

Конечные группы, обладающие неприводимым комплексным характером с сопряженными нулями I.

Э. М. Жмудь

Пусть G — неабелева группа и χ — ее нелинейный неприводимый характер.* Как известно [1], характер χ обладает «нулями», т. е. обращается на некоторых элементах группы G в нуль. Если группа G порождается множеством нулей характера χ , будем называть последний характером 1-го рода; в противном случае назовем χ характером 2-го рода.

Нули характера χ образуют G -инвариантное множество. В настоящей работе изучается экстремальный случай, когда это множество является классом сопряженных элементов группы G . В связи с этим дадим следующие определения. Характер χ назовем DS -характером, если он точен и его нули сопряжены. Характер χ назовем D -характером, если $\chi(s) = \chi(t)$ ($s, t \in G$) влечет сопряженность элементов s и t . Группу G с отмеченным DS -характером (D -характером) назовем DS -группой (D -группой) и будем обозначать символом $\{G, \chi\}$; G — «носитель» DS -группы $\{G, \chi\}$. Так как D -характеры являются DS -характерами, то класс D -групп содержится в классе DS -групп. В зависимости от рода DS -характера χ будем различать DS -группы 1-го и 2-го рода; DS -группу $\{G, \chi\}$ будем относить к 1-му типу, если центр G — максимальная не содержащая нулей характера χ нормальная подгруппа группы G и ко 2-му типу — в противном случае.

Примеры DS -групп. 1) DS -группы 1-го рода и 1-го типа: $\{A_5, \chi_i\}$ ($i=1, 2, 3$), $\chi_1(1)=4$, $\chi_2(1)=\chi_3(1)=3$; χ_2 и χ_3 — D -характеры; 2) DS -группы 1-го рода и 2-го типа: $\{D_m, \chi_i\}$, где D_m — группа диэдра с нечетным m и χ_i — любой ее точный неприводимый характер; χ_i — D -характеры 1-го рода и 2-го типа; 3) DS -группы 2-го рода и 1-го типа: $\{SL(2, 3), \chi_i\}$ ($i=1, 2, 3$); $\chi_1(1)=\chi_2(1)=\chi_3(1)=2$; χ_1 и $\chi_2 = \bar{\chi}_1$ — комплексные D -характеры; χ_3 — вещественнозначный DS -характер; 4) DS -группы 2-го рода и 2-го типа: $\{S_4, \chi_i\}$ ($i=1, 2$); $\chi_1(1)=\chi_2(1)=3$.

Группа $SL(2, 3)$ принадлежит к серии носителей DS -групп 2-го рода и 1-го типа состоящей из четырех групп G_p ($p=2, 3, 5, 7$) следующего строения. Пусть E_p — екстраспециальная группа порядка p^3 , причем $E_1 \cong Q_8^{**}$ и $\exp(E_p) = p$, если $p \neq 2$; пусть H_p — подгруппа порядка $p^2 - 1$ группы $SL(2, p)$ ($H_2 \cong C(3)^{***}$, $H_3 \cong Q_8$, $H_5 \cong SL(2, 3)$, H_7 — расширение $C(2)$ при помощи S_4 , имеющее един-

* В настоящей работе рассматриваются только конечные группы и их комплексные характеры.

** Q_8 — группа кватернионов

*** $C(n)$ — циклическая группа n -го порядка.

ственную инволюцию). Тогда $G_p = E \cdot H$, где $E \cong E_p$, $H \cong H_p$, H действует тривиально на центре E и $C_H(E) = (C_{G_p}(E) \cap H) = \{1\}$. Все группы G_p разрешимы.

В первой части настоящей работы доказаны следующие утверждения:

Теорема 2.7. Если $\{G, \chi\}$ — DS -группа 1-го рода и 1-го типа и $G \neq G'$, то $G \cong D_m$ (m нечетно).

Теорема 3.14. Разрешимая группа G тогда и только тогда является носителем DS -группы 2-го рода и 1-го типа, когда $G \cong G_p$ ($p \in \{2, 3, 5, 7\}$).

Во второй части работы рассматриваются DS -группы 2-го рода и 2-го типа.

Некоторые обозначения

p всегда означает простое число; $|M|$ — число элементов конечного множества M ; $Y \leq X$ ($Y < X$) — подгруппа (собственная подгруппа) группы X ; $\langle M \rangle$ — подгруппа, порожденная подмножеством $M \subseteq X$; $X^* = X \setminus \{1\}$; $|x|$ — порядок элемента $x \in X$; $M^x = x^{-1}Mx$ ($M \subseteq X$, $x \in X$); $M^X = \bigcup_{x \in X} M^x$; $y^X = \{y\}^X$ — « X — класс» порожденный элементом $y \in X$; $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ ($x, y \in X$); $Z(X)$, X' , $Sc(X)$, $F(X)$, $\Phi(X)$ соответственно — центр, коммутант, цокль, подгруппа Фиттинга, подгруппа Фраттини группы X ; $\exp(X)$ — показатель группы X ; $Syl_p(X)$ — множество всех силовских p -подгрупп группы X ; $C_A(B) = C_X(B) \cap A$ ($A, B \leq X$); $C(n)$ — циклическая группа n -го порядка; Q_8 — группа кватернионов; D_m — группа диэдра порядка $2m$; $E(p^{2u+1})$ — экстраспециальная группа порядка p^{2u+1} и показателя p ; $E_p \cong E(p^3)$, если $p \neq 2$, $E \cong Q_8$; $\text{Irr}(X)$ — множество всех неприводимых характеров группы X ; $\text{Lin}(X)$ — множество всех линейных характеров группы X ; $\text{Ker } \chi = \{x \in X \mid \chi(x) = \chi(1)\}$ и $Z(\chi) = \{x \in X \mid \chi(x) = \chi(1)\}$ соответственно — ядро и квазиядро характера χ группы X ; $T_\chi = \{x \in X \mid \chi(x) = 0\}$ — множество всех нулей характера $\chi \in \text{Irr}(X) \setminus \text{Lin}(X)$; $N_\chi = \langle T_\chi \rangle$; $\Delta_\chi = X \setminus N_\chi$; I_ψ — группа инерции характера $\psi \in \text{Irr}(N)$ ($N \triangleleft X$); ψ^X — характер группы X индуцированный характером ψ подгруппы $Y \leq X$; χ_Y — ограничение характера χ на подгруппу $Y \leq X$; $GL(\mathfrak{F})$, $SL(\mathfrak{F})$, $Sp(\mathfrak{F})$ соответственно — операторная полная линейная, специальная линейная, симплектическая группы линейного пространства $\mathfrak{F}^*$; $GL(n, K)$, $SL(n, K)$, $Sp(n, K)$ — соответствующие матричные линейные группы (над полем K); $\mathbb{Z}$ -кольцо целых рациональных чисел; $\mathbb{Q}$ -поле рациональных чисел; $\mathbb{C}$ -поле комплексных чисел.

§ 1. Вспомогательные утверждения

В этом параграфе G — неабелева группа, $\chi \in \text{Irr}(G) \setminus \text{Lin}(G)$, $T_\chi = \{g \in G \mid \chi(g) = 0\}$, $N_\chi = \langle T_\chi \rangle$, $\Delta_\chi = G \setminus N_\chi$.

1.1. Лемма [1] $T_\chi \neq \emptyset$

1.2. Лемма [5] (I) $\chi_{N_\chi} \in \text{Irr}(N_\chi)$; (II) Если $N_\chi \neq G$ то из $g \in \Delta_\chi$ следует, что $\chi(g)$ — корень из 1.

* В последнем случае $\mathfrak{F}$ — невырожденное симплектическое пространство.

1.3. Следствие. Подгруппа N_χ неабелева.

1.4. Лемма [14] $g \in T_\chi$ влечет $C_G(g) \subset N_\chi^*$

1.5. Следствие $Sc(G) \subseteq N_\chi$

Доказательство. Если F — минимальная нормальная подгруппа группы G , то $F \subseteq N_\chi$, так как из $F \not\subseteq N_\chi$ следует $F \subseteq C_G(N_\chi) \subset N_\chi$ — противоречие.

1.6. Лемма $Z(\chi) \subset N_\chi$.

Доказательство. $P(\chi)T_\chi = T_\chi$, $T_\chi^{-1} = T_\chi^{**}$

1.7. Следствие $Z(G) \subseteq Z(N_\chi)$. Если, в частности, χ точен ($\text{Ker } \chi = \{1\}$), то $Z(G) = Z(N_\chi)$

1.8. Лемма [7]. Группа единиц конечного порядка кольца $\mathfrak{Z}_n$ целых алгебраических чисел кругового поля $\mathbf{O}(\varepsilon)$ (ε -первообразный корень n -й степени из 1) совпадает с $\langle (-1)^{n+1}\varepsilon \rangle$.

1.9. Лемма [14]. Если $N_\chi \neq G$ и Δ_χ содержит p -элемент, то $\chi(1) \equiv \pm 1 \pmod{p}$.

