminus S \subseteq T_\chi$, то $S = \hat{U}_\chi$, $G \setminus S = T_\chi$. Поэтому G -группа Фробениуса с ядром S . Если H — дополнительный множитель, то $G = S \cdot H$, $|H||S^\#|$ и $H^\# \subset T_\chi$. Предложение 2.16 в применении к $N = S$ дает: $\Theta = \chi \downarrow S = \psi_1 + \dots + \psi_r$, где $\psi_i \in \text{Irr}(S)$ ($i = 1, \dots, r$), $r = (G:S)$. Так как S абелева, то $f_{\psi_i} = 1$ ($i = 1, \dots, r$). Поэтому $f_\chi = r = (G:S) = |H|$. Так как $\sum_{x \in S} |\chi(x)|^2 = r|S| = f_\chi|S|$ и $S = \hat{U}_\chi$, то $\sum_{x \in S} |\chi(x)|^2 = f_\chi^2 + |S| - 1$. Поэтому $|S| = f_\chi + 1 = |H| + 1$. Следовательно, G — дважды транзитивная группа Фробениуса. Таким образом, (I) $\Rightarrow$ (II). Если G — дважды транзитивная группа Фробениуса степени $f+1$, S — ее ядро, χ — естественный VZ -характер, то

$$(19) \quad \chi(x) = \begin{cases} f, & \text{если } x = 1, \\ -1, & \text{если } x \in S^\#, \\ 0, & \text{если } x \in G \setminus S. \end{cases}$$

Так как $T_\chi = G \setminus S$, то $\langle T_\chi \rangle = G$, т. е. χ — VZ -характер 1-го рода. Наконец, $F(G) = S \neq \{1\}$. Таким образом, (II) $\Rightarrow$ (I).

4.2. Примечание. Если G — дважды транзитивная группа Фробениуса с ядром S и дополнением H , то $|H| = |S^\#|$. Поэтому $S^\# = x^H$ ($x \in S^\#$), откуда вытекает, что $S^\#$ — G -класс. Следовательно S — минимальный нормальный делитель G (как легко видеть — единственный). Естественный VZ -характер χ группы G — единственный ее точный неприводимый характер, ибо $f_\chi^2 + \sum_{\chi' \in \text{Irr}(G'), \text{Ker } \chi' \neq \{1\}} \{\chi'(1)\}^2 = f_\chi^2 + |G/S| = f_\chi^2 + f_\chi = |G|$.

4.3. Лемма²⁰⁾. Пусть G — двойная группа Фробениуса, F и F_1 — ее левый и правый фробениусовы множители, S — ядро F , H и K — ядро и дополнение F_1 . Если F — дважды транзитивная группа Фробениуса, то (I) S — элементарная абелева 2-группа, $|S| = 2^\alpha$ ($\alpha \geq 2$); (II) $|H| = 2^\alpha - 1$; (III) $K = 2^\beta m$, $0 \leq \beta \leq 1$, $m | 2^{\alpha-1} - 1$.

4.4. Теорема. Следующие утверждения равносильны: (I) G — VZ -группа 2-го рода, $F(G) \neq \{1\}$; (II) G — двойная группа Фробениуса с дважды транзитивным левым фробениусовым множителем.

²⁰⁾ Формулировка этой леммы использует терминологию введенную в [18]. Доказательство легко вытекает из свойств двойных групп Фробениуса изложенных в [18].

Доказательство. Если выполнено (I) и χ — VZ -характер G , то в силу 1.2 N_χ — VZ -группа 1-го рода с VZ -характером $\Theta = \chi|_{N_\chi}$. Из 1.8 следует, что $D = F(G) \cap N_\chi \neq \{1\}$, откуда $F(N_\chi) \neq \{1\}$. В силу 4.1. N_χ — дважды транзитивная группа Фробениуса. Если S и H — её ядро и дополнение, то²¹⁾

$$(20) \quad N_\chi = S \cdot H$$

и в силу леммы 2.13 статьи [18]

