

Über Weyl—Otsukische Räume

Von ARTHUR MOÓR (Sopron)

Einleitung. Die Otsukischen allgemeinen Übertragungstheorien¹ sind dadurch charakterisiert, daß die kovariante Ableitung der Tensoren für die kovarianten bzw. kontravarianten Indizes mit verschiedenen Übertragungsparametern ${}''\Gamma_{jk}^i$ bzw. $'\Gamma_{jk}^i$ festgelegt ist, die aber nicht ganz beliebig vorgegeben werden können, d. h. sie bestimmen nicht die unabhängigen Grundgrößen des Raumes, sondern sind durch die Relation

$$(0.1) \quad \partial_k P_j^i + {}''\Gamma_{rk}^i P_j^r - '\Gamma_{jk}^s P_s^i = 0$$

miteinander verknüpft. Der Tensor $P_j^i(x)$ in (0.1) soll immer einen eindeutig bestimmten inversen Tensor $Q_k^j(x)$ haben, d. h. es ist $\text{Det}(P_j^i) \neq 0$ und $P_j^i Q_k^j = \delta_k^i$. Als Grundgrößen können also z. B. ${}''\Gamma_{jk}^i$ und P_j^i gewählt werden, die Übertragungsparameter $'\Gamma_{jk}^i$ sind dann durch (0.1) eindeutig bestimmt.

In unserem Aufsatz [1] begründeten wir eine solche Übertragung, in der ${}''\Gamma_{jk}^i$ aus einem metrischen Grundtensor $g_{ij}(x)$ gebildet wurde, der rekurrente kovariante Ableitung hatte. Diejenige Otsukischen Räume, in denen die Übertragung durch g_{ij} , P_j^i und durch den Rekurrenzvektor γ_k definiert ist, haben wir Weyl—Otsukische W — O_n -Räume genannt. Diese sind also durch $\nabla_k g_{ij} = \gamma_k g_{ij}$ charakterisiert.

Im folgenden wollen wir das Problem untersuchen, daß unter welchen Bedingungen die kovariante Ableitung des kontravarianten metrischen Grundtensors g^{ij} in einem W — O_n -Raum auch rekurrent ist. Bekanntlich ist in den gewöhnlichen Weyl-schen Räumen $\nabla_k g^{ij} = -\gamma_k g^{ij}$, d. h. der Tensor g^{ij} ist in diesen Räumen immer rekurrent, während in den W — O_n -Räumen das nur unter weiteren Bedingungen erfüllt ist.

Das Kronecker- δ_k^i kann als der gemischte metrische Fundamentaltensor betrachtet werden. Es ist in den W — O_n -Räumen im allgemeinen $\nabla_k \delta_j^i \neq 0$. Im Paragraphen 3 werden wir auch diejenigen Bedingungen bestimmen, die die Gültigkeit der Relation $\nabla_k \delta_j^i = \psi_k \delta_j^i$ sichern.

Dementsprechend stellen wir im § 1. die wichtigsten Relationen der W — O_n -Räume zusammen; dann, in §§ 2—3, bestimmen wir die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Rekurrenz von g^{ij} und δ_j^i . Die Integrabilitätsbedingungen von P_j^i sichern, daß bei gegebenen ${}''\Gamma_{jk}^i$ die P_j^i so bestimmt werden können, daß die kovariante Ableitung von δ_j^i rekurrent sei.

¹ Vgl. [2]. Das Schriftenverzeichnis befindet sich am Ende unseres Artikels.

Endlich werden wir im § 4., in den Schlußbemerkungen beweisen, daß die Summe der Rekurrenzvektoren von g_{ij} und g^{ij} gleich $2\psi_m$ ist, wenn ψ_m den Rekurrenzvektor von δ_j^i bedeutet.

