

Описание всех конечномерных вещественных представлений групп, содержащих бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса

С. Д. БЕРМАН (ХАРЬКОВ) — К. БУЗАШИ (ДЕБРЕЦЕН)

Пусть G —группа, содержащая бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса, а KG —групповая алгебра группы G над полем K . В [1] описаны все конечно порождённые KG -модули в случае, когда K —алгебраически замкнутое поле с некоторым ограничением на характеристику (в частности, когда K —поле характеристики нуль).

Пусть C, R, Q обозначают соответственно поле комплексных чисел, поле вещественных чисел и тело кватернионов над полем R . В настоящей статье даётся описание всех R -конечномерных RG -модулей. Все рассматриваемые модули предполагаются левыми и унитарными.

В [2] показано, что групповая алгебра RG разлагается в прямую сумму двухсторонних идеалов, являющихся полными матричными кольцами над некоторыми алгебрами (вещественные алгебры типа E). Существует 15 типов вещественных алгебр типа E . Каждая такая алгебра является скрещенной групповой алгеброй бесконечной циклической группы (a) или бесконечной группы диэдра $(D=(a) \cdot (b), b^2=1, b^{-1}ab=a^{-1})$ над полем C , полем R или телом Q .

Если L означает одно из тел C, R и Q , то будем обозначать через $L(a)$ групповую алгебру бесконечной циклической группы (a) над L .

Согласно [2], вещественные алгебры типа E задаются так:

$$A_1 = R(a); \quad A_2 = C(a); \quad A_3 = Q(a);$$

$A_4 = C_1(a)$ скрещенная групповая алгебра бесконечной циклической группы (a) над полем C :

$$\lambda a = a\bar{\lambda}, \quad \lambda \in C \quad (\bar{\lambda} \text{—сопряженное с } \lambda);$$

$A_5 = \{R(a), b\}$, $A_6 = \{C(a), b\}$, $A_7 = \{Q(a), b\}$ — групповые алгебры бесконечной группы диэдра D соответственно над полями R, C и телом Q ;

$$A_8 = \{C_1(a), b\}, \quad b^{-1}ab = a^{-1}, \quad b^2 = 1, \quad \lambda a = a\bar{\lambda}, \quad \lambda b = b\lambda \quad (\lambda \in C);$$

$$A_9 = \{R(a), b\}, \quad b^{-1}ab = a^{-1}, \quad b^2 = -1, \quad \lambda a = a\bar{\lambda}, \quad \lambda b = b\lambda \quad (\lambda \in R);$$

$$A_{10} = \{R(a), b\}, \quad b^{-1}ab = -a^{-1}, \quad b^2 = 1, \quad \lambda a = a\lambda, \quad \lambda b = b\lambda \quad (\lambda \in R);$$

$$A_{11} = \{C_1(a), b\}, \quad b^{-1}ab = -a^{-1}, \quad b^2 = -1, \quad \lambda a = a\bar{\lambda}, \quad \lambda b = b\lambda \quad (\lambda \in C);$$

$$A_{12} = \{C(a), b\}, \quad b^{-1}ab = a^{-1}, \quad b^2 = 1, \quad \lambda a = a\lambda, \quad \lambda b = b\bar{\lambda} \quad (\lambda \in C);$$

$$A_{13} = \{C(a), b\}, \quad b^{-1}ab = a^{-1}, \quad b^2 = -1, \quad \lambda a = a\lambda, \quad \lambda b = b\bar{\lambda} \quad (\lambda \in C);$$

$$A_{14} = \{C(a), b\}, \quad b^{-1}ab = -a^{-1}, \quad b^2 = 1, \quad \lambda a = a\lambda, \quad \lambda b = b\bar{\lambda} \quad (\lambda \in C);$$

$$A_{15} = \{Q(a), b\}, \quad b^{-1}ab = a^{-1}, \quad b^2 = -1, \quad \lambda a = a\lambda, \quad \lambda b = b\bar{\lambda} \quad (\lambda \in Q).$$

Алгебры $A_8, A_{11}, A_{12}, A_{13}$ и A_{14} являются скрещенными групповыми алгебрами бесконечной группы диэдра D над полем C , алгебры A_9, A_{10} — скрещенными групповыми алгебрами группы D над полем R , а алгебра A_{15} — скрещенной групповой алгеброй группы D над телом Q .

