

## Об одном свойстве полей групповых характеров

Э. М. ЖМУДЬ (Харьков)

Пусть  $G$  — конечная группа,  $\chi$  — ее неприводимый комплексный характер,  $\mathbf{Q}_A(\chi)$  — расширение поля  $\mathbf{Q}$  рациональных чисел, получающиеся посредством присоединения к  $\mathbf{Q}$  всех значений характера  $\chi$  на непустом подмножестве  $A \subseteq G$ ;  $\mathbf{Q}(\chi) = \mathbf{Q}_G(\chi)$  — абсолютное поле характера  $\chi$ .

В работе доказывается следующее утверждение:

**Теорема 1.** Если  $G = A_1 \cup A_2$ , где  $A_i \neq \emptyset$  ( $i=1, 2$ ), то по крайней мере одно из полей  $\mathbf{Q}_{A_i}(\chi)$  ( $i=1, 2$ ) совпадает с  $\mathbf{Q}(\chi)$ .

Введем дополнительно следующие обозначения:  $|G|$  — порядок группы  $G$ ;  $G^* = G \setminus \{1\}$ ;  $|g|$  — порядок элемента  $g \in G$ ; если  $x, y \in G$ , то  $x \sim y$  означает, что элементы  $x$  и  $y$  сопряжены;  $Z(H)$  — центр группы  $H$ ;  $x^g = g^{-1}xg$  ( $x, g \in G$ );  $\text{Irr}(G)$  — множество всех неприводимых комплексных характеров группы  $G$ ;  $X(G)$  — кольцо обобщенных характеров группы  $G$ ;  $\mathbf{Q}_m = \mathbf{Q}(\varepsilon)$ , где  $\varepsilon$  — комплексный первообразный корень  $m$ -й степени из единицы;  $\mathbf{K} = \mathbf{Q}_{|G|}$ ;  $\text{Gal}(A/\mathbf{K})$  — группа Галуа нормального расширения  $A$  поля  $\mathbf{K}$ ;  $\Gamma = \text{Gal}(\mathbf{K}/\mathbf{Q})$ ,  $\Gamma^{(x)} = \text{Gal}(\mathbf{K}/\mathbf{Q}(\chi))$ ,  $\Gamma_i^{(x)} = \text{Gal}(\mathbf{K}/\mathbf{Q}_{A_i}(\chi))$  ( $i=1, 2$ );  $(m, n)$  — наибольший общий делитель натуральных чисел  $m$  и  $n$ ;  $\mathbf{Z}$  — кольцо целых чисел.

Как известно,  $X(G)$  можно рассматривать как  $\mathbf{Z}\Gamma$ -модуль: поскольку  $\theta(g) \in \mathbf{K}$  для любых  $\theta \in X(G)$  и  $g \in G$ , то  $\xi\theta$  ( $\xi \in \mathbf{Z}\Gamma$ ) можно определить, полагая  $(\xi\theta)(g) = \xi(\theta(g))$ , где  $\xi$  рассматривается как линейный оператор, действующий на  $\mathbf{Q}$ -пространстве  $\mathbf{K}^*$ .

Изложенное ниже доказательство теоремы 1 использует метод, примененный Р. Брауэром [3, 4, 5] для доказательства теорем Блехфельдта—Бернсайда [1, 2] о значениях групповых характеров. Приступая к доказательству теоремы 1, допустим, что  $\mathbf{Q}_{A_i}(\chi) \neq \mathbf{Q}(\chi)$  ( $i=1, 2$ ). Тогда  $\Gamma_i^{(x)} \supset \Gamma^{(x)}$  ( $i=1, 2$ ) (включения строгие). Выбрав автоморфизмы  $\sigma_i$  ( $i=1, 2$ ) поля  $\mathbf{K}$  так, чтобы имело место  $\sigma_i \in \Gamma_i^{(x)} \setminus \Gamma^{(x)}$  ( $i=1, 2$ ), будем иметь

$$(1) \quad [(\sigma_1 - 1)(\sigma_2 - 1)]\chi = 0,$$

где  $(\sigma_1 - 1)(\sigma_2 - 1)$  понимается как элемент кольца  $\mathbf{Z}\Gamma$ , а характер  $\chi$  — как элемент  $\mathbf{Z}\Gamma$ -модуля  $X(G)$ . Действительно, так как группа  $\Gamma$  абелева, то  $(b_1 - 1)(\sigma_2 - 1) = (\sigma_2 - 1)(\sigma_1 - 1)$ . Если  $g \in A_1$ , то  $\chi(g) \in \mathbf{Q}_{A_1}(\chi)$ ; следовательно