§ 1. Grundformeln der W—O_n-Räume. Ein Otsukischer O_n-Raum ist eine Punktmannigfaltigkeit in der die geometrische Struktur durch ein invariantes Differential von der Form (vgl. [1], (1.1)—(1.5), oder [2], (4.9)—(4.10)):

$$(1.1) \quad DV_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} := P_{r_1}^{i_1} \dots P_{r_p}^{i_p} V_{s_1 \dots s_q | k}^{r_1 \dots r_p} dx^k P_{j_1}^{s_1} \dots P_{j_q}^{s_q},$$

$$(1.1a) \quad V_{s_1 \dots s_q | k}^{r_1 \dots r_p} := \partial_k V_{s_1 \dots s_q}^{r_1 \dots r_p} + \sum_{t=1}^p {}'\Gamma_{h t k}^{r_t} V_{s_1 \dots s_{t-1} h s_{t+1} \dots s_q}^{r_1 \dots r_{t-1} r_{t+1} \dots r_p} - \\ - \sum_{t=1}^q {}''\Gamma_{s_t k}^h V_{s_1 \dots s_{t-1} h s_{t+1} \dots s_q}^{r_1 r_2 \dots r_p}$$

festgelegt ist, wo $V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ einen beliebigen Tensor, ${}'\Gamma_{j k}^i$ und ${}''\Gamma_{j k}^i$ Übertragungsparameter bzw. P_j^i einen angegebenen, die geometrische Struktur bestimmenden Tensor bedeutet. Zwischen die Grundgrößen besteht die Relation (0.1).

Die fundamentale kovariante Ableitung von (1.1), ist nach (1.1a)

$$(1.2) \quad \nabla_k V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} := P_{r_1}^{i_1} \dots P_{r_p}^{i_p} V_{s_1 \dots s_q | k}^{r_1 \dots r_p} P_{j_1}^{s_1} \dots P_{j_q}^{s_q}.$$

Der O_n-Raum wird ein Weyl—Otsukischer W—O_n-Raum, falls die Übertragungsparameter ${}''\Gamma_{j k}^i$ von einem metrischen Grundtensor $g_{ij}(x)$ — der in i, j selbstverständlich symmetrisch sein muß — abgeleitet sind, so, daß

$$(1.3) \quad \nabla_k g_{ij} = \gamma_k g_{ij}$$

gültig sei (vgl. [1], (1.7)). Die Grundgrößen eines W—O_n-Raumes sind hiernach der metrische Grundtensor $g_{ij}(x)$, der Rekurrenzvektor $\gamma_k(x)$ und der Tensor $P_j^i(x)$.

Bezüglich $P_j^i(x)$ nehmen wir an, daß die Symmetrieforderung

$$(1.4) \quad P_{ij} := g_{ir} P_j^r = g_{jr} P_i^r = P_{ji}$$

gültig ist. Aus dieser Bedingung folgt auch, daß die kovariante Form des inversen Tensors von P_j^i , d. h. Q_{ij} auch symmetrisch ist. Es gilt nämlich nach (1.4): $g_{ik} = P_{kj} Q_i^j$ und somit wird

$$(1.4a) \quad Q_{im} = g_{ik} Q_m^k = P_{kj} Q_i^j Q_m^k = P_{kj} Q_m^k Q_i^j = g_{mj} Q_i^j = Q_{mi}.$$

Die Übertragungsparameter ${}''\Gamma_{j k}^i$ können in den W—O_n-Räumen aus (1.3) berechnet werden. Im Hinblick auf (1.1a) und (1.2) wird (vgl. [1], Formel (2.3))

$$(1.5) \quad {}''\Gamma_{i k}^j = \{i^j k\} - \frac{1}{2} (\gamma_k m_i^j + \gamma_i m_k^j - \gamma^j m_{ik}),$$

wo $\{i^j k\}$ die aus g_{ij} gebildeten Christoffelklammern zweiter Art bedeuten, ferner im Hinblick auf (1.4a)

$$(1.6) \quad m_{ik} := g_{ab} Q_i^a Q_k^b \equiv g_{ai} Q_b^a Q_k^b, \quad m_k^i = Q_a^i Q_k^a.$$

Die Übertragungsparameter ${}'\Gamma_{j k}^h$ können somit aus (0.1) nach einer Kontraktion mit Q_i^h bestimmt werden.