Доказательство. Если $g \in \Delta_\chi$, $|g| = p^m$ ($m \geq 1$), то $\chi(g) = \varepsilon^{v_1} + \dots + \varepsilon^{v_{\chi(1)}}$, где $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{p^m} + i \sin \frac{2\pi}{p^m}$, $v_j \in \mathbf{Z}$ ($j = 1, \dots, v_{\chi(1)}$). Полагая $\lambda = 1 - \varepsilon$, получим сравнение $\chi(g) \equiv \chi(1) \pmod{\lambda}$ в кольце $\mathfrak{Z}_{p^m}$. Так как в силу 1.2 и 1.8 $\chi(g) \in \langle (-1)^{p^m+1}\varepsilon \rangle$, то $\chi(g) \equiv \pm 1 \pmod{\lambda}$. откуда следует, ввиду λ/p и необратимости λ в $\mathfrak{Z}_{p^m}$, что $\chi(g) \equiv \pm 1 \pmod{p}$.

1.10. Следствие [14] $(\chi(1), |G \setminus N_\chi|) = 1$.

1.11. Лемма. Если $\chi = \psi^G$, где $\psi \in \text{Irr}(H)$, $H < G$, то $G \setminus H^G \subseteq T_\chi$.

Доказательство. Вытекает из явного выражения для ψ^G .

1.12. Следствие. Неприводимый характер 2-го рода группы G не может индуцироваться из ее собственной нормальной подгруппы.

1.13. Следствие. Нильпотентные группы не имеют неприводимых характеров 2-го рода***.

1.14. Лемма [14, 15]. Пусть χ -импримитивный**** неприводимый характер 2-го рода группы G : $N_\chi \neq G$, $\chi = \psi^G$, где $\psi \in \text{Irr}(H)$, $H < G$. Положим $\Omega = H \cap \Delta_\chi (= H \setminus N_\chi = H \setminus H_0)$, где $H_0 = H \cap N_\chi$. Тогда имеют место следующие утверждения: (I) $G = N_\chi H$; (II) $\Delta_\chi = \Omega^G$; (III) $H = N_G(\Omega)$ и Ω — (TI) — подмножество группы G ; (IV) Если $g \in \Omega$, то $\chi(g) = \psi(g)$.

* $\subset, \supset$ — символы строгого включения.

** $A^{-1} = \{x^{-1} | x \in A\}$

*** Неприводимый нелинейный характер нильпотентной группы индуцируется из ее максимальной подгруппы, откуда и следует 1.13.

**** т. е. индуцирующийся из собственной подгруппы группы G .

Доказательство. Так как $\chi(1) = (G:H)\psi(1)$, то в силу 1.10 $((G:N_\chi), (G:H)) = 1$. Поэтому $(G:N_\chi \cdot H) = 1$, что доказывает (I). Из (I) следует, что $G/N_\chi \cong H/H_0$, откуда

$$(1.1) \quad (N_\chi:H_0) = (G:H) = m$$

Так как Δ_χ нормально, то $\Omega^G \subseteq \Delta_\chi$. С другой стороны из $\Delta_\chi \subset G \setminus T_\chi$ и 1.11 следует, что $\Delta_\chi \subseteq H^G \cap \Delta_\chi = \Omega^G$. Поэтому $\Delta_\chi = \Omega^G$ и (II) доказано. Из (II) вытекает, что $|\Omega^G| = |G| - |N_\chi|$. Поэтому, если $\{t_1=1, \dots, t_m\}$ — полная система представителей правых смежных классов G по H , то $\left| \bigcup_{i=1}^m \Omega^{t_i} \right| = |G| - |N_\chi|$. С дру-

гой стороны, $\sum_{i=1}^m |\Omega^{t_i}| = m|\Omega| = m|H| - m|H_0|$, откуда в силу (1.1) $\sum_{i=1}^m |\Omega^{t_i}| = |G| - |N_\chi|$. Следовательно $|\bigcup \Omega^{t_i}| = \sum |\Omega^{t_i}|$, откуда вытекает, что подмножества Ω^{t_i} попарно не пересекаются. Это доказывает (III). Утверждение (IV) вытекает из (II), (III) и явного выражения для ψ^G .

1.15. Следствие. *Немономальный неприводимый характер 2-го рода группы G может индуцироваться только неприводимыми характерами 2-го рода.*

1.16. Следствие. *При условиях леммы 1.14 подгруппа H и все ее надгруппы самонормализуются.*

1.17. Следствие. *При условиях леммы 1.14 имеет место включение $\bigcap_{g \in G} H^g \subseteq N_\chi$.*

Доказательство. Из 1.14 (III) вытекает, что $H^g \cap H \subseteq N_\chi$, если $g \notin H$.

1.18. Лемма. *Из $N \triangleleft G, N \not\subseteq N_\chi$ вытекает изотипичность характера χ_N .*

Доказательство. Если χ_N не изотипичен, то χ индуцируется из собственной подгруппы H группы G содержащей N . Поэтому в силу 1.17 $N \subseteq \bigcup_{g \in G} H^g \subseteq N_\chi$ — противоречие.

1.19. Следствие. $F(G) \subseteq N_\chi$.

Доказательство. Утверждение вытекает из 1.18 и 1.13.

1.20. Следствие. *Из $N \triangleleft G, N \cap T_\chi = \emptyset$ следует $N \subseteq N_\chi$.*

Доказательство. В силу 1.18 $N \not\subseteq N_\chi$ влечет $\chi_N = e\psi$, где e — натуральное число (индекс ветвления χ_N) и $\psi \in \text{Irr}(N)$. Поэтому $T_\psi = T_\chi \cap N = \emptyset$, откуда, ввиду 1.1, $\psi(1) = 1$. Отсюда, в силу 1.6, $N \subseteq Z(\chi) \subset N_\chi$ — противоречие.

1.21. Лемма. *Если $N \triangleleft G, N \not\subseteq Z(\chi), N \cap T_\chi = \emptyset$, то χ индуцируется из собственной подгруппы, содержащей N .*

Доказательство. Пусть ψ — неприводимая компонента χ_N . Если $I_\psi = G$, то $\chi_N = e\psi$, где e — индекс ветвления χ_N . Так как $T_\psi = T_\chi \cap N = \emptyset$, то $\psi(1) = 1$, откуда $N \subseteq Z(\chi)$ — противоречие. Поэтому $I_\psi \neq G$, откуда и вытекает утверждение*.

* χ индуцируется из I_ψ

1.22. Лемма. Пусть M — максимальная (по включению) не содержащая нулей характера χ нормальная подгруппа группы G . Тогда $Z(\chi) \subseteq M$ и, следовательно, $Z(G) \subseteq M$.

Доказательство. $M \subseteq Z(\chi)M \triangleleft G$, $Z(\chi)M \cap T_\chi = \emptyset$, откуда $Z(\chi)M = M$.

1.23. Лемма.* Степени неприводимых проективных представлений конечной группы H не превосходят $\sqrt{|H|}$.

1.24. Лемма. Если $N \triangleleft G$, $N \subseteq Z(\chi)$, где $\chi \in \text{Irr}(G)$, то группа G/N обладает неприводимым комплексным проективным представлением степени $\chi(1)$.

1.25. Следствие. Если $\chi \in \text{Irr}(G)$, $N \triangleleft G$, $N \subseteq Z(\chi)$, то $\chi(1)^2 \leq |G/N|$.

1.26. Лемма:** Если G — нильпотентная группа класса нильпотентности 2 и характер $\chi \in \text{Irr}(G)$ точен, то $T_\chi = G \setminus Z(G)$ и $\chi(1)^2 = |G/Z(G)|$.

1.27. Лемма. [11, 9]. Если силовская 2-подгруппа конечной разрешимой группы H содержит циклическую подгруппу индекса 2, то H содержит нормальную подгруппу N все силовские подгруппы которой циклические, причем H/N изоморфна одной из групп $C(2)$, A_4 , S_4 .

1.28. Лемма*.** Пусть $\mathfrak{F}$ — 2-мерное линейное пространство над полем K . Всякая подгруппа группы $SL(\mathfrak{F}) (\cong SL(2, K))$, порядок которой не делится на характеристику поля K , действует на $\mathfrak{F}$ регулярно и, следовательно, является группой без неподвижных точек.

1.29. Лемма. [8] $Sp(2, K) = SL(2, K)$ (K — произвольное поле).

1.30. Лемма**.** Если $p \in \{2, 3, 5, 7\}$, то группа $SL(2, p)$ содержит подгруппу H_p порядка $p^2 - 1$. Эта подгруппа определена однозначно, с точностью до сопряженности в $SL(2, p)$, если $p \neq 7$ и с точностью до сопряженности в $GL(2, 7)$, если $p = 7$; все группы H_p разрешимы и являются группами без неподвижных точек*****; $H_2 \cong C(3)$, $H_3 \cong Q_8$, $H_5 \cong SL(2, 3)$, H_7 — расширение $C(2)$ при помощи S_4 имеющее единственную инволюцию; H_5 и H_7 задаются определяющими соотношениями: $H_5 = \langle a, b, d \rangle$, $a^4 = d^3 = 1$, $a^2 = b^2$, $bab^{-1} = a^{-1}$, $dad^{-1} = b$, $dbd^{-1} = ab$; $H_7 = \langle a, b \rangle$, $a^8 = b^4 = (ab)^3 = 1$.