$$(21) \quad G = S \cdot N_G(H)$$

Так как $N_\chi \neq G$, то $N_G(H) \neq H$. Так как (см. доказательство 4.1), $|H| = f_\Theta = f_\chi$, то в силу 2.6 H — максимальная T -подгруппа группы G , откуда $N_G(H) \setminus H \subseteq U_\chi$. Ввиду 2.4, отсюда следует, что $N_G(H)$ -группа Фробениуса с ядром H . Ввиду (20) и (21), отсюда вытекает, что G — двойная группа Фробениуса, левым фробениусовым множителем которой является дважды транзитивная группа Фробениуса N_χ , а правым — $N_G(H)$. Таким образом, (I) $\Rightarrow$ (II). Пусть, обратно, G — двойная группа Фробениуса с дважды транзитивным левым фробениусовым множителем F и правым фробениусовым множителем $F_1 = N_G(H)$, где H — дополнительный множитель F ; пусть S — ядро F , K — дополнительный множитель F_1 . В силу 4.1 группа F обладает VZ -характером 1-го рода Θ . Из 4.3 и доказательства 4.1 следует

$$(22) \quad \begin{cases} T_\Theta = F \setminus S, & U_\Theta = S^\# \\ |S| = f_\Theta + 1, & |H| = f_\Theta = 2^\alpha - 1 \quad (\alpha \geq 0), \end{cases}$$

$$(23) \quad \Theta(x) = \begin{cases} f_\Theta, & \text{если } x = 1 \\ -1, & \text{если } x \in S^\# \\ 0, & \text{если } x \in F \setminus S. \end{cases}$$

Из (23) вытекает G — инвариантность Θ . Ввиду цикличности $G/F \cong K$ характер Θ можно продолжить до характера $\chi \in \text{Irr}(G)$, который, как будет доказано, является VZ -характером 2-го рода группы G . Определим эпиморфизм $\varphi: G \rightarrow F_1$ ²²⁾, полагая $\varphi(x) = v$, если $x = u \cdot v$ ($u \in S, v \in F_1$). Если $k = |K|$, то ввиду $G/F \cong K$, из $x \in G \setminus F$ следует $x^k \in F$, откуда $\varphi(x^k) \in \varphi(F) = H$. Так как H — ядро F_1 и $\varphi(x) \in C_{F_1}(\varphi(x^k))$, то из $\varphi(x^k) \neq 1$ следовало бы, что $\varphi(x) \in H$, откуда $x \in F$ — противоречие. Следовательно, $\varphi(x^k) = 1$, откуда $x^k \in S$. Так как, ввиду 4.3, S — элементарная абелева 2-группа, то $x^{2k} = 1$. Таким образом, $x \in G \setminus F$ влечет

$$(24) \quad x^{2k} = 1.$$

Допустим сначала, что k нечетно. Пусть $k = p_1^{r_1} \dots p_r^{r_r}$ — каноническое разложение k на простые множители, P_i — $\mathfrak{S}_{P_i}$ -подгруппа циклической группы K ($i = 1, \dots, r$). Очевидно, P_i также $\mathfrak{S}_{P_i}$ -подгруппа группы G . Положим $K_i = P_1 \times \dots \times P_i$, $G_i = F \cdot K_i$ ($i = 0, 1, \dots, r$), $K_0 = \{1\}$, $G_0 = F$. Очевидно, $G_i \triangleleft G$ ($i = 0, 1, \dots, r$). Индукцией по i докажем, что $G_i \setminus F \subset U_\chi$ ($i = 0, 1, \dots, r$). Если $i = 0$, это очевидно. Допустим, что $G_{i-1} \setminus F \subset U_\chi$ для некоторого $i \geq 1$. Дока-

²¹⁾ $A \cdot B$ означает полупрямое произведение нормального делителя A с группой B .

²²⁾ Напомним, что $G = S \cdot F_1$.