§ 3. **Rekurrenz von g^{ij} .** Vor allem berechnen wir $\nabla_k g^{ij}$. Auf Grund von (1.2) und (1.1a) wird:

$$(2.1) \quad \nabla_k g^{ij} = P_a^i P_b^j (\partial_k g^{ab} + g^{at} \Gamma_{t k}^b + g^{tb} \Gamma_{t k}^a).$$

Auf Grund von $g_{tr} g^{rb} = \delta_t^b$ wird nach partieller Ableitung nach x^k und Überschiebung mit g^{at}

$$(2.2) \quad \partial_k g^{ab} = -g^{at} g^{rb} \partial_k g_{tr}.$$

Aus (1.3) bekommt man (vgl. [1], (2.2a)) im Hinblick auf (1.6)

$$(2.3) \quad \partial_k g_{tr} = g_{ts} \Gamma_{rk}^s + g_{rs} \Gamma_{tk}^s + \gamma_k m_{tr}.$$

Aus (2.2) wird somit

$$\partial_k g^{ab} = -g^{tb} \Gamma_{tk}^a - g^{at} \Gamma_{tk}^b - \gamma_k m^{ab},$$

und nach (2.1) bekommt man auf Grund der Identität

$$(2.4) \quad \delta_{t|k}^b = \Gamma_{tk}^b - \Gamma_{tk}^b$$

die Formel

$$\nabla_k g^{ij} = P_a^i P_b^j (g^{at} \delta_{t|k}^b + g^{bt} \delta_{t|k}^a - \gamma_k m^{ab}).$$

Beachtet man jetzt (1.4) und (1.4a) d. h. die Symmetrie des P -bzw. Q -Tensors, die offenbar auch für die rein kontravarianten Komponenten besteht, so folgt im Hinblick auf (1.6):

$$(2.5) \quad \nabla_k g^{ij} = -\gamma_k g^{ij} + P_a^i P_b^j (g^{at} \delta_{t|k}^b + g^{bt} \delta_{t|k}^a).$$

Aus (2.5) folgt unmittelbar wegen $\text{Det}(P_i^j) \neq 0$ der folgende

Satz 1. *Es ist*

$$(2.6(2.6)) \quad g^{at} \delta_{t|k}^b + g^{bt} \delta_{t|k}^a = (\gamma_k^* + \gamma_k) g^{rs} Q_r^a Q_s^b$$

notwendig und hinreichend dafür, daß aus (1.3) die Relation

$$(2.7) \quad \nabla_k g^{ij} = \gamma_k^* g^{ij}$$

folge, wo γ_k^ einen kovarianten Vektor bedeutet.*

Bemerkung. Der Fall $\nabla_k g^{ij} = -\gamma_k g^{ij}$, die in den gewöhnlichen Weylschen Räumen gültig ist, ist offenbar durch $\gamma_k^* = -\gamma_k$ gekennzeichnet. In den $W-O_n$ -Räumen kann aber auch $\gamma_k^* \neq -\gamma_k$ bestehen.

Die Gleichungen (2.6) bilden im wesentlichen ein partielles Differentialgleichungssystem für die P_k^i ; das wollen wir im folgenden bestimmen. Unter Beachtung von (2.4) bekommt man aus (2.6) nach einer Kontraktion mit $P_{ia} P_{jb}$ im Hinblick auf (1.4)

$$(2.8) \quad (\Gamma_{tsk} - \Gamma_{tsk}) P_i^t P_j^s + (\Gamma_{tsk} - \Gamma_{tsk}) P_j^t P_i^s = (\gamma_k^* + \gamma_k) g_{ij}.$$

Aus (0.1) bekommt man

$$(2.9) \quad \Gamma_{tsk} = (\partial_k P_t^h + \Gamma_{rk}^h P_t^r) Q_h^m g_{ms}.$$

Substituiert man dies in (2.8), so wird nach gewissen Vertauschungen der Indizes und zufolge der Annahme (1.4):

$$(2.10) \quad g_{s(j} P_i^t \partial_k P_t^s = {}''\Gamma_{tsk} P_{(i}^t P_{j)}^s - {}''\Gamma_{r(j|k|} P_i^t P_t^r + \frac{1}{2} (\gamma_k^* + \gamma_k) g_{ij}.$$

Satz 2. Das Differentialgleichungssystem (2.10) ist notwendig und hinreichend dafür, daß aus (1.3) die Relation (2.7) folge.