\*) Можно также рассматривать  $\xi(\theta(g))$  как произведение элемента  $\xi \in \mathbf{Z}\Gamma$  на элемент  $\theta(g)$  модуля Галуа  $\mathbf{K}$ .

$(\sigma_1\chi)(g) = \sigma_1\{\chi(g)\} = \chi(g)$ , откуда  $\{[(\sigma_1-1)(\sigma_2-1)]\chi\}(g) = (\sigma_2-1)\{(\sigma_1-1)\chi(g)\} = (\sigma_2-1)(0) = 0$ . Если  $g \in A_2$ , то  $\chi(g) \in \mathbf{Q}_{A_2}(\chi)$ ; поэтому  $(\sigma_2\chi)(g) = \sigma_2\{\chi(g)\} = \chi(g)$  и  $\{[(\sigma_1-1)(\sigma_2-1)]\chi\}(g) = (\sigma_1-1)\{(\sigma_2-1)\chi(g)\} = (\sigma_1-1)(0) = 0$ . Таким образом, функция  $\{[(\sigma_1-1)(\sigma_2-1)]\chi\}$  всюду на  $G$  обращается в нуль и, тем самым, (1) доказано. Переписав (1) в виде  $\chi + (\sigma_1\sigma_2)\chi = \sigma_1\chi + \sigma_2\chi$  и пользуясь тем, что  $\chi, (\sigma_1\sigma_2)\chi, \sigma_1\chi, \sigma_2\chi \in \text{Irr}(G)$ , получим:  $\chi = \sigma_1\chi$ , либо  $\chi = \sigma_2\chi$ . В первом случае  $\sigma_1 \in \Gamma^{(\chi)}$ , во втором  $-\sigma_2 \in \Gamma^{(\chi)}$ , что противоречит выбору автоморфизмов  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Таким образом, по крайней мере одно из полей  $\mathbf{Q}_{A_1}(\chi), \mathbf{Q}_{A_2}(\chi)$  совпадает с  $\mathbf{Q}(\chi)$  — теорема доказана.

Из теоремы 1, как будет показано ниже, легко выводятся упомянутые выше теоремы Блехфельдта—Бернсайда. Приводим эти теоремы в несколько упрощенных формулировках:

**Теорема 2.** Пусть  $p_1$  и  $p_2$  — различные простые делители числа  $|G|$ ,  $v_1$  и  $v_2$  — натуральные числа. Если группа  $G$  содержит такие элементы  $g_i$  ( $i=1, 2$ ), что  $\chi(g_i) \in \mathbf{Q}_{p_i^{v_i}} \setminus \mathbf{Q}_{p_i^{v_i-1}}$  ( $i=1, 2$ ), то  $G$  содержит элемент порядка  $p_1^{v_1} \cdot p_2^{v_2}$ .

**Теорема 3.** Пусть  $\pi$  — множество всех простых делителей числа  $|G|$ ,  $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$ , где  $\pi_i \neq \emptyset$  ( $i=1, 2$ ). Если  $A_i$  — множество всех  $\pi_i$ -элементов  $A'_i$  — множество всех  $\pi'_i$ -элементов группы  $G$  ( $i=1, 2$ ), то характер  $\chi$  рационален по крайней мере на одном из подмножеств  $A'_1, A'_2$ .

