

Die Verwendung der Zentralprojektion im Modell Cayley—Klein des hyperbolischen Raumes

Von A. GYARMATHI und L. GYARMATHI (Debrecen)

In dem vergangenen Jahrzehnt haben sich mehrere Verfasser mit der darstellenden Geometrie der dreidimensionalen Geometrie von Bolyai—Lobatschewski beschäftigt. Unter diesen heben wir die Arbeit des ZAGORKA ŠNAJDER [5] heraus. Unsere Arbeit zeigt, wie man im Cayley—Klein Modell¹⁾ des hyperbolischen Raumes die Zentralprojektion anwenden kann.²⁾

I. Die Erörterung einiger zur Anwendung kommender Grundbegriffe der hyperbolischen Geometrie

1. Solche Kollineationen Π , welche den Kugel K^2 eines zu projektivem Raum ergänzten euklidischen Raumes so in sich führen, daß die inneren Punkte von K^2 in innere Punkte derselben gehen, nennen wir die Bewegungen des im Modell erklärten hyperbolischen Raumes, wenn sie die Orientierung von K^2 behalten.

Die inneren Punkte von K^2 sind die wirklichen Punkte³⁾ des hyperbolischen Raumes, die äußeren Punkte sind die *idealen* Punkte. Die Punkte von K^2 sind die *Endpunkte* der hyperbolischen Geometrie.

2. Die Strecken- und die Winkelcharakteristiken. Die parallelen und die senkrechten Geraden

Es sei k^2 ein Ebeneschnitt von K^2 . Unter Streckencharakteristik von $\overline{P_1P_2}$ verstehen wir das Doppelverhältnis $\Delta(\overline{P_1P_2}) = (\Xi H P_2 P_1)$, wo Ξ, H die Endpunkte der die Strecke $\overline{P_1P_2}$ enthaltenden Geraden sind. Zwei Strecken sind im hyperbolischen Sinn kongruent, wenn ihre Charakteristiken gleich sind (Fig. 1).

Unter Winkelcharakteristik von $\sphericalangle a_1b_1$ verstehen wir das Doppelverhältnis $\Delta(\sphericalangle a_1b_1) = (\Xi_1 H_1 \Xi_2 H_2)$, wo Ξ_1, H_1, Ξ_2, H_2 die Endpunkte der Winkelschenkel bzw. der ergänzenden Halbgeraden.

¹⁾ Wir wählen das Modell deshalb, weil man durch die Anwendung desselben die Aufgaben und die Konstruktionen, nicht nur symbolisch sondern wirklich erledigen kann.

²⁾ Die Arbeit gibt die Lösungen einiger fundamentalen Aufgaben.

³⁾ Bei den Konstruktionen brauchen wir in erster Reihe die wirklichen Punkte, nur nötigenfalls nutzen wir die idealen Punkte.

Solche Halbgeraden, deren Endpunkte gemeinsam sind, sind *parallel*.

Im Modell drückt man die Orthogonalität mittels der durch K^2 bestimmten Polarität bzw. durch die in seinen Ebenchnitte auftretenden Polarität aus ([1] 232).

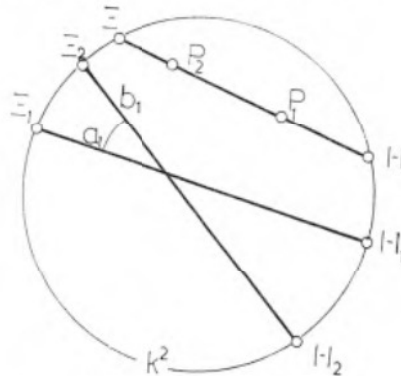


Fig. 1.

3. Parazyklus

Es sei k^2 ein Ebenchnitt von K^2 . Unter Parazyklus p^2 verstehen wir eine solche Kurve zweiter Ordnung, inwelche eine spezielle Perspektivität (Fig. 2) mit Fixpunkt U und Axe u den k^2 überträgt. p^2 ist innerhalb von k^2 .⁴⁾ Die Parazyklen sind die Bahnlinien der entsprechenden Bewegung der hyperbolischen Eben U ist der Mittelpunkt und u ist die Grundgerade von p^2 .