1.31. Пусть E — экстраспециальная группа порядка $p^{2\mu+1}$ ($k \geq 1$). Элементарная абелева группа $\mathfrak{F} = E/Z(E)$ с аддитивной точки зрения является линейным пространством размерности 2μ над простым полем P_p характеристики p . Используя свойства коммутаторов, можно, как известно, задать на $\mathfrak{F}$ невырожденную симплектическую метрику.***** Пусть $\text{Aut}_Z(E)$ — группа всех

* Это утверждение, а также 1.24 и 1.25 хорошо известны и вытекают из элементов теории проективных представлений (см. напр. [2]).

** Утверждение вытекает из 1.24 и результатов Р. Фрухта [4] (см. также [13]).

*** Утверждение 1.28 и 1.29 хорошо известны.

**** Утверждения этой леммы являются следствиями общих результатов Д. А. Супруненко [10], но могут быть доказаны непосредственно.

***** Это следует из 1.28.

***** Если $Z(E) = \langle c \rangle$, $\bar{x}, \bar{y}$ — образы элементов $x, y \in E$ в $\mathfrak{F}$, то полагая, $[x, y] = c^{(\bar{x}, \bar{y})}$ где $(\bar{x}, \bar{y}) \in P_p$, получим антисимметрическую билинейную форму $(*, *)$, задающую метрику на $\mathfrak{F}$. При этом $c^{\lambda 1P} = c^\lambda$ ($\lambda \in \mathbb{Z}$, $1P_p$ — единица поля P_p).

автоморфизмов группы E тривиальных на $Z(E)$. Каждым автоморфизмом $\varphi \in \text{Aut}_Z(E)$ канонически определяется некоторый автоморфизм $f(\varphi)$ симплектического пространства $\mathfrak{F}$: если $\bar{x} = Z(E)x \in \mathfrak{F} (x \in E)$, то $f(\varphi)(\bar{x}) = \overline{\varphi(x)}$. Возникает гомоморфизм f группы $\text{Aut}_Z(E)$ в $\text{Sp}(\mathfrak{F})$. Леммы 1.32—1.43 устанавливают ряд свойств гомоморфизма f .

1.32. Лемма. $\text{Ker } f$ — элементарная абелева группа порядка $p^{2\mu}$.

Доказательство. Пусть $Z(E) = \langle c \rangle$. Если $\varphi \in \text{Ker } f$, то $\varphi(c) = c$ и $Z(E)\varphi(x) = Z(E)x$ для каждого $x \in E$. Следовательно, $\varphi(x) = xz_\varphi(x)$, где $z_\varphi(x) \in Z(E)$. При фиксированном $\varphi \in \text{Ker } f$, очевидно, $z_\varphi \in \text{Hom}(E, Z(E))$, причем $\text{Ker } z_\varphi \supseteq Z(E)$. Так как $E/Z(E) = \mathfrak{F}$, то гомоморфизмом z_φ канонически определяется гомоморфизм $z_\varphi^*: \mathfrak{F} \rightarrow Z(E)$. Отображение $\varphi \mapsto z_\varphi^*$, как легко видеть, — изоморфизм $\text{Ker } f$ на $\text{Hom}(\mathfrak{F}, Z(E))$, т.е. на пространство $\mathfrak{F}^*$ сопряженное с $\mathfrak{F}$. Следовательно, $\text{Ker } f \cong \mathfrak{F}^*$, откуда и вытекает утверждение.

1.33. Лемма. Гомоморфизм $f: \text{Aut}_Z(E) \rightarrow \text{Sp}(\mathfrak{F})$ сюръективен.

Доказательство (для случая $E \cong E_p^*$). Пусть $Z(E) = \langle c \rangle$. Группа E имеет «каноническую» систему образующих $\{a, b\}$: $a^p = b^p = 1$, $[a, b] = c$, если $p \neq 2$; $a^4 = 1$, $a^2 = b^2$, $[a, b] = c$, если $p = 2$. Допустим, что $p \neq 2$. Сбразы $\bar{a} = Z(E)a$, $\bar{b} = Z(E)b$ элементов a, b образуют базис пространства $\mathfrak{F}$. Если $\psi \in \text{Sp}(\mathfrak{F})$ и $A = (\alpha_{ij})$ — матрица ψ в базисе $\{\bar{a}, \bar{b}\}$, то в силу 1.29 $\det A = 1$. Так как $\exp(E) = p$, отсюда следует, что $\{a', b'\}$, где $a' = a^{\alpha_{11}} b^{\alpha_{21}}$, $b' = a^{\alpha_{12}} b^{\alpha_{22}}$ ** — каноническая система образующих группы E . Каждый элемент $x \in E$ представим в виде $a^\xi b^\eta c^\zeta$, где $\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{P}_p$ и однозначно определены. Полагая $\varphi(x) = a'^\xi b'^\eta c^\zeta$, легко проверим, что $\varphi \in \text{Aut}_Z(E)$ и $\psi = f(\varphi)$. Этим доказана сюръективность f . Если $p = 2$, то $E \cong Q_8$ и, следовательно, $\text{Aut}_Z(E) = \text{Aut}(E) \cong S_4$. Так как, ввиду 1.32, $|\text{Ker } f| = 4$, то $|f(\text{Aut}_Z(E))| = \frac{1}{4}|S_4| = 6 = |\text{Sp}(\mathfrak{F})|$. Поэтому $(\text{Aut}(E)) = \text{Sp}(E): f$ сюръективен.

1.34. Лемма. Пусть $\mathcal{H} < \text{Aut}_Z(E)$, $(|\mathcal{H}|, p) = 1$. Тогда $\mathfrak{H} = f(\mathcal{H}) \cong \mathcal{H}$, т.е. f определяет вложение $\mathcal{H}$ в $\text{Sp}(\mathfrak{F})$. Обратно, если $\mathfrak{H} < \text{Sp}(\mathfrak{F})$ и $(|\mathfrak{H}|, p) = 1$, то $\mathfrak{H} = f(\mathcal{H})$, где $\mathcal{H} < \text{Aut}_Z(E)$, $\mathcal{H} \cong \mathfrak{H}$.

Доказательство. Первая часть утверждения следует из 1.32. Пусть $\mathfrak{H} < \text{Sp}(\mathfrak{F})$, $(|\mathfrak{H}|, p) = 1$. Из 1.33 следует, что $\mathcal{U}/\mathcal{H} \cong \mathfrak{H}$, где $\mathcal{U} = f^{-1}(\mathfrak{H})$, $\mathcal{H} = \text{Ker } f$. Отсюда вытекает ввиду 1.32, что $\mathcal{H} \in \text{Syl}_p(\mathcal{U})$. Поэтому $\mathcal{U} = \mathcal{H} \cdot \mathcal{K}$, где $\mathcal{K} < \text{Aut}_Z(E)$, $\mathcal{K} \cong \mathfrak{H}^{***}$. Так как $f(\mathcal{K}) = f(\mathcal{U}) = \mathfrak{H}$, то доказана и вторая часть утверждения.

1.35. Лемма. Для каждого $p \in \{2, 3, 5, 7\}$ существует единственная (с точностью до изоморфизма) группа $G(\cong G_p)$ удовлетворяющая следующим ус-

* В работе находит применение только этот случай. Заметим, что в этом случае $\text{Sp}(\mathfrak{F}) = \text{SL}(\mathfrak{F})$.

** Если $x \in E$, $\lambda = 1 \text{ или } p \in \mathbb{P}_p (l \in \mathbb{Z})$, то x^λ корректно определяется равенством $x^\lambda = x^l$.

*** Легко видеть, что подгруппа $\mathcal{H}$ определяется подгруппой $\mathfrak{H}$ однозначно, с точностью до сопряженности в $\mathcal{U}$.

ловиям: (I) $G = E \cdot H$ (полупрямое произведение внутреннее), $E \cong E_p$, $H \cong H_p^{**}$; (II) $Z(E) \subseteq Z(G)$ и $C_H(E) = \{1\}$. В частности, $G_2 \cong SL(2, 3)$.