*Доказательство теоремы 2.* Допустим, что группа  $G$  не содержит элементов порядка  $p_1^{v_1} \cdot p_2^{v_2}$ . Полагая  $|G| = p_1^{v_1} u_1$ , где  $u_1$  — целое не делящееся на  $p_1$ , покажем что  $G = A_1 \cup A_2$ , где  $A_i = \{g \in G \mid g^{p_i^{v_i-1} u_i} = 1\}$  ( $i=1, 2$ ). Действительно, пусть  $g \in G$  и  $p_i^{v_i} \nmid p_i$ -часть  $|g|$  ( $i=1, 2$ ). Если  $\lambda_i \equiv v_i$  ( $i=1, 2$ ), то  $p_1^{v_1} p_2^{v_2} \mid |g|$ , откуда вытекает существование элемента порядка  $p_1^{v_1} p_2^{v_2}$ . Таким образом, выполняется по крайней мере одно из неравенств  $\lambda_1 \leq v_1 - 1, \lambda_2 \leq v_2 - 1$ . В первом случае  $g \in A_1$ , во втором —  $g \in A_2$ . В силу теоремы 1  $\mathbf{Q}(\chi)$  совпадает по крайней мере с одним из полей  $\mathbf{Q}_{A_i}(\chi)$  ( $i=1, 2$ ). Если, например,  $\mathbf{Q}(\chi) = \mathbf{Q}_{A_1}(\chi)$ , то для любого  $g \in G$  будет иметь место  $\chi(g) \in \mathbf{Q}_{A_1}(\chi) \subseteq \mathbf{Q}_{p_1^{v_1-1} u_1}$ . В частности,\*)  $\chi(g_1) \in \mathbf{Q}_{p_1^{v_1}} \cap \mathbf{Q}_{p_1^{v_1-1} u_1} = \mathbf{Q}_{p_1^{v_1-1}}$  — противоречие. Таким образом, группа  $G$  содержит элемент порядка  $p_1^{v_1} p_2^{v_2}$ .

*Доказательство теоремы 3.* Пусть  $u_i$   $\pi_i$ -часть  $|G|$  ( $i=1, 2$ ). Тогда  $A_i = \{g \in G \mid g^{u_i} = 1\}$  ( $i=1, 2$ ). Если  $g_i \in A'_i$ , то  $g_i$   $\pi'_i$ -элемент и, следовательно,  $(|g_i|, u_i) = 1$  ( $i=1, 2$ ). Так как  $A_1 \cup A_2 = G$ , то в силу теоремы 1 поле  $\mathbf{Q}(\chi)$  совпадает по крайней мере с одним из полей  $\mathbf{Q}_{A_i}(\chi)$  ( $i=1, 2$ ). Если, например,  $\mathbf{Q}(\chi) = \mathbf{Q}_{A_1}(\chi)$ , то  $\chi(g_1) \in \mathbf{Q}_{|g_1|} \cap \mathbf{Q}_{A_1}(\chi) \subseteq \mathbf{Q}_{|g_1|} \cap \mathbf{Q}_{u_1} = \mathbf{Q}_{(|g_1|, u_1)} = \mathbf{Q}$ . Аналогично,  $\mathbf{Q}(\chi) = \mathbf{Q}_{A_2}(\chi)$  влечет  $\chi(g_2) \in \mathbf{Q}$ . Таким образом, если  $g_i \in A'_i$  ( $i=1, 2$ ), то по крайней мере одно из чисел  $\chi(g_i)$  ( $i=1, 2$ ) рационально. Если не все значения характера  $\chi$  на  $A'_1$  рациональны, то найдется такой элемент  $g_1 \in A'_1$ , что  $\chi(g_1) \notin \mathbf{Q}$ . На основании доказанного  $\chi(g_2) \in \mathbf{Q}$  при любом  $g_2 \in A'_2$ , т. е. характер  $\chi$  рационален на  $A'_2$ , если он не всюду рационален на  $A'_1$ .

\*) Как известно [9]  $\mathbf{Q}_m \cap \mathbf{Q}_n = \mathbf{Q}_{(m, n)}$ .

**Следствие.** Если  $G^\# = A_1 \cup A_2$ ,  $A_i \neq \emptyset$  ( $i=1, 2$ ) и порядки элементов подмножества  $A_1$  взаимно просты с порядками элементов подмножества  $A_2$ , то характер  $\chi$  рационален по крайней мере на одном из подмножеств  $A_i$  ( $i=1, 2$ ).