жем, что χ не обращается в нуль на $G_i \setminus G_{i-1}$. Допустим, что $x \in G_i \setminus G_{i-1}$, $\chi(x) = 0$. Полагая $k_i = |K_i| = p_1^{a_1} \dots p_i^{a_i}$ и применяя (24) к G_i и элементу $x \in G_i$, получим $x^{2k_i} = 1$. Пусть $x = s \cdot x_1 \dots x_i$ — разложение x на примарные компоненты: $s, x_j \in \langle x \rangle$, $s^2 = 1$, $x_j^{p_j^{a_j}} = 1$ ($j = 1, \dots, i$). Тогда, очевидно, $x' = s \cdot x_1 \dots x_{i-1} \in G_{i-1}$. Если $x' \in F$, то $x'S$, откуда ввиду (22), $x' \in \hat{U}_\theta \subseteq \hat{U}_x$. Если же $x' \notin F$, то $x' \in G_{i-1} \setminus F \subseteq U_\chi$ по индуктивному предположению. Таким образом, всегда $x' \in \hat{U}_x$. Пусть ε — первообразный корень из единицы степени $p_i^{a_i}$, $\lambda = 1 - \varepsilon$. Так как $x = x'x_i = x_ix'$ и $x_i^{p_i^{a_i}} = 1$, то, как легко показать, $\chi(x) \equiv \chi(x') \pmod{\lambda}$. Так как $\chi(x) = 0$, то $\chi(x') \equiv 0 \pmod{\lambda}$. Поскольку $x' \in \hat{U}_x$, то $\chi(x') = f_\chi$, либо $\chi(x')$ — корень из 1. В первом случае $f_\chi \equiv 0 \pmod{\lambda}$ и, следовательно, $f_\theta = f_\chi \equiv 0 \pmod{p_i}$, откуда, ввиду (22), $|H| \equiv 0 \pmod{p_i}$, что невозможно, так как $(|H|, |K|) = 1$. Второй случай невозможен так как λ — необратимый элемент кольца целых алгебраических чисел поля $\mathbb{Q}(\varepsilon)$. Итак, χ не обращается в нуль на $G_i \setminus G_{i-1}$. Следовательно, $\chi_i = \chi|_{G_i}$ (23) не имеет нулей в $G_i \setminus G_{i-1}$, откуда следует, ввиду 1.2, что $G_i \setminus G_{i-1} \subseteq U_{\chi_i} \subseteq U_\chi$. Поэтому $G_i \setminus F = (G_{i-1} \setminus F) \cup (G_i \setminus G_{i-1}) \subseteq U_\chi$. Тем самым, включение $G_i \setminus F \subseteq U_\chi$ доказано для всех $i \leq r$. В частности, $G \setminus F \subseteq U_\chi$. Следовательно, χ — VZ -характер 2-го рода группы G . Допустим теперь, что k четно. Так как $k||H^*|$ и $|H^*| = 2^x - 2$, то каноническое разложение k на простые множители имеет вид: $k = p_0^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, где $p_0 = 2$, $\alpha_0 \leq 1$. Обозначив через $P_i \trianglelefteq_{P_i}$ подгруппу группы K , положим $K_i = P_0 \times P_1 \times \dots \times P_i$, $G_i = F\lambda K_i$ ($i = 0, 1, \dots, r$), где $K_0 = P_0$, $G_0 = F\lambda P_0$. Докажем, что $G_i \setminus F \subseteq U_\chi$ ($i = 0, 1, \dots, r$). Допустим сначала, что $i = 0$. Применяя (24) к G_0 и элементу $x \in G_0 \setminus F$, получим $x^4 = 1$. Пусть Γ — неприводимое представление группы G , порождающее характер χ ; $\{\varepsilon_j\}$ — спектр матрицы $\Gamma(x)$, $\lambda = 1 - \sqrt{-1}$. Так как $\varepsilon_v \equiv 1 \pmod{\lambda}$, то $\chi(x) = \sum \varepsilon_j \equiv f_\chi \pmod{\lambda}$. Из $\chi(x) = 0$ поэтому следовало бы, что $f_\chi \equiv 0 \pmod{2}$ что противоречит равенству $f_\chi = 2^x - 1$. Таким образом, χ отличен от нуля на $G_0 \setminus F$, откуда вытекает, что $G_0 \setminus F \subseteq U_\chi$. Затем индукцией по i , как и выше, докажем, что $G_i \setminus F \subseteq U_\chi$ ($i = 0, 1, \dots, r$). В частности, $G \setminus F \subseteq U_\chi$ и, следовательно, χ — VZ -характер 2-го рода. Таким образом, все продолжения характера θ на группу G являются VZ -характерами 2-го рода последней. Так как $S \subset F(G)$, то $F(G) \neq \{1\}$. Это доказывает теорему.