Доказательство. Так как $H_p < SL(2, p) = Sp(2, p)$ и $(|H_p|, p) = 1$, то в силу 1.34 существует мономорфизм $\omega_p: H_p \rightarrow \text{Aut}_Z(E_p)$. Пусть $G_p = E_p \cdot H_p$ — полупрямое произведение групп E_p и H_p , отвечающее мономорфизму ω_p . Тогда $G_p = E \cdot H$, где E и H -образы E_p и H_p при каноническом вложении в G_p и полупрямое произведение внутреннее. Группа G_p , как видно из ее построения, удовлетворяет условиям (I) и (II). Пусть, обратно, для группы G условия (I) и (II) выполнены. Из (II) вытекает существование мономорфизма $\omega: H \rightarrow \text{Aut}_Z(E)$: $\omega(h)(x) = h x h^{-1}$ ($h \in H, x \in E$). Пусть $\mathfrak{F} = E/Z(E)$. Так как $(|H|, p) = 1$, то в силу 1.34 $\gamma = f \circ \omega$ — мономорфизм H в $Sp(\mathfrak{F})$. Отображение γ является точным двумерным линейным P_p -представлением группы H . Пусть Γ_0 — его матричная реализация в базисе $\{\bar{U}_0, \bar{V}_0\}$ пространства $\mathfrak{F}$. Тогда в силу 1.29 $H_0 = \Gamma_0(H) < SL(2, p)$. Так как $H_0 \cong H_p$, то ввиду 1.30 $H_p = S^{-1}H_0S$, где $S \in SL(2, p)$, если $p \neq 2$ и $S \in GL(2, 7)$, если $p = 7$. Если $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ — базис $\mathfrak{F}$ связанный с базисом $\{\bar{u}_0, \bar{v}_0\}$ матрицей перехода S и Γ — матричная реализация γ в базисе $\{\bar{u}, \bar{v}\}$, то $\Gamma(H) = \mathfrak{H}$. Пусть $\{A_i\}_{1 \leq i \leq k}$ — стандартная система образующих группы H_p , $\{a_i\}_{1 \leq i \leq k}$ — соответствующая система образующих группы H : $\Gamma(a_i) = A_i$ ($i = 1, \dots, k$). Полагая $A_i = (\alpha_{rs}^{(i)} |_{P_p})_{1 \leq r, s \leq 2}$, где $\alpha_{rs}^{(i)} \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \alpha_{rs}^{(i)} < p$ ($r, s = 1, 2$) получим (в аддитивных обозначениях): $\gamma(a_i)(\bar{u}) = \alpha_{11}^{(i)}\bar{u} + \alpha_{21}^{(i)}\bar{v}$, $\gamma(a_i)(\bar{v}) = \alpha_{12}^{(i)}\bar{u} + \alpha_{22}^{(i)}\bar{v}$. Так как $Z(E) = \langle c \rangle$, где $c = [u, v]^{**}$, то переход к прообразам дает: $a_i u a_i^{-1} = u^{\alpha_{11}^{(i)}} v^{\alpha_{21}^{(i)}} c^{\lambda_i}$, $a_i v a_i^{-1} = u^{\alpha_{12}^{(i)}} v^{\alpha_{22}^{(i)}} c^{\mu_i}$, где $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \lambda_i, \mu_i < p$. Показатели λ_i, μ_i можно пронормировать (путем изменения системы $\{u, v\}$), так, чтобы они приняли стандартные значения. Это приводит к «стандартной» системе соотношений между образующими $u, v, c, a_1, \dots, a_k$ группы G . Так как $|G| = |G_p|$, то $G \cong G_p$.

Пусть, например, $p = 2$. Задав стандартную подгруппу $H_2 (\cong C(3))$ группы $SL(2, 2) (\cong S_3)$ в виде $\langle A \rangle$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, положим $H = \langle h \rangle$. Тогда $h u h^{-1} = v c^\lambda$, $h v h^{-1} = u v c^\mu$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \lambda, \mu < 2$. Если $u_1 = u c^\alpha$, $v_1 = v c^\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$), то $[u_1, v_1] = [u, v] = c$ и $h u_1 h^{-1} = v_1^{2-\beta+\lambda}$, $h v_1 h^{-1} = u_1 v_1 c^{\alpha+\mu}$. При $\alpha = \mu$, $\beta = \lambda + \mu$ получим (ввиду $c^2 = 1$): $h u_1 h^{-1} = v_1$, $h v_1 h^{-1} = u_1 v_1$. Таким образом, u и v можно выбрать так, чтобы имело место $\lambda = \mu = 0$. Так как $E \cong Q_8$, то образующие u, v, c, h группы G будут удовлетворять стандартной системе соотношений:

$$(1.2) \quad \begin{cases} u^4 = h^3 = c^2 = 1, & u^2 = v^2, & v u v^{-1} = u^{-1} \\ [u, c] = [v, c] = [h, c] = 1, & h u h^{-1} = v, & h v h^{-1} = u v. \end{cases}$$

Так как $|G| = |E| \cdot |H| = 8 \cdot 3 = 24$, то $G \cong G_2 \cong SL(2, 3)$.

Аналогичным способом получим стандартные системы соотношений для образующих группы G при $p \in \{3, 5, 7\}$. Если $p = 3$, то $H_3 = \langle A, B \rangle$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

* Группы E_p и H_p здесь считаются стандартными.

** Так как $Z(E)\langle u, v \rangle = Z$ и $\Phi(E) = Z(E)$, то $\langle u, v \rangle = E$, откуда $c = [u, v] \neq 1$. Поэтому $\langle c \rangle = Z(E)$.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} (A, B \in SL(2, 3))$; обозначив через a, b соответствующие образующие подгруппы H , получим (ввиду $H \cong Q_8$):

$$(1.3) \quad \begin{cases} u^3 = v^3 = c^3 = 1, & [u, v] = c, \\ [u, c] = [v, c] = [a, c] = [b, c] = 1, \\ a^4 = 1, & a^2 = b^2, & bab^{-1} = a^{-1}, \\ aua^{-1} = v, & ava^{-1} = u^{-1}, & bub^{-1} = uvc, & bvb^{-1} = uv^{-1}c^{-1}. \end{cases}$$

Если $p=5$, то $H_5 = \langle A, B, D \rangle$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} (A, B, D \in SL(2, 5))$. Если a, b, d — соответствующие образующие подгруппы H , то (ввиду $H \cong SL(2, 3)$):

$$(1.4) \quad \begin{cases} u^5 = v^5 = c^5 = 1, & [u, v] = c, \\ [u, c] = [v, c] = [a, c] = [b, c] = [d, c] = 1, \\ a^4 = d^3 = 1, & a^2 = b^2, & bab^{-1} = a^{-1}, & dad^{-1} = b, & dbd^{-1} = ab, \\ aua^{-1} = v^{-1}, & ava^{-1} = u, & bub^{-1} = u^2, & bvb^{-1} = v^{-2}, \\ dud^{-1} = u^{-2}v^{-2}c^{-2}, & dvd^{-1} = u^{-1}vc^{-2}. \end{cases}$$

Если $p=7$, то $H_7 = \langle A, B \rangle$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} (A, B \in SL(2, 7))$. Соответствующие образующие a, b подгруппы H удовлетворяют соотношениям $a^8 = b^4 = (ab)^3 = 1$. Стандартная система соотношений между образующими u, v, c, a, b группы G будет следующая:

$$(1.5) \quad \begin{cases} u^7 = v^7 = c^7 = 1, & [u, v] = c, \\ a^8 = b^4 = (ab)^3 = 1, \\ [u, c] = [v, c] = [a, c] = [b, c] = 1, \\ aua^{-1} = v, & ava^{-1} = u^{-1}v^3, \\ bub^{-1} = v^3c^2, & bvb^{-1} = u^2c^{-2}. \end{cases}$$

§ 2. DS -группы 1-го рода отличные от своего коммутанта

Установим сначала ряд общих свойств DS -групп. Пусть $\{G, x\}$ — произвольная DS -группа. Утверждения 2.1 и 2.2 непосредственно вытекают из определения DS -групп; 2.3 вытекает из точности χ и 1.7.

2.1. Предложение. Если $g \in T_x$, то $|T_x| \cdot |C_G(g)| = |G|$.

2.2. Предложение. Если $N \triangleleft G$, $N \cap T_x \neq \emptyset$, то $T_x \subset N_x$ и следовательно, $N \cong N_x$.

2.3. Предложение. $Z(G) = Z(N_x)$.

Из 2.2 и 1.20 вытекают предложения 2.4 и 2.5.

2.4. Предложение. Все главные ряды DS -группы $\{G, x\}$ проходят через N_x .

2.5. Предложение. N_χ покрывает* максимальные не содержащие нулей характера χ нормальные подгруппы группы G .

2.6. Предложение. Подгруппа N_χ неразложима в прямое произведение нетривиальных нормальных подгрупп группы G .

Доказательство. Пусть $N_\chi = L_1 \times L_2$, где $L_i \triangleleft G$, $L_i \neq \{1\}$ ($i=1, 2$). В силу 1.2 $\Theta = \chi_{N_\chi} \in \text{Irr}(N_\chi)$. Как известно [2], Θ — внешнее тензорное произведение $\Theta_1 \# \Theta_2$ характеров $\Theta_i \in \text{Irr}(L_i)$ ($i=1, 2$). Если $g = g_1 g_2$ ($g_i \in L_i$ ($i=1, 2$)), то $\chi(g) = \Theta_1(g_1) \Theta_2(g_2)$. В частности, если $g \in T_\chi$, то $\Theta_1(g_1) \Theta_2(g_2) = 0$. Если, например, $\Theta_1(g_1) = 0$, то $\chi(g_1) = \Theta_1(g_1) \Theta_2(1) = 0$. Поэтому $g_1 \in T_\chi$, откуда, в силу 2.2, $N_\chi \subseteq L_1$, что невозможно, так как $L_1 \subset N_\chi$.

2.7. Следствие. Если N_χ нильпотентна, то N_χ — p -группа.

Применим полученные результаты к DS -группам 1-го рода.

2.8. Теорема.** Если $\{G, \chi\}$ — DS -группа 1-го рода и $G \neq G'$, то $G \cong D_m$ (m нечетно).