Описание всех конечномерных неразложимых R -представлений групп G рассматриваемого типа сводится к такой же задаче для алгебр $A_1, \dots, A_{15}$ (см. [2]).

Ниже мы даём полное описание всех конечномерных неразложимых A_i -модулей для всех алгебр A_i ($i=1, \dots, 15$).

Рассмотрим сначала алгебры $R(a), C(a), Q(a)$ и $C_1(a)$. Алгебры $R(a)$ и $C(a)$ — эвклидовы кольца, а $Q(a)$ и $C_1(a)$ — эвклидовы справа и слева кольца (см. [2]).

Пусть T — коммутативная область главных идеалов или некоммутативная область левых и правых главных идеалов. Элемент $p \in T$ называется *простым*, если левый идеал $T \cdot p$ является максимальным. Элементы $c, d \in T$ называются *подобными* (обозначение $c \sim d$), если факторы T/Tc и T/Td изоморфны как T -модули. Если T — коммутативное кольцо, то подобие элементов c и d равносильно равенству $(c) = (d)$. Если T — некоммутативное кольцо, то простые элементы $p_1, p_2 \in T$ подобны тогда и только тогда, когда совпадают их границы — максимальные двухсторонние идеалы, содержащиеся соответственно в идеалах Tr_1 и Tr_2 . (Глава 3. в [3].)

Пусть теперь $T = R(a), C(a), C_1(a), Q(a)$. Укажем полную систему представителей классов подобных между собой простых элементов в T .

В кольце $C(a)$ каждый простой элемент подобен элементу $a - \alpha$ ($\alpha \in C$), а в кольце $R(a)$ либо элементу $a - \alpha$ ($\alpha \in R$), либо элементу $a^2 + \alpha a + \beta$, где $x^2 + \alpha x + \beta$ — неприводимый вещественный полином.

Ввиду [3] каждый простой элемент в кольце $T = Q(a)$ подобен элементу $a - \alpha$ ($\alpha \in R(i)$, $1, i, j, k$ — стандартный базис Q над R), причём элементы $a - \alpha_1$ и $a - \alpha_2$ ($\alpha_1, \alpha_2 \in R(i)$) подобны тогда и только тогда, когда $\alpha_2 = \bar{\alpha}_1$ (сопряжённость в поле комплексных чисел $R(i)$). При этом граница левого идеала $T(a - \alpha_1)$ равна $T(a^2 + (\alpha_1 - \bar{\alpha}_1)a + |\alpha_1|^2)$.

Согласно [3] каждый простой элемент в кольце $C_1(a)$ подобен элементу $a - \alpha$ ($\alpha \in C$), или элементу $a^2 + \alpha$ ($\alpha \in C$), где α не является отрицательным вещественным числом. В кольце $T = C_1(a)$ имеют место равенства

$$(1') \quad (a - \alpha)(a - \bar{\alpha}) = (a - |\alpha|)(a + |\alpha|),$$

$$(2') \quad (a^2 + \alpha)(a^2 + \bar{\alpha}) = a^4 + (\alpha + \bar{\alpha})a^2 + \alpha \cdot \bar{\alpha}.$$

Так как элементы в правых частях равенств (1') и (2') лежат в центре кольца T , то из (1') и (2') вытекает, что простые элементы $a - \alpha_1$ и $a - \alpha_2$ в $C_1(a)$ подобны тогда и только тогда, когда $|\alpha_1| = |\alpha_2|$, а простые элементы

$a^2 + \alpha_1$ и $a^2 + \alpha_2$ в $C_1(a)$ подобны тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2$ или $\alpha_1 = \bar{\alpha}_2$. Отсюда, в частности, вытекает, что каждый элемент $a - \alpha \in C_1(a)$ подобен элементу $a - |\alpha|$.