4.5. Теорема. Двойные группы Фробениуса с дважды транзитивным левым фробениусовым множителем являются Z -группами.

Доказательство. Пусть G — двойная группа Фробениуса с дважды транзитивным левым фробениусовым множителем F и правым фробениусовым множителем F_1 . Если S — ядро F , то $F_1 = N_G(H)$, где H — один из дополнительных множителей F . Если χ — VZ -характер группы G , то (см. доказательство 4.4) $N_\chi = F$, $T_\chi = F \setminus S$, $U_\chi = S^* \cup \Delta_\chi$, где $\Delta_\chi = G \setminus N_\chi = G \setminus F$. В силу леммы 2.9 статьи [18] подгруппа H циклична и поэтому связана; в силу (22) $|H| = f_\theta = f_\chi$, где $\theta = \chi|_F$. Пусть $x \in H^*$. Так как $H^* \subseteq T_\chi$, то $C_G(x) \subseteq \hat{T}_\chi$, откуда, ввиду 2.6, $|C_G(x)| \mid f_\chi$. Так как (ввиду цикличности H) $C_G(x) \supseteq H$, отсюда

²³⁾ Очевидно, $\chi_i \in \text{Irr}(G_i)$.

следует, что $C_G(x) = H$. Таким образом, подмножество $H^\#$ связно и замкнуто, т. е. $H^\#$ — компонента связности группы G . Так как $|T_x| = f_x^2 - 1 > f_x = |H|$, то $H^\#$ — правильная часть T_x . Следовательно, T_x несвязно. Таким образом, группа G удовлетворяет условиям предложения 2.21. Поэтому G — Z -группа степени $f_x + 1 = 2^z$.

4.6. Следствие. Класс VZ -групп с нетривиальной подгруппой Фиттинга совпадает с классом Z -групп с нетривиальной подгруппой Фиттинга.

Литература

- [1] W. BURNSIDE, On an arithmetical theorem connected with roots of unity and its application to group characteristics, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), **1** (1904), 112—116.
- [2] R. BRAUER—K. A. FAULER, On groups of even order, *Ann. of Math.* **62** (1955), 565—583.
- [3] G. FROBENIUS—I. SCHUR, Über die reellen Darstellungen der endlichen Gruppen, *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss.* (1906), 186—208.
- [4] G. FROBENIUS, Über einen Fundamentalsatz der Gruppentheorie, II, *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss.* (1907), 428—437.
- [5] W. FEIT, On a class of double transitive permutation groups, *Illinois J. Math.* **4** (1960), 170—186.
- [6] W. FEIT, Characters of finite groups, *N. Y.* (1967).
- [7] W. FEIT, J. TOMPSON, Solvability of groups of odd order, *Pacif. J. Math.* **13** (1963), 771—1029.
- [8] P. X. GALLAGHER, Group characters and commutators, *Math. Z.* **79** (1962), 122—126.
- [9] P. X. GALLAGHER, Zeros of characters of finite groups, *J. Algebra* **4** (1966), 42—45.
- [10] W. R. SCOTT, Group Theory, *New Jersey*, (1964).
- [11] M. SUZUKI, Finite groups with nilpotent centralizers, *Trans. Amer. Math. Soc.* **99** (1961), 425—470.
- [12] J. H. WALTER, The characterisation of finite groups with Abelian Sylow 2-subgroup, *Ann. of Math.* (2), **89** (1969), 405—514.
- [13] H. WIELANDT, Zum Satz von Sylow, *Math. Z.* **60** (1954), 407—408.
- [14] Ч. Кортис, И. Райнер, Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, «Наука», Москва, 1969.
- [15] Ж. П. Серр, Линейные представления конечных групп, «МИР», Москва, 1970.
- [16] Э. М. Жмудь, О нулях групповых характеров. *Успехи математических наук* **32** (1977), 223—224.
- [17] А. И. Вейцблит, Э. М. Жмудь, «Связность» конечной группы и группы Цассенхауза. *Сообщение АН Грузинской ССР*, том **90** (1978).
- [18] Э. М. Жмудь, О понятии «связности» конечной группы. *Publ. Math. (Debrecen)*.

(Поступило 5. II. 1979)