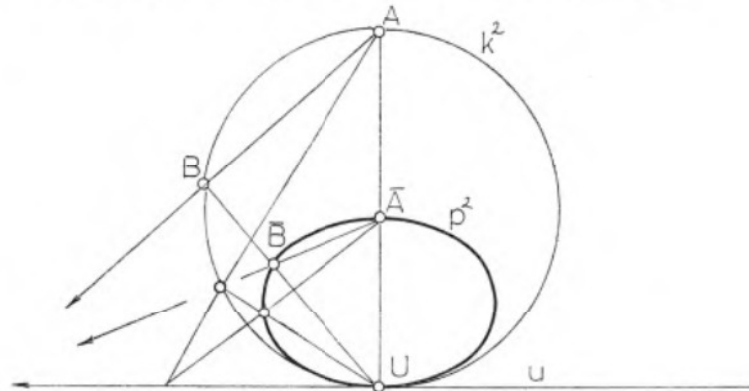
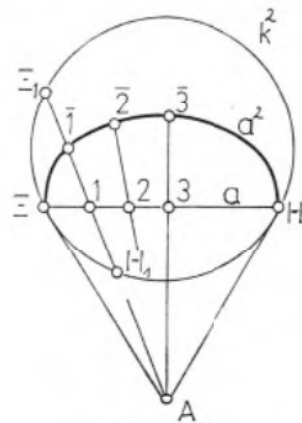


Fig. 2.

4. Äquidistantenlinien

Es sei k^2 ein Ebenchnitt der Kugel K^2 , Ξ, H die zwei Enden der a (Fig. 3) A ist der Pol von a bezüglich von k^2 . Zu $P(1, 2, 3, \dots)$, $P \in a$, gehörige solche Gesamtheit a^2 des $\bar{P}(\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots)$, wo $\Delta(\bar{1}\bar{1}) = \Delta(\bar{2}\bar{2}) = \Delta(\bar{3}\bar{3}) = \dots = \Delta(\Xi_1 H_1 \bar{1}\bar{1}) \dots$, ist eine Äquidistantenlinie von a , wobei a die Grundgerade von a^2 ist. a^2 ist die Bahnlinie irgendeines Punktes bei Verschiebung längs von a .

⁴⁾ p^2 ist Grenzparazyklus.



Fin. 3.

5. Hyperbolischkreis

Es sei k^2 ein Ebeneschnitt des Kugels K^2 , Q der innere Punkt von k^2 , q Polargerade von Q bezüglich von k^2 und I elliptische Involution auf $q((1, 1')(2, 2'))$ bezüglich von k^2 (Fig. 4).

Die Drehung um Q ist die Orientierung behaltende und den k^2 in sich führende Kollineation, für welche Q Doppelpunkt ist.