Доказательство. Пусть M — максимальная нормальная подгруппа группы G содержащая G' . Тогда $G/M \cong C(p)$. Так как $N_\chi = G$, то ввиду 2.2 $M \cap T_\chi = \emptyset$, откуда, в силу 1.22 и неабелевости G , $Z(G) \subset M$. Так как $M \cap T_\chi = \emptyset$, то в силу 1.21 χ индуцируется из M , откуда, ввиду 1.11, $G \setminus M \subseteq T_\chi$. Так как $M \cap T_\chi = \emptyset$, $G \setminus M = T_\chi$. Поэтому $|T_\chi| = |G| - |M| = |M|(p-1)$. Учитывая 2.1., отсюда получаем для любого $g \in G \setminus M = T_\chi$: $(p-1)|C_G(g)| = p$. Следовательно, $p=2$ и $C_G(g) = \{1, g\}$. Отсюда легко следует, что $x \in M^\#$ влечет $C_G(x) \subseteq M$. Поэтому G — группа Фробениуса с ядром M . Так как $(G:M)=2$, то M — абелева группа нечетного порядка. Поскольку элементы из M инвертируются инволюциями группы G , то подгруппы, входящие в M нормальны в G . Так как $Sc(G) \subseteq N^{***}$, отсюда следует, что $Sc(M) = Sc(G)$. Так как χ точен, то в силу теоремы Гашюца [6, 12] $Sc(G)$ порождается некоторым G -классом, откуда легко вытекает цикличность $Sc(G)$. Поскольку цокль абелевой группы M цикличен, то и M циклична: $M = \langle a \rangle$. Если $b \in G \setminus M$, то $b^2 = 1$ и $b^{-1}ab = a^{-1}$. Следовательно, $G \cong D_m$ ($m = |M|$ нечетно).

2.9. Следствие. Нильпотентные DS -группы не существуют.

Доказательство. Вытекает из 1.13 и 2.8****

* Пусть $N_1, N_2 \triangleleft G$; N_2 покрывает N_1 если $N_1 \subset N_2$ и N_2/N_1 — главный фактор группы G .

** В [16] дано другое доказательство этой теоремы.

*** Цокль группы Фробениуса содержится в ее ядре.

**** Другое доказательство этого факта использует 1.9.

§ 3. DS-группы 2-го рода и 1-го типа

Пусть $\{G, \chi\}$ — DS-группа 2-го рода и 1-го типа, для которой $N'_\chi \neq N_\chi$.

3.1. Предложение. *Имеют место следующие утверждения: (I) N_χ — экстраспециальная p -группа: $N_\chi \cong Q_8$ и $G \cong SL(2, 3)$, если $p=2$; $N_\chi \cong E(p^{2\mu+1})$ ($\mu \geq 1$), если $p \neq 2$; (II) $\chi(1)=p^\mu$; (III) $G=N_\chi \cdot H$, где $H < G$, $|H|=p^{2\mu}-1$, $C_H(N_\chi)=\{1\}$; (IV) $T_\chi=N_\chi \setminus Z(G)=N_\chi \setminus Z(N_\chi)$; (V) $|C_G(g)|=p^{2\mu}$ для любого $g \in T_\chi$.*

Доказательство. Так как χ точен, то $Z(G)$ циклический. В силу 2.3 $Z(G) \subset N_\chi$ откуда следует, ввиду 2.5, что N_χ покрывает $Z(G)$. Если $M \triangleleft G$ и N_χ покрывает M , то в силу 1.22 $Z(G) \subseteq M \subset N_\chi$, откуда $M=Z(G)$. Отсюда и из 2.4 вытекает, что все главные ряды группы G проходят через N_χ и $Z(G)_\chi (=Z(N'_\chi))$. Так как $N'_\chi \subset N_\chi$ и $N'_\chi \triangleleft G$, отсюда следует, что $N'_\chi \subseteq Z(N_\chi)$. Поэтому главный фактор $N_\chi/Z(N_\chi)$ группы G является элементарной абелевой группой; следовательно, $|N_\chi/Z(N_\chi)|=p^v$, где p — простое число и $v > 0$. Подгруппа N_χ поэтому нильпотентная класса нильпотентности 2, откуда вытекает, ввиду 2.7, что N_χ — p -группа. Следовательно, в силу 1.2 (1), $\chi(1)=p^\mu$, где $\mu \geq 1$. Отсюда следует, ввиду 1.9, что $N_\chi \in \text{Syl}_p(G)$. В силу теоремы Шура — Цассенхауза

$$(3.1) \quad G = N_\chi \cdot H$$

где H — p' -подгруппа группы G . Из 3.1 и 1.4 вытекает, что $C_H(N_\chi)=\{1\}$. Применяя 1.26 к точному неприводимому характеру $\theta = \chi_{N_\chi}$ p -группы N_χ найдем, что $T_\theta = N_\chi \setminus Z(N_\chi)$ и $\theta(1)^2 = |N_\chi/Z(N_\chi)| = p^v$. Так как $\theta(1) = \chi(1) = p^\mu$, то $v=2\mu$. Таким образом, (поскольку $T_\theta = T_\chi$)

$$(3.2) \quad \chi(1) = p^\mu$$

$$(3.3) \quad |N_\chi/Z(G)| = p^{2\mu}$$

$$(3.4) \quad T_\chi = N_\chi \setminus Z(G).$$

Из (3.4) и (3.3) вытекает, что $|T_\chi| = |N_\chi| - |Z(G)| = |Z(G)|(p^{2\mu}-1)$. Отсюда с помощью 2.1, (3.1) и (3.3) получаем для любого $g \in T_\chi$: $(p^{2\mu}-1)|C_G(g)| = p^{2\mu}|H|$. Следовательно, $|C_G(g)| = p^{2\mu}m$, $|H| = (p^{2\mu}-1)m$, где m — натуральное число. Так как H — p' -подгруппа, то $(m, p)=1$. С другой стороны, в силу 1.4 $C_G(g)$ — p -группа. Поэтому $m=1$ и, следовательно,

$$(3.5) \quad |C_G(g)| = p^{2\mu}$$

$$(3.6) \quad |H| = p^{2\mu}-1.$$

Так как T_χ — G -класс, то все элементы $g \in T_\chi$ имеют один и тот же порядок p^σ , где (ввиду (3.5)) $\sigma \leq 2\mu$. Рассмотрим две возможности: $\sigma > 1$ и $\sigma = 1$.

Случай 1: $\sigma > 1$.

Так как $N_\chi = Z(G) \cup T_\chi$ и $Z(G)$ — циклическая p -группа, то N_χ содержит единственную подгруппу порядка p , откуда, ввиду нециклическости N_χ , вытекает, что N_χ — обобщенная группа кватернионов*. Поэтому $p=2$ и $|Z(G)|=$

* [8] Kap III. Satz 8.2.

$=|Z(N_\chi)|=2$. Так как $N_\chi/Z(N_\chi)$ — абелева группа, то $N_\chi \cong Q_8^*$ и, следовательно, $\mu=1$. В силу (3.2) и (3.6) $\chi(1)=2$. $|H|=3$, т. е. $H \cong C(3)$. Учитывая (3.1) и замечая, что $N_\chi \cong E_2$, $H \cong H_2$, $Z(N_\chi)=Z(G)$, $C_H(N_\chi)=\{1\}$, с помощью 1.35 ($p=2$, $E=N_\chi$) убеждаемся в том, что $G \cong SL(2, 3)$.

Случай 2: $\sigma=1$

Так как $Z(G)$ циклический, то $Z(G)=\langle c \rangle$. Если $g \in T_\chi$, то и $cg \in T_\chi$, откуда (ввиду $\sigma=1$) $|cg|=|g|=p$. Поэтому $c^p=1$, $|Z(G)|=p$. Так как $N_\chi/Z(G)$ — элементарная абелева p -группа и $Z(G)=Z(N_\chi)$, то N_χ — экстраспециальная p -группа. Из (3.4) и условия $\sigma=1$ следует, что $\exp N_\chi=p$. Ввиду неабелевости N_χ , $p \neq 2$ и в силу (3.3) $N_\chi \cong E(p^{2\mu+1})$.

В дальнейшем предполагается, что $p \neq 2$ (т. е. $\sigma=1$). Для выяснения строения подгруппы H рассмотрим группу $\mathfrak{G}=G/Z(G)$. Так как N_χ покрывает $Z(G)$, то $\mathfrak{G}$ имеет минимальную нормальную подгруппу $\mathfrak{F}=N_\chi/Z(G)$ (являющуюся элементарной абелевой группой порядка $p^{2\mu}$). Ввиду (3.1) и (3.6)

$$(3.7) \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{H}, \quad |\mathfrak{G}| = p^{2\mu}(p^{2\mu}-1)$$

где $\mathfrak{H} \cong H$ — образ H при естественном гомоморфизме $x \mapsto \bar{x}$ группы G на $\mathfrak{G}$.

3.2. Предложение. $\mathfrak{G}$ — дважды транзитивная группа Фробениуса с ядром Фробениуса $\mathfrak{F}^{**}$.