Согласно Брауэру и Фаулеру [6] расстояние  $d(x, y)$  между элементами  $x, y \in G^\#$  определяется следующим образом:  $d(x, y) = \infty$ , если не существует такой последовательности  $\{x_i\}_{0 \leq i \leq n}$  элементов подмножества  $G^\#$ , что  $x_0 = x$ ,  $x_n = y$ ,  $x_{i-1}x_i = x_i x_{i-1}$  ( $i=1, \dots, n$ ); если же последовательности обладающие указанным свойством существуют, то  $d(x, y)$  равно наименьшей «длине»  $n$  такой последовательности. В частности  $d(x, x) = 0$ ;  $d(x, y) = 1$  равносильно тому, что  $x \neq y$  и  $x \cdot y = y \cdot x$ . Ясно, что  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  ( $x, y, z \in G^\#$ ). Если  $\alpha$  — автоморфизм группы  $G$ , то, очевидно,  $d(x^\alpha, y^\alpha) = d(x, y)$ .

Дж. Томпсоном была высказана следующая гипотеза: если  $x, y \in G^\#$ ,  $|x| = p$ ,  $|y| = q$  ( $p$  и  $q$  — различные простые числа), причем  $\chi(x)$  и  $\chi(y)$  иррациональны, то существуют такие элементы  $x', y' \in G^\#$ , что  $x' \sim x$ ,  $y' \sim y$  и  $x'y' = y'x'$  (т. е.  $d(x', y') = 1$ ).

Как показано в [7], гипотеза Томпсона неверна. Тем не менее, утверждение этой гипотезы оказывается справедливым в следующей ослабленной формулировке:

**Теорема 4.** Если  $x, y \in G^\#$  и  $\chi(x), \chi(y)$  иррациональны, то существуют такие элементы  $x', y' \in G^\#$ , что  $x' \sim x$ ,  $y' \sim y$  и  $d(x', y') < \infty$ .

**Доказательство.** Группу  $G$  будем называть несвязной, если  $d(x, y) = \infty$  для некоторых  $x, y \in G^\#$ ; в противном случае группу  $G$  назовем связной\*). (Таким образом, связны группы, для которых подмножество  $G^\#$  имеет конечный диаметр). На множестве  $G^\#$  возникает отношение эквивалентности  $\rho_G$ : если  $x, y \in G^\#$  то  $x \rho_G y$  тогда и только тогда, когда  $d(x, y) < \infty$ . Классы эквивалентности  $\rho_G$  назовем компонентами связности группы  $G$ . Группа  $G$  несвязна тогда и только тогда, когда число компонент связности  $> 1$ . Компоненты связности группы  $G$ , очевидно, переставляются ее автоморфизмами. Непустое подмножество  $A \subseteq G^\#$  будем называть замкнутым, если  $x \in A$  влечет  $C_G(x) \subseteq \hat{A} = A \cup \{1\}$ . Подмножество  $A$  замкнуто, очевидно, тогда и только тогда, когда оно является объединением некоторого семейства компонент связности. Если  $p$  — простое число и замкнутое подмножество  $A$  содержит  $p$ -элемент  $u$ , то  $\hat{A}$  содержит каждую силовскую  $p$ -подгруппу  $P$  группы  $G$ , содержащую  $u$ . Действительно, так как  $Z(P) \neq \{1\}$ , то  $P^\#$  содержится в той же компоненте связности, что и элемент  $u$ , откуда вытекает, что  $P \subseteq \hat{A}$ . Если, кроме того, замкнутое подмножество  $A$  нормально, то  $\hat{A}$  содержит все силовские  $p$ -подгруппы группы  $G$ , а потому и все  $p$ -элементы группы  $G$ .