BEWEIS. Die Notwendigkeit haben wir schon gezeigt, da (2.10) aus (2.4) abgeleitet wurde. (2.10) ist aber auch hinreichend, da wenn man (0.1) beachtet, d. h. $\partial_k P_t^s$ eliminiert wird, so erhält man aus (2.10) unter Beachtung von (1.4) die Gleichung (2.8), die nach (2.4) eben mit (2.4) übereinstimmt.

Bemerkung. Die Gleichung (2.10) ist nach (1.5) allein durch g_{ij} , γ_k , γ_k^* und P_j^i bestimmt, sie bildet somit eine Bedingung zwischen den Grundgrößen des $W-O_n$ -Raumes. γ_k^* ist im wesentlichen auch ein Grundvektor — nämlich der Rekurrenzvektor von g^{ij} — des Raumes.

§ 3. Rekurrenz von δ_k^i . In den $W-O_n$ -Räumen ist die kovariante Ableitung von δ_k^i — wie wir es in (2.4) schon gezeigt haben — im allgemeinen von Null verschieden. Nehmen wir jetzt an, daß

$$(3.1) \quad \nabla_k \delta_j^i = \psi_k \delta_j^i, \quad \psi_k = \psi_k(x)$$

besteht, wo ψ_k einen vorgegebenen kovarianten Vektor bedeutet, und bestimmen wir die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für (3.1). Auf Grund der Definition der kovarianten Ableitung (1.2) bzw. (2.4) erhält man im Hinblick auf (1.6)

$$\delta_{r|k}^s = \psi_k Q_j^s Q_r^j \equiv \psi_k m_r^s,$$

bzw.

$$(3.2) \quad {}'\Gamma_{rk}^s = {}''\Gamma_{rk}^s + \psi_k m_r^s.$$

Substituiert man das in (0.1), so wird

$$(3.3) \quad \partial_k P_j^i + {}''\Gamma_{rk}^i P_j^r - {}''\Gamma_{jk}^s P_s^i - \psi_k Q_j^i = 0.$$

Es besteht der folgende

Satz 3. Die Gleichungen (3.3) sind notwendig und hinreichend für die Rekurrenz der kovarianten Ableitung von δ_j^i , d. h. für das Bestehen der Formel (3.1).

BEWEIS. Aus (3.3) folgt nach (0.1) die Formel (3.2) und auf Grund von (2.4) bekommt man (3.1).

Bemerkung. (3.3) kann als ein Gleichungssystem für ${}''\Gamma_{jk}^i$, oder als ein Differentialgleichungssystem für P_j^i betrachtet werden.

Sind ${}''\Gamma_{jk}^i$ angegeben, so ist in diesem Falle sehr leicht für P_j^i die Integrabilitätsbedingungen von (3.3) zu bestimmen, die notwendig und hinreichend für das Bestehen von (3.1) sind. Diese Integrabilitätsbedingungen sind nach dem Thomas—Veblen'schen Kriterium (vgl. [3]) $\partial_{[km]}^2 P_j^i = 0$; aus (3.3) bekommt man:

$$(3.4) \quad {}''R_{s\ km}^i P_j^s - {}''R_{j\ km}^s P_s^i - 2{}''\nabla_{[m} \psi_{k]} Q_j^i - 2\psi_{[k} {}''\nabla_{m]} Q_j^i = 0,$$

wo ${}^{\prime\prime}R_{skm}^i$ der aus ${}^{\prime\prime}\Gamma_{sk}^i$ gebildete Krümmungstensor bzw. ${}^{\prime\prime}\nabla_m$ die allein mit ${}^{\prime\prime}\Gamma_{sk}^i$ gebildete kovariante Ableitung bezeichnet.