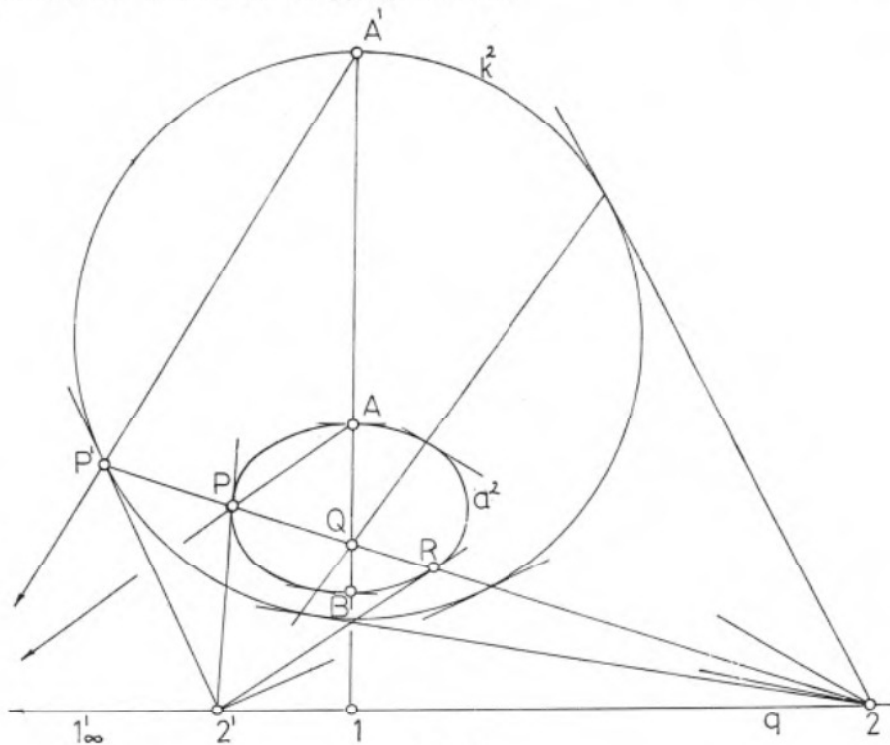


Fig. 4.

⁵⁾ k^2 ist Grenzhyperbolischkreis.

⁶⁾ a^2 ist ein Hyperbolischkreis mit Mittelpunkt Q : $(ABQ1) = -1$, $(PRQ2) = -1$.

Die Hyperbolischkreise mit Mittelpunkt Q sind die Elemente solcher Kegelschnittreihen in Innere von k^2 ,⁵⁾ welche man durch k^2 und Q bestimmt⁶⁾. Die durch Q gehenden Geraden schneiden entsprechende Punkte (P', P) , (A', A) aus k^2 und aus dem Hyperbolischkreis heraus. Die Verbindungsgeraden der zwei Punkte (P', A') und der zwei entsprechenden Punkte (P, A) schneiden sich in q , weil q die assoziierte, invariante Gerade des Q in der Drehung um Q ([1] 288) ist.

II. Zentralprojektion im Modell Cayley—Klein

Den größten Kreis k^2 der Grundkugel K^2 nehmen wir in der Bildebene π auf. Der Mittelpunkt H von K^2 ist der Hauptpunkt. Das Zentrum C bestimmt den Distanzkreis k^2 , C ist über der Bildebene⁷⁾. Nur solche Punkte haben ein Zentralbild, welche innere Punkte des Kegels Ck^2 und K^2 sind. Die untere Hälfte des K^2 bezeichnen mit K_1 . Die Gebilde wählen wir womöglich in der K_1 . Bei der Zentralprojektion brauchen wir in erster Reihe das Verfahren der *Spurelemente*. Die ersten Spurelemente sind die inneren Punkte von k^2 , die zweiten Spurelemente sind die Punkte der Fläche des K^2 , die Endpunkte. In einigen Fällen verwenden wir bei Konstruktionen auch die Orthogonalprojektion. Diese projiziert man im euklidischen Sinn. Diese stimmt hier mit der hyperbolischen überein.

1. Die Darstellung der Geraden

a) Die Gerade a schneidet π im Spurpunkt S , ihr unterer Endpunkt ist U_1 . Zu einer gegebenen a kann man das Punktpaar (S, U_1') bestimmen und zu gegebenem Punktpaar (S, U_1') kann man die Gerade a angeben, welche deren unterer Endpunkt U_1 in K_1 ist (Fig. 5).

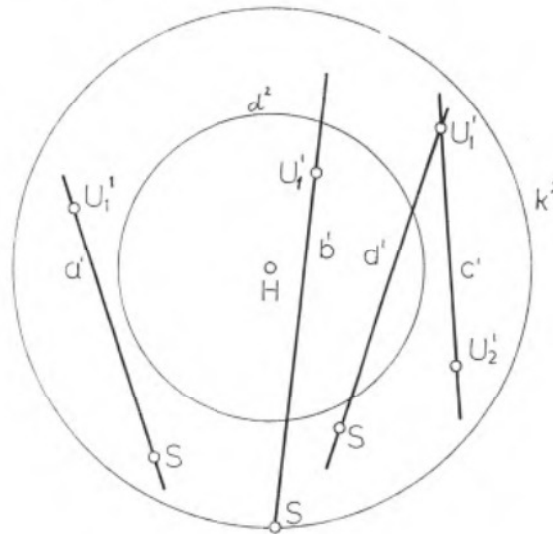


Fig. 5.