Доказательство. Так как $\mathfrak{F}=\bar{N}_\chi$ и $N_\chi=Z(G) \cup T_\chi$, $Z(G) \cap T_\chi=\emptyset$, то $\mathfrak{F}^*=\bar{T}_\chi$. Поскольку T_χ — G -класс, то $\mathfrak{F}^*$ — $\mathfrak{G}$ -класс. Поэтому из $\bar{x} \in \mathfrak{F}^*$ в силу (3.7) следует $|C_{\mathfrak{G}}(\bar{x})|=|\mathfrak{G}|/|\mathfrak{F}^*|=p^{2\mu}$. Так как $C_{\mathfrak{G}}(\bar{x}) \supseteq \mathfrak{F}$ и $|\mathfrak{F}|=p^{2\mu}$, отсюда вытекает, что $C_{\mathfrak{G}}(\bar{x})=\mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{G}$ — группа Фробениуса с ядром Фробениуса $\mathfrak{F}$. Так как $|\mathfrak{H}|=p^{2\mu}-1=|\mathfrak{F}|-1$, то $\mathfrak{G}$ — дважды транзитивная группа Фробениуса.

3.3 Следствие. $H(\cong \mathfrak{H})$ является группой без неподвижных точек и, следовательно (ввиду четности $|H|=p^{2\mu}-1$), содержит единственную инволюцию.

3.4. Следствие. Силовские подгруппы группы H либо циклические, либо являются обобщенными группами кватернионов. Если, в частности, силовские 2-подгруппы группы H циклические, то H метациклическа.

3.5. Предложение. Пусть $\omega(h)$ — автоморфизм N_χ , порожденный элементом $h \in H$: $\omega(h)(x)=h x h^{-1}$ ($x \in N_\chi$). Отображение $f \cdot \omega$ (f -канонический гомоморфизм $\text{Aut}_z(N_\chi)$ в $\text{Sp}(\mathfrak{F})$ введенный в 1.31 ($E=N_\chi$)) является мономорфизмом H в $\text{Sp}(\mathfrak{F})$.

Доказательство. Из $Z(N_\chi)=Z(G)$ следует, что $\omega \in \text{Hom}(H, \text{Aut}_z(N_\chi))$. В силу 3.1 (III) $\text{Ker } \omega = C_H(N_\chi) = \{1\}$. Инъективность гомоморфизма $f \cdot \omega$ вытекает поэтому из $(|H|, p)=1$ и 1.32.

3.6. Следствие. H изоморфна подгруппе порядка $p^{2\mu}-1$ группы $\text{Sp}(2\mu, p)$.

* В противном случае N_χ — группа диэдра.

** Абстрактная группа Фробениуса называется дважды транзитивной, если она изоморфна дважды транзитивной подстановочной группе Фробениуса.

Начиная с этого момента будем считать группу G разрешимой (условие $N'_x \neq N_x$ при этом выполняется автоматически).

3.7. Предложение.* Если $\{G, x\}$ — разрешимая DS-группа 2-го рода и 1-го типа, то (I) $\chi_H = \vartheta_1 + \vartheta_2$, где $\vartheta_i \in \text{Irr}(H)$ ($i=1, 2$). $\vartheta_1(1) = \frac{p^\mu + 1}{2}$, $\vartheta_2(1) = \frac{p^\mu - 1}{2}$; подгруппа H неабелева; (II) $\frac{p^\mu + 1}{2}$ — максимальная степень неприводимых характеров подгруппы H ; ϑ_1 — единственный ее неприводимый характер степени $\frac{p^\mu + 1}{2}$. Число s ее неприводимых характеров степени $\frac{p^\mu - 1}{2}$ удовлетворяет неравенствам $2 \leq s \leq 4$; (III) $H \setminus H' \subseteq T_{\vartheta_1}$, $N_{\vartheta_2} \subseteq H'$, $(\vartheta_2)_{H'} \in \text{Irr}(H')$; (IV) $|H/H'| \leq s$ и, следовательно, $2 \leq |H/H'| \leq 4$; (V) $Z(H) = Z(\vartheta_2) = \langle j \rangle$, где j — инволюция подгруппы H ; (VI) $j \in H'$.

Доказательство. Полагая $\chi_H = \sum_{i=1}^k m_i \vartheta_i$, где $\vartheta_i \in \text{Irr}(H)$, m_i — целое ≥ 1 ($i=1, \dots, k$), получим: $\sum_{x \in H} |\chi(x)|^2 = |H| \sum_{i=1}^k m_i^2$. Так как $H^\# \subset \Delta_\chi$, то в силу 1.2 $\sum_{x \in H} |\chi(x)|^2 = \chi(1)^2 + |H| - 1$, откуда, ввиду (3.2) и (3.6) $\sum_{x \in H} |\chi(x)|^2 = 2|H|$. Поэтому $\sum_{i=1}^k m_i^2 = 2$, откуда $k=2$, $m_1 = m_2 = 1$. Таким образом, $\chi_H = \vartheta_1 + \vartheta_2$. Из (3.2) и (1.2) следует, что

$$(3.8) \quad \vartheta_1(1) + \vartheta_2(1) = p^\mu$$

$$(3.9) \quad |\vartheta_1(x) + \vartheta_2(x)| = 1 \quad \text{для любого } x \in H^\#$$

Если j — инволюция из H , то $j \in Z(H)$ и, следовательно, $\vartheta_1(j) = \pm \vartheta_1(1)$, $\vartheta_1(j) = \pm \vartheta_2(1)$, откуда, ввиду (3.9) $|\vartheta_1(1) - \vartheta_2(1)| = 1$. Считая $\vartheta_1(1) > \vartheta_2(1)$, получим $\vartheta_1(1) - \vartheta_2(1) = 1$, откуда в силу (3.8)

$$(3.10) \quad \vartheta_1(1) = \frac{p^\mu + 1}{2}, \quad \vartheta_2(1) = \frac{p^\mu - 1}{2}.$$

Так как $p \geq 3$, то $\vartheta_1(1) \geq 2$; поэтому подгруппа H неабелева. Этим доказано утверждение (I).

Пусть r — число неприводимых характеров подгруппы H имеющих степень $\frac{p^\mu + 1}{2}$, s — число ее неприводимых характеров степени $\frac{p^\mu - 1}{2}$. Так как $\sum_{\vartheta \in \text{Irr}(H)} \vartheta(1)^2 = |H| = p^{2\mu} - 1$, то

$$(3.11) \quad r \left(\frac{p^\mu + 1}{2} \right)^2 + s \left(\frac{p^\mu - 1}{2} \right)^2 \leq p^{2\mu} - 1.$$

Из (3.11) вытекает, что при $r \geq 2$, $s \geq 2$, $p^{2\mu} - 1 \geq 2 \left(\frac{p^\mu + 1}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{p^\mu - 1}{2} \right)^2 = p^{2\mu} + 1$. Поэтому одно из чисел r, s равно 1. Если $s=1$, то $\lambda \vartheta_2 = \vartheta_2$ для любого $\lambda \in$

* В дальнейшем сохраняются обозначения принятые в 3.1. и предполагается $p \neq 2$.

$\in \text{Lin}(H)$, откуда $H \setminus H' \subseteq T_{\vartheta_2}$. Ввиду (3.9) отсюда вытекает, что $T_{\vartheta_1} \subseteq H'$ и, следовательно, $N_{\vartheta_1} \subseteq H'$. Так как $j \in Z(H) \subset N_{\vartheta_1}$, то $j \in Z(H')$. Далее, из $N_{\vartheta_1} \subseteq H'$ в силу 1.2 следует, что $\varphi = (\vartheta_1)_{H'} \in \text{Irr}(H')$, откуда вытекает в силу 1.25, что $\vartheta_1(1)^2 = \varphi(1)^2 \leq |H' / \langle j \rangle| \leq \frac{1}{4}|H| = \frac{p^{2\mu}-1}{4}$. Следовательно, снова $p^{2\mu} + 1 \leq p^{2\mu} - 1$. Таким образом, случай $s=1$ невозможен. Поэтому $r=1$, $s \geq 2$. Пусть $\theta \in \text{Irr}(H)$, $\theta(1) > \vartheta_1(1)$. Тогда $\theta(1)^2 + \vartheta_1(1)^2 + s\vartheta_2(1)^2 \leq |H|$, откуда, ввиду (3.6) и (3.10), $p^{2\mu} + 1 = 2\vartheta_1(1)^2 + 2\vartheta_2(1)^2 < \theta(1)^2 + \vartheta_1(1)^2 + s\vartheta_2(1)^2 \leq p^{2\mu} - 1$ — противоречие. Таким образом, $\frac{p^\mu+1}{2}$ — наибольшая степень неприводимых характеров подгруппы H . Так как $r=1$, то ввиду (3.11) $\left(\frac{p^\mu+1}{2}\right)^2 + s\left(\frac{p^\mu-1}{2}\right)^2 < p^{2\mu}$, откуда (так как $p \geq 3$) $s-1 < 2 \frac{p^\mu+1}{p^\mu-1} \leq 4$. Следовательно,

$$(3.12) \quad 2 \leq s \leq 4$$

Тем самым, доказано (II).