Ist nun (3.4) eine Identität, so hat (3.3) n^2 unabhängige Lösungen. Ist (3.4) keine Identität, so muß (3.4) unter Beachtung von (3.3) partiell abgeleitet werden und die erhaltene neue Gleichung muß man wieder partiell ableiten, falls sie nicht identisch erfüllt ist. Bekommt man auf diese Weise $p \leq n^2$ unabhängige Gleichungen (einschließend auch (3.4)), und existiert eine Zahl $N \leq n^2$, so daß die $(N+1)$ -te Gleichung vermöge der vorigen identisch erfüllt ist, so hat die Lösung (n^2-p) beliebig wählbare Konstante. Für $p > n^2$ ist (3.3) nicht lösbar, d. h. (3.1) kann für die angegebenen ${}^{\prime\prime}\Gamma_{jk}^i$ nicht bestehen.

§ 4. Schlußbemerkungen. Nehmen wir jetzt an, daß g_{ij} , g^{ij} und δ_j^i alle rekurrente kovariante Ableitung haben, d. h. die Formeln (1.3), (2.7) und (3.1) bestehen. Offenbar besteht immer

$$\nabla_k(g_{jt}g^{it}) = \nabla_k\delta_j^i.$$

Nach (1.2) wird wegen $g^{tb}g_{ta} = \delta_a^b$:

$$P_b^i P_j^a (g^{tb} \partial_k g_{at} + g_{at} \partial_k g^{tb} + {}^{\prime\prime}\Gamma_s^b g_{at} g^{st} - {}^{\prime\prime}\Gamma_a^r g_{rt} g^{bt}) = \nabla_k \delta_j^i.$$

Beachten wir jetzt (1.1a), so wird:

$$(4.1) \quad P_b^i P_j^a (g^{tb} (g_{at|k} + {}^{\prime\prime}\Gamma_{ik}^r g_{ra}) + g_{at} (g^{tb|k} - {}^{\prime\prime}\Gamma_{sk}^t g^{sb})) = \nabla_k \delta_j^i.$$

Die Symmetriebedingungen (1.4), die selbstverständlich auch auf die kontravarianten Komponenten von P_j^i gültig sind, führt uns nach (2.4) auf

$$(4.2) \quad g^{is} \nabla_k g_{sj} + g_{js} \nabla_k g^{is} - g_{aj} g^{bi} \nabla_k \delta_b^a = \nabla_k \delta_j^i.$$

Aus dieser Formel folgt der

Satz 4. Ist in einem metrischen O_n -Raum der Grundtensor $g_{is} P_j^s = P_{ij}$ in i, j symmetrisch, so besteht die Relation (4.2). Sind noch $\nabla_k g_{ij}$, $\nabla_k g^{ij}$ und $\nabla_k \delta_j^i$ rekurrent mit den Rekurrenzvektoren γ_k , γ_k^* und ψ_k , so folgt aus (4.2)

$$(4.3) \quad \gamma_k + \gamma_k^* = 2\psi_k.$$

BEWEIS. Substituiert man die entsprechenden Größen von (1.3), (2.7) und (3.1) in die Gleichung (4.2), so erhält man (4.3), w. z. b. w.

In den gewöhnlichen Riemann—Weylschen Räumen, in denen also $P_j^i = \delta_j^i$ ist, gilt immer $\psi_k = 0$, und nach (4.3): $\gamma_k^* = -\gamma_k$.

Schriftenverzeichnis

- [1] ARTHUR MOÓR, Otsukische Übertragung mit rekurrentem Maßtensor. *Acta Sci. Math.* **40** (1978), 129—142.
- [2] TOMINOSUKE OTSUKI, On general connections I. *Math. Journal of Okayama University* **9** (1960), 99—164.
- [3] J. M. THOMAS—O. VEULEN, Projective invariants of affine geometry of paths. *Ann. of Math.* **27** (1926), 279—296.

(Eingegangen am 18. Oktober 1981.)