⁷⁾ Diese vorteilhafte Aufnahme der projizierenden Systems weicht im wesentlichen wenig von der universalen ab, hingegen bieten sich viele Erleichterungen bei den Konstruktionen dar. Die Bildebene ist wagerecht.

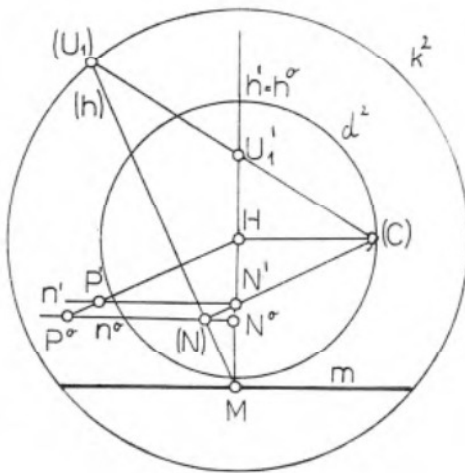


Fig. 9.

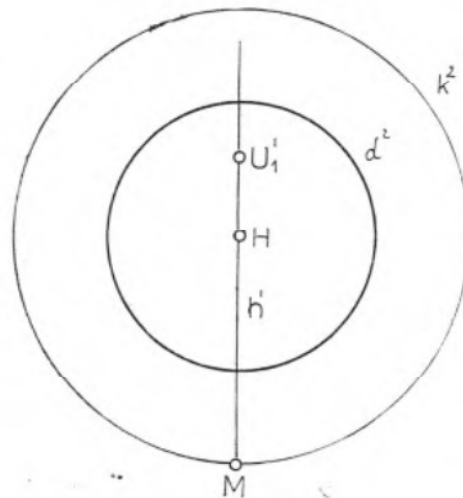


Fig. 10.

(c) Im Fall C stellen wir die Ebene α mit ihrer Hauptultraparallelen Geraden dar. h und h' sind ultraparallel. Die Ebene hh' enthält die gemeinsame senkrechte Gerade von α und π . $H \in h'$. h wird mit Punkten U_1 und U_2 dargestellt (Fig. 11).

Wir konstruieren noch die um h' abgedrehte h . Die Darstellung des Punktes in der Ebene im Falle (b) und (c) ist ähnlich zu (a), für diese machen wir keine besondere Figur.

5. Konstruktion des Bildes der Endpunkte der Ebene

Stellen wir eine Ebene α , welche π schneidet mit ihrer Hauptfalllinie h dar. α schneidet aus K^2 ihre Endpunkte, den Kreis u^2 . Dreht man h um h' in π ab, (U_1) und (U_2) sind die Abdrrehungen der Endpunkte von h . U_1' und U_2' sind die Achsenpunkte von u^2 . (Man kann leicht einsehen, daß h' die Achse von u^2

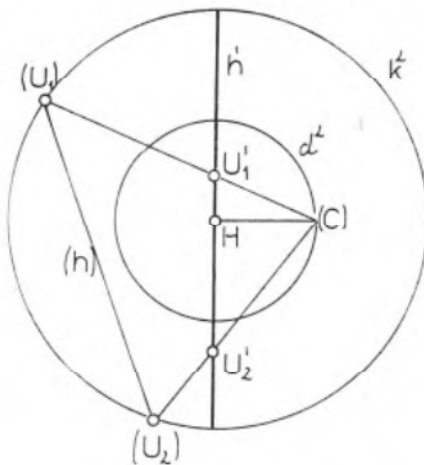


Fig. 11.