В дальнейшем мы будем считать группу  $G$  несвязной, так как в противном случае утверждение теоремы очевидно. Пусть  $x$  и  $y$  — элементы группы  $G$  удовлетворяющие условию теоремы,  $D$  — компонента связности, содержащая элемент  $x$  и  $\{D_1 = D, \dots, D_n\}$  — класс компонент связности сопряженных с  $D$ . Положим  $A_1 = \bigcup_{i=1}^n D_i$ ,  $A_2 = G^\# \setminus A_1$ . Из  $A_1 = G^\#$  следовало бы, что  $|G| - 1 =$

\*) Ряд результатов относящихся к несвязным группам анонсирован в [8].

$=|G^\#| = \sum_{i=1}^n |D_i| = n|D|$ . Так как  $n = (G : N_G(D))$  делит  $|G|$ , отсюда следует, что  $n=1$ . Таким образом,  $G^\# = D$ , что противоречит несвязности группы  $G$ . Тем самым доказано, что  $A_1 \neq G^\#$  и, следовательно  $A_2 \neq \emptyset$ . Так как компоненты связности  $D_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) переставляются между собой внутренними автоморфизмами группы  $G$ , то  $A_1$  нормально. Итак,  $A_1$  и  $A_2$  — непустые нормальные замкнутые подмножества и  $G^\# = A_1 \cup A_2$ . Порядки элементов подмножества  $A_1$  взаимно просты с порядками элементов подмножества  $A_2$ . Действительно, допустим, что  $x_i \in A_i$  ( $i=1, 2$ ) и  $(|x_1|, |x_2|) = m \neq 1$ . Если  $p$  — простой дилетель числа  $m$ , то  $|x_1|^{m/p} = |x_2|^{m/p} = p$ . Так как  $x_i^{m/p} \in C_G(x)$ , то ввиду замкнутости подмножества  $A_i$ ,  $x_i^{m/p} \in A_i$  ( $i=1, 2$ ). Ввиду замкнутости и нормальности подмножеств  $A_i$  ( $i=1, 2$ ), отсюда вытекает, что каждое из подмножеств  $\hat{A}_i$  ( $i=1, 2$ ) содержит все  $p$ -элементы группы  $G$ , что невозможно, так как  $\hat{A}_1 \cap \hat{A}_2 = \{1\}$ . Таким образом, подмножества  $A_i$  ( $i=1, 2$ ) удовлетворяют условию следствия теоремы 3. Так как  $x \in A_1$  и  $\chi(x) \notin Q$ , то  $\chi$  рационален на  $A_2$ . Ввиду иррациональности  $\chi(y)$  отсюда вытекает, что  $y \in A_1$ . Так как  $A_1 = \bigcup_{i=1}^n D_i$ , то найдутся такие  $i$  и  $j$ , что  $x \in D_i$ ,  $y \in D_j$ . Замечая, что  $D_j = D_1^g$ , где  $g \in G$  и полагая  $x' = x^g$ ,  $y' = y$ , получим  $x', y' \in D_1$ , т. е.  $d(x', y') < \infty$ . Так как  $x' \sim x$ ,  $y' \sim y$ , то теорема доказана.

### Литература

- [1] H. F. Blichfeldt, On the order of linear homogeneous groups II. *Trans. Amer. Math. Soc.* (1904), 310—325.
- [2] W. Burnside, Theory of groups of finite order, second edition, *Cambridge* (1911), 348.
- [3] R. Brauer, A note on theorem of Burnside and Blichfeldt. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15** (1964), 31—34.
- [4] D. S. Passman, Permutation Groups, *New York—Amsterdam*, (1968), 176.
- [5] W. Feit, Characters of finite groups. *New York—Amsterdam*, (1967), 40.
- [6] R. Brauer—K. A. Fowler, On groups of even order, *Ann. Math.* **62** (1955), 565—583.
- [7] A. Sibley David, A counterexample in the theory of finite groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **69** (1977), 19—21.
- [8] А. И., Вейцблит Э. М., Жмудь «Связность» конечной группы и группы Цассенхауза. *Сообщения АН Груз. ССР*, **90**, (1978), 277—279.
- [9] H. Hasse, Zahlentheorie (Berlin) 1963.

(Поступила: 13. VII. 1979.)