Ввиду $r=1$, для любого $\lambda \in \text{Lin}(H)$ имеем место $\lambda\vartheta_1 = \vartheta_1$. Поэтому $H \setminus H' \subseteq T_{\vartheta_1}$, откуда, ввиду (3.9), $T_{\vartheta_2} \subseteq H'$ и $N_{\vartheta_2} \subseteq H'$. В силу 1.2 $(\vartheta_2)_{H'} \in \text{Irr}(H')$. Этим доказано (III).

Для доказательства (IV) заметим, что $T_{\vartheta_2} \subseteq H'$ влечет инъективность отображения $\lambda \mapsto \lambda\vartheta_2$ ($\lambda \in \text{Lin}(H)$) множества $\text{Lin}(H)$ в множество $\{\vartheta \in \text{Irr}(H) \mid \vartheta(1) = \vartheta_2(1)\}$. Поэтому $|H/H'| = |\text{Lin}(H)| \leq s$, откуда в силу (3.12)

$$(3.13) \quad 2 \leq |H/H'| \leq 4$$

Так как $j \in Z(H) \subseteq Z(\vartheta_1)$, то $|Z(\vartheta_1)|$ четно. Полагая $|Z(\vartheta_1)| = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$) в силу 1.25 получим $\vartheta_1(1)^2 \leq |H/Z(\vartheta_1)|$, откуда $\left(\frac{p^\mu+1}{2}\right)^2 \leq \frac{p^{2\mu}-1}{2k}$. Следовательно, $p^{2\mu} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{4}\right) \geq \frac{1+2p^\mu}{4} + \frac{1}{2k} > 0$. Поэтому $k=1$ и, следовательно, $|Z(\vartheta_1)|=2$, откуда $Z(\vartheta_1) = Z(H) = \langle j \rangle$. Этим доказано (V). Так как $j \in Z(H)$ и в силу 1.7 $Z(H) \subset N_{\vartheta_2}$, то ввиду (III) $j \in H'$. Тем самым доказано (VI).

Рассмотрим теперь в отдельности каждый из трех возможных случаев $|H/H'| = 2, 3, 4$.

3.8. Предложение. Если $|H/H'| = 2$, то $H/\langle j \rangle \cong S_4$, $p=7$, $\mu=1$, $H \cong H_7$, $N_x \cong E_7$.

Доказательство. Так как H разрешима и $|H/H'| = 2$, то H' — единственная максимальная нормальная подгруппа в H . Силовская 2-подгруппа S группы H нециклическа: цикличность S в силу 3.4 влечет цикличность H' ; но тогда в силу 3.7 (III) $\frac{p^\mu-1}{2} = \vartheta_2(1) = 1$, откуда $p=3$, $\mu=1$, $|H| = 3^2 - 1 = 8$; следовательно, ввиду 3.3, $H \cong Q_8$, $|H/H'| = 4$ — противоречие*. Таким образом, S — обоб-

* Противоречие содержится уже в равенстве $|H| = 8$, из которого следует, что $H = S$ циклическа, вопреки 3.5 (I).

шенная группа кватернионов. Так как S содержит циклическую подгруппу индекса 2, то в силу 1.27 H содержит нормальную подгруппу N , все силовские подгруппы которой циклически, причем H/N изоморфна одной из групп $C(2)$, A_4 , S_4 . Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

Случай 1: $H/N \cong C(2)$.

Так как в этом случае $N = H'$, то все силовские подгруппы группы H' , а потому и группы $H'/\langle j \rangle$ циклически. Поэтому ([8] Кар V, Satz 25.3) группа $H'/\langle j \rangle$ имеет тривиальный мультипликатор. Все неприводимые проективные представления группы $H'/\langle j \rangle$ поэтому ассоциированы линейным представлениям*. Характер $(\vartheta_1)_{H'}$, ввиду циклическости H/N неразветвлен. Если $(\vartheta_1)_{H'}$ неприводим, то в силу 1.25 $\left(\frac{p^\mu+1}{2}\right)^2 = \vartheta_1(1)^2 \leq |H'/\langle j \rangle| = \frac{|H|}{4} = \frac{p^{2\mu}-1}{4}$, откуда $p^\mu + 1 \leq p^\mu - 1$ — противоречие. Таким образом, $(\vartheta_1)_{H'}$ приводим. Так как $|H/H'| = 2$, то $(\vartheta_1)_{H'} = \varphi + \varphi'$, где $\varphi, \varphi' \in \text{Irr}(H')$, $\varphi(1) = \varphi'(1) = \frac{1}{2} \vartheta_1(1) = \frac{p^\mu+1}{4}$.

Наряду с неприводимым характером φ степени $\frac{1}{2} \vartheta_1(1)$ группа H' имеет, ввиду 3.7 (III), неприводимый характер $(\vartheta_2)_{H'}$ степени $\vartheta_2(1) = \frac{p^\mu-1}{2}$. Равенство $\frac{1}{2} \vartheta_1(1) = \vartheta_2(1)$ влечет $p=3$, $\mu=1$, что, как было показано выше, невозможно.

Таким образом, $\frac{1}{2} \vartheta_1(1) \neq \vartheta_2(1)$. В силу 1.24 группа $H'/\langle j \rangle$ обладает неприводимыми проективными, а потому и неприводимыми линейными представлениями степеней $\varphi(1) = \frac{1}{2} \vartheta_1(1)$ и $\vartheta_2(1)$. Ввиду $\frac{1}{2} \vartheta_1(1) \neq \vartheta_2(1)$ отсюда вытекает, что $\left(\frac{1}{2} \vartheta_1(1)\right)^2 + \vartheta_2(1)^2 \leq |H'/\langle j \rangle|$; поэтому $\left(\frac{p^\mu+1}{4}\right)^2 + \left(\frac{p^\mu-1}{2}\right)^2 \leq \frac{p^{2\mu}-1}{4}$, откуда $(p^\mu-3)^2 \leq 0$, что снова приводит к противоречию $p=3$, $\mu=1$. Таким образом, рассматриваемый случай невозможен.

Случай 2: $H/N \cong A_4$.

Так как $N \triangleleft H$, $N \neq H$, то $N \subseteq H'^{**}$. Поскольку $(H/N)/(H'/N) \cong H/H' \cong C(2)$, то A_4 содержит подгруппу индекса 2 — противоречие. Следовательно, рассматриваемый случай невозможен.

Случай 3: $H/N \cong S_4$.

Как в выше, $N \subseteq H'$. Так как $(H/N:H'/N) = 2$, то $H'/N \cong A_4$. Следовательно, H содержит такую нормальную подгруппу V , что $N < V < H'$, $V/N \cong V_4^{***}$, $H'/V \cong C(3)$. Рассмотрим характер $\tilde{\vartheta}_2 = (\vartheta_2)_{H'}$. В силу 3.7 (III) $\tilde{\vartheta}_2 \in \text{Irr}(H')$.

* т. е. переходят в линейные представления после умножения на некоторую функцию $\lambda: H'/\langle j \rangle \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

** H' — единственная максимальная нормальная подгруппа группы.

*** V_4 — четверная группа Клейна.

Докажем, что $\mathfrak{J}_2(1) (= \mathfrak{J}_2(1))$ нечетно. Допустим, что $2|\mathfrak{J}_2(1)|$. Так как в силу 3.7 (III) $N_{\mathfrak{J}_2} \subseteq H'$, то применяя 1.10 к H и $\mathfrak{J}_2 \in \text{Irr}(H)$, найдем, что все силовские 2-подгруппы группы H содержатся в H' , что невозможно, ввиду $|H/H'|=2$. Таким образом $2 \nmid \mathfrak{J}_2(1)$. Пусть τ — неприводимая компонента характера $(\mathfrak{J}_2)_V = (\mathfrak{J}_2)_V$. Так как $H'/V \cong C(3)$, то характер $(\mathfrak{J}_2)_V$ неразветвлен и поэтому возможны лишь два случая: 1) $(\mathfrak{J}_2)_V = \tau$; 2) $(\mathfrak{J}_2)_V = \tau + \tau' + \tau''$, где τ' и τ'' — характеры подгруппы V H' -сопряженные с τ и отличные от τ и друг от друга.