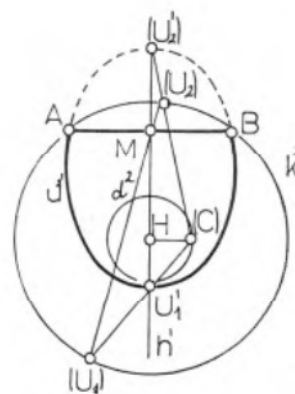


Fig. 12.

ist.) (Fig. 12) A und B sind die Punkte von $a^{2'}$. Die Achsenpunkte und A, B bestimmen den $u^{2'}$. $u^{2'}$ ist eine Halthyperbel ([2] 229).

Im Falle (b) und (c) ist die Konstruktion des Zentralbildes der Endpunkte ähnlich, nur soll man A oder B mit einem geeigneten Punkt ersetzen.

6. Das perspektive Bild des auf gegebener Ebene stehenden vierseitigen Prismas

Wir machen die Konstruktion in den Fall, wo die Grundebene β zu dem Typus (b) gehört. Für die zwei anderen Typen stimmt die Konstruktion im wesentlichen überein.

Wir stellen β mit ihrer Hauptparallellinie h dar. Bestimmen wir das Bild $u^{2'}$ der Endpunkte von β wie im Fall von α . (Den Punkt A vertreten wir mit I und den Punkt I stellen wir nach Figur 9. dar, I^o ist der eine Endpunkt der großen Achse von $u^{2'}$, $(K)N = (K)(U_1)$, $K^o I^o = (K)(U_1)$.) (Fig. 13)

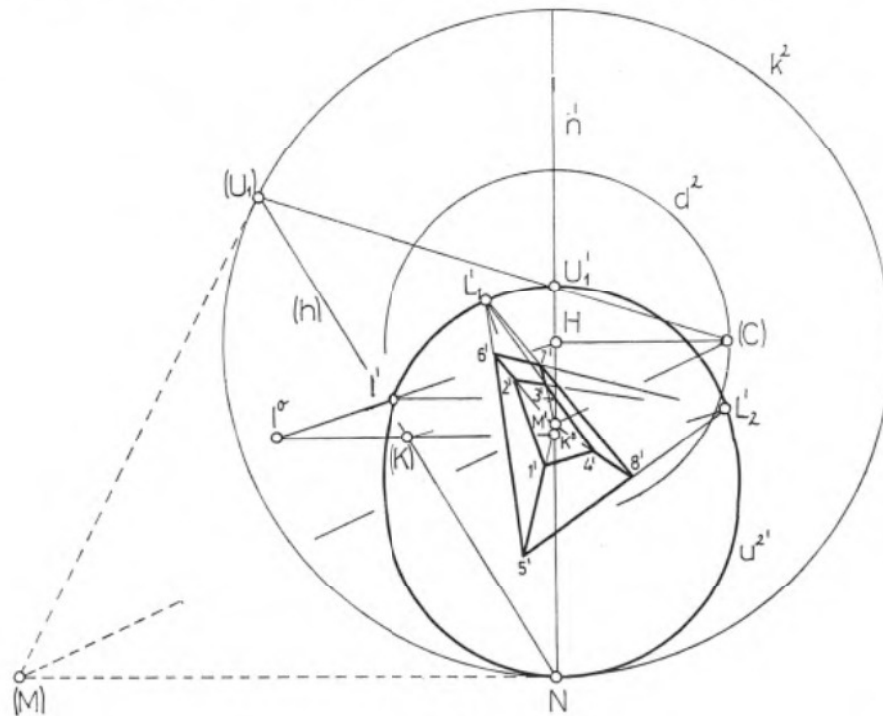


Fig. 13.

Die auf β senkrechten Geraden schneiden sich im M , welcher Pol von β bezüglich von K^2 ist. (M) ist Pol von (h) bezüglich von k^2 , in (M) hat man den (idealen) Punkt M um h' in π gedreht. Den (M) projizieren wir aus C zu h' in M' . M' ist das Zentralbild des gemeinsamen Punktes der zu β senkrechten Geraden.

Es sei die in β liegende Grundfläche des Prismas ein Viereck, deren gegenüberliegende Seiten parallel sind. Nehmen wir nach Belieben auf $u^{2'}$ die Zentral-

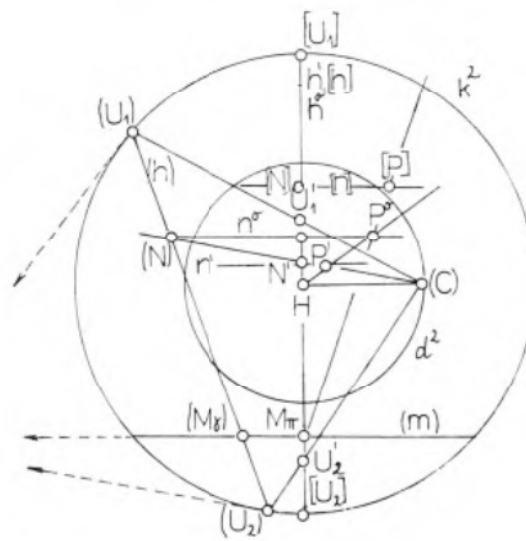


Fig. 17.

9. Die Konstruktion der Schnittgeraden der zweier Ebenen

Es sind α mit Spurgerade m und mit Hauptfallinie h und $\beta(\bar{m}, \bar{h})$ gegeben. Die Bilde der in „gleicher Höhe“ liegenden Hauptlinien n' bzw. $\bar{n}'$ von α bzw. β schneiden sich in dem Bild M' des Punktes M der Schnittgeraden g von α und β . S ist der Spurpunkt von g (Fig. 18).

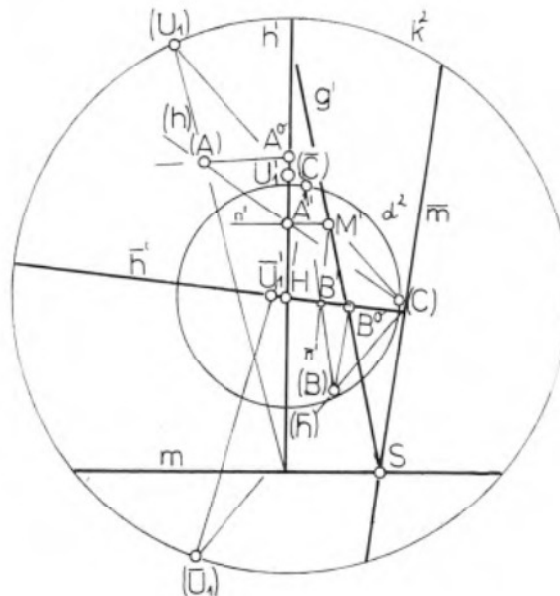


Fig. 18.

10. Die Konstruktion der Distanz des Punktes und der Ebene

Nach Figur 13. können wir zu der Ebene Senkrechte stellen und nach Anwendung des 8) kann man den Schnittpunkt der Ebene und der Geraden bestimmen. Über die Konstruktion machen wir keine Zeichnung.

Auf Grund der dargestellten Konstruktionen kann man weitere Aufgaben der darstellenden Geometrie im hyperbolischen Modell lösen.

Die Aufgaben der Lage kann man mit den Erwägungen der euklidischen Geometrie lösen. Bei metrischen Aufgaben ist auch die Anwendung der Lehrsätze der hyperbolischen Raumgeometrie nötig.

Literatur

- [1] KERÉKJÁRTÓ BÉLA, A geometria alapjairól II. Projektív geometria, Budapest, 1944, (*ungarisch*).
- [2] F. KLEIN, Vorlesungen über nicht Euklidische Geometria, *Berlin*, 1928.
- [3] E. MÜLLER, Vorlesungen der darstellenden Geometrie, I. Band. E. KRUPPA, Die linearen Abbildungen, *Leipzig* und *Wien*, 1923.
- [4] Н. В. Наумович, Перспективные проекции в гиперболическом пространстве. Труды Московского научно-методического семинара по начертательной геометрии и инженерной графике, выпуск II. *Москва*, 1963.
- [5] ZAGORKA ŠNAJDER, Spur- und Fluchtpunktmethode bei Zentralprojektion im hyperbolischen Raum (17), 1975, стр. 127—136.

(Eingekommen am 13. Oktober 1980)