Так как $\tau(1) = \frac{1}{m} \mathfrak{J}_2(1) (m=1 \text{ или } 3)$, $\tau(1)$ нечетно. Индекс ветвления e характера τ_N может быть равен лишь 1 или 2. Действительно, как известно [2], e равно степени неприводимого проективного представления группы I_σ/N , где σ — неприводимая компонента τ_N . Так как $N \leq I_\sigma \leq V$, то $|I_\sigma/N| \leq 4$ и, следовательно, в силу 1.23 $e \leq 2$. Ввиду нечетности $\tau(1)$, $e=1$. Таким образом, характер τ_N неразветвлен: $\tau_N = \sigma_1 + \dots + \sigma_l$, где σ_i — характеры N V -сопряженные с $\sigma = \sigma_1$, $l = (V:I_\sigma)$. Так как $N \leq I_\sigma \leq V$, то $l|4$, откуда вытекает, ввиду $l|\tau(1)$ и нечетности $\tau(1)$, что $l=1$. Таким образом, $\tau_N \in \text{Irr}(N)$. Легко видеть, что $|N|$ четно: в противном случае, ввиду $H/N \cong S_4$, подгруппа S была бы изоморфна силовской 2-подгруппе P группы S_4 , что невозможно, так как S -обобщенная группа кватернионов, а $P \cong D_4$. Из четности $|N|$ вытекает, что $j \in N$ и, следовательно, $j \in Z(N)$. Так как $\tau_N \in \text{Irr}(N)$, отсюда в силу 1.25 вытекает, что $\tau(1)^2 \leq |N/\langle j \rangle| = \frac{1}{48} |H|$. Так как $\tau(1) = \frac{1}{m} \mathfrak{J}_2(1) (m=1 \text{ или } 3)$, то

ввиду (3.10) $\frac{(p^\mu - 1)^2}{4m^2} \leq \frac{p^{2\mu} - 1}{48}$. Поэтому $\frac{p^\mu + 1}{p^\mu - 1} \leq \frac{12}{m^2} \leq \frac{4}{3}$, откуда $p^\mu \leq 7$. Сле-

довательно, $\mu=1$ и $p=3, 5$ или 7 . Случай $p=3$, как мы уже знаем, невозможен. Если $p=5$, то $|H|=5^2-1=24$, откуда $|N|=1$, что противоречит четности $|N|$. Таким образом, $p=7$. В силу (3.6) $|H|=7^2-1=48$. Следовательно, $N = \langle j \rangle$ и $H/\langle j \rangle \cong S_4$. Ввиду 3.1 $N_x \cong E(7^3) \cong E_7$. Из 3.6 и 1.29 следует, что $H \cong H_7$.

3.9. Предложение. Если $|H/H'|=3$, то $p=5$, $\mu=1$, $H \cong H_5 (\cong SL(2, 3))$, $N_x \cong E_5$.

Доказательство. Так как $(\mathfrak{J}_2)_{H'} \in \text{Irr}(H')$ и $\langle j \rangle \subseteq Z(H')$, то в силу 1.25 $\mathfrak{J}_2(1)^2 \leq |H'/\langle j \rangle| = \frac{1}{6} |H|$, откуда $\frac{p^\mu + 1}{p^\mu - 1} \leq \frac{3}{2}$. Поэтому $p^\mu \leq 5$ и, следовательно, $\mu=1$, $p=3$ или 5 . Так как $3||H|$ и $|H|=p^2-1$, то $p=5$ и $|H|=24$, $|H'|=8$. Ввиду 3.1 $N_x \cong E(5^3) \cong E_5$. Так как $|H|=24$, то из 3.6 и 1.29 следует, что $H \cong H_5$.

3.10. Предложение. Если $|H/H'|=4$, то $p=3$, $\mu=1$, $H \cong H_3 (\cong Q_8)$, $N_x \cong E_3$.

Доказательство. Так как $(\mathfrak{J}_2)_{H'} \in \text{Irr}(H')$ и $\langle j \rangle \subseteq Z(H')$, то в силу 1.25 $\mathfrak{J}_2(1)^2 \leq |H'/\langle j \rangle| = \frac{1}{8} |H|$. Поэтому $\left(\frac{p^\mu - 1}{2}\right)^2 \leq \frac{p^{2\mu} - 1}{8}$, откуда $p^\mu \leq 3$. Следовательно, $\mu=1$, $p=3$, $|H|=3^2-1=8$. В силу 3.1. $N_x \cong E(3^3) \cong E_3$. Из 3.6 и 1.25 следует что $H \cong H_3 (\cong Q_8)$.

Объединяя утверждения 3.1, 3.8—3.10, получаем:

3.11. Предложение. Если $\{G, \chi\}$ — разрешимая DS -группа 2-го рода 1-го типа, то (I) $G = N_\chi \cdot H$, где $N_\chi \cong E_p$, $H \cong H_p$, $p \in \{2, 3, 5, 7\}$; (II) H действует сопряжениями тривиально на $Z(N_\chi) (= Z(G))$ и $C_H(N_\chi) = \{1\}$; (III) Характер χ является продолжением точного неприводимого характера подгруппы N_χ ; $\chi(1) = p$.

3.12. Следствие. Если $\{G, \chi\}$ — разрешимая DS -группа 2-го рода 1-го типа, то G изоморфна одной из четырех групп G_p ($p \in \{2, 3, 5, 7\}$) описываемых леммой 1.35.

3.13. Предложение. Группы G_p ($p \in \{2, 3, 5, 7\}$) являются носителями DS -групп 2-го рода и 1-го типа: группа G_p обладает $v_p = (p-1)|H_p/H'_p|$ DS -характерами, все они 2-го рода и 1-го типа ($v_2=3$, $v_3=8$, $v_5=v_7=12$); G_2 и G_5 — носители D -групп.

Доказательство.* Согласно 1.35, $G_p = E \cdot H$, где $E \cong E_p$, $H \cong H_p$. Так как точные неприводимые характеры подгруппы E обращаются на $E \setminus Z(E)$ в нуль и $Z(E) \subseteq Z(G_p)$, то все они G_p -инвариантны. Так как $G_p/E \cong H_p$ — группа без неподвижных точек, то мультипликатор G_p/E тривиален. Поэтому все G_p -инвариантные неприводимые характеры подгруппы E продолжаемы на группу G_p^{**} . Пусть $\theta \in \text{Irr}(E)$ и χ — продолжение θ на G_p . Доказывается, что $\chi_H = \vartheta_1 + \vartheta_2$, где $\vartheta_i \in \text{Irr}(H)$ ($i=1, 2$), $\vartheta_1 \neq \vartheta_2$. Это позволяет доказать, что $T_\chi \cap H = \emptyset$. Отсюда следует, что $T_\chi = E \setminus Z(E)$. Действительно, $T_\chi \supseteq T_\theta = E \setminus Z(E)$. С другой стороны, если $u \in \Delta = G_p \setminus E$, то u сопряжен с hz , где $h \in H$, $z \in Z(E)$. Поэтому $\chi(u) = \chi(hz) = \varepsilon \chi(h) \neq 0$ (ε -корень из 1). Следовательно, $T_\chi \cap \Delta = \emptyset$, откуда $T_\chi = E \setminus Z(E)$. Далее, проверяется, что T_χ — G_p -класс. Поэтому χ — DS -характер 2-го рода (и, очевидно, 1-го типа) группы G_p . Так как каждый характер θ допускает $|H/H'|$ продолжений, а группа $E (\cong E_p)$ имеет ровно $p-1$ точных неприводимых характеров***, то группа G_p имеет $(p-1)|H_p/H'_p|$ DS -характеров 2-го рода и 1-го типа. Других DS -характеров группа G_p не имеет.

Из 3.12 и 3.13 вытекает следующий основной результат.

3.14. Теорема. Носителями разрешимых DS -групп 2-го рода и 1-го типа являются группы G_p ($p=2, 3, 5, 7$) и только они.

Литература

- [1] W. BURNSIDE, On an arithmetical theorem connected with roots of unity and its applications to group characteristics. *Proc. Lond. Math. Soc.* (2) (1904), 112—116.
- [2] CH. W. CURTIS and I. REINER, Representation theory of finite groups and associative algebras. *New York—London* 1962.
- [3] L. DORNHOF, Group Representation Theory. *New York*, 1971.
- [4] R. FRUCHT, Über die Darstellung endlicher abelscher Gruppen durch Kollineationen. *J. Reine Angew. Math.* **166** (1932), 16—29.
- [5] P. X. GALLAGHER, Zeros of characters of finite groups, *J. of Algebra* **4** (1966), 42—45.

* Ниже дается лишь набросок доказательства.

** [8], Kap V, Satz 17.12.

*** [3], § 31.

- [6] W. GASCHUTZ, Endliche Gruppen mit treuen absolut-irreduziblen Darstellungen, *Math. Nachr.*, **12**, (1954), 253—254.
- [7] H. HASSE, Zahlentheorie. *Berlin*, 1963.
- [8] B. HUPPERT, Endliche Gruppen. I. *Berlin—Heidelberg* 1967.
- [9] D. S. PASSMAN, Permutation Groups. *New York—Amsterdam* 1968.
- [10] Д. А. Супруненко, Разрешимые и нильпотентные линейные группы, *Минск* 1958.
- [11] H. ZASSENHAUS, Über endliche Fastkörper. *Hamburg Abh.*, **11** (1936) 187—220.
- [12] Э. М. Жмудь, Об изоморфных линейных представлениях конечных групп, *Мат. сб.*, **38** (1956), 417—430.
- [13] Э. М. Жмудь, Симплектические геометрии и проективные представления конечных абелевых групп, *Мат. сб.*, **87** (1972), 3—17.
- [14] Э. М. Жмудь, О нулях групповых характеров, *Успехи математических наук*, том XXXII, вып. 6 (1977), 223—224.
- [15] Э. М. Жмудь, И. В. Михайлова, Об одном экстремальном классе конечных групп. — «ВИНИТИ», № 3578—78 Деп.
- [16] Э. М. Жмудь, О конечных группах обладающих неприводимым характером разделяющим классы сопряженных элементов. *Сборник «Вопросы теории групп и гомологической алгебры» Вып 2, Ярославль*, 1979.

(Позмутило 13. VII. 1979 г.)