Из приведённых выше формул для границ простых элементов $p = a - \alpha \in Q(a)$ ($\alpha \in R(i)$) и простых элементов p вида $a - \alpha$, $a^2 + \alpha \in C_1(a)$ следует, что для таких элементов $p \in T = Q(a)$, $C_1(a)$ граница левого идеала Tr^m равна (q^m) , где (q) — граница левого идеала Tr .

ЛЕММА 1. Пусть T одно из колец $R(a)$, $C(a)$, $Q(a)$, $C_1(a)$. Конечномерный над R T -модуль M неразложим тогда и только тогда, когда $M \cong T/Tr^m$, где p — простой элемент в T . Модули T/Tr_1^m и T/Tr_2^m , где p_1, p_2 — простые, изоморфны тогда и только тогда, когда p_1 и p_2 подобны.

Доказательство. Каждый неразложимый конечномерный над R T -модуль M изоморфен фактормодулю T/Tc , где $0 \subset (c) \subset T$. Пусть $c = p_1 \cdot \dots \cdot p_r$ — разложение элемента c в произведение простых элементов кольца T . Согласно [3] модуль T/Tc неразложим тогда и только тогда, когда простые элементы $p_1, \dots, p_r$ имеют одну и ту же границу (q) и граница идеала Tc равна (q^r) . При этом неразложимые конечномерные над R модули T/Tc_1 T/Tc_2 изоморфны тогда и только тогда, когда совпадают границы левых идеалов Tc_1 и Tc_2 .

Как было показано выше, каждый простой элемент p в $T = Q(a)$, $C_1(a)$ подобен соответственно элементу $a - \alpha \in Q(a)$ ($\alpha \in R(i)$) или элементу $a - \alpha$, $a^2 + \alpha \in C_1(a)$. В силу приведённых выше формул для границ этих элементов p граница идеала Tr^m равна (q^m) , где (q) — граница идеала Tr .

Это завершает доказательство утверждения леммы для $T = Q(a)$, $C_1(a)$. Для $T = R(a)$, $C(a)$ оно очевидно в силу теорем о конечнопорождённых модулях над коммутативной областью главных идеалов.

Пусть $T = R(a)$, $C(a)$, $Q(a)$, $C_1(a)$. Каждая из алгебр A_i ($i = 5, 6, \dots, 15$) содержит одну из алгебр T в качестве подалгебры, причём на T действует R -автоморфизм φ порядка 2, зависящий от алгебры: $\varphi(x) = b^{-1}xb$, $x \in T$.

Очевидно, для любого простого элемента $p \in T$ элемент $p' = \varphi(p)$ также является простым.

ЛЕММА 2. Для алгебры A_i ($5 \leq i \leq 13$, $i \neq 7$) простой элемент $p \in T$ подобен элементу $p' = \varphi(p)$ тогда и только тогда, когда

1. Для алгебр A_5 и A_9 : $(p) = (a \pm 1)$ или $(p) = (a^2 + \alpha a + 1)$, $\alpha \in R$.
2. Для A_{10} : $(p) = (a^2 + 1)$.
3. Для A_6 : $(p) = (a \pm 1)$, а для A_{12} , A_{13} : $(p) = (a - \alpha)$, где $|\alpha| = 1$, $\alpha \in C$.
4. Для A_8 : $(p) = (a \pm 1)$ или $(p) = (a^2 + \alpha)$, где $|\alpha| = 1$, $\alpha \notin (+\infty, 0]$, $\alpha \in C$.
5. A_{11} : $(p) = (a^2 + \alpha)$, $|\alpha| = 1$, $\alpha \notin (-\infty, 0]$, $\alpha \in C$.
6. В алгебре A_{14} ни один из простых элементов $p \in T = C(a)$ не подобен элементу p' .

Доказательство. Прежде всего отметим, что для алгебр $A_5, A_6, A_9, A_{10}, A_{12}, A_{13}, A_{14}$ условие $p \sim p'$ означает совпадение идеалов Tr и Tr' .

1. Пусть $A = A_5, A_9$. Тогда $T = R(a)$. Если $p = a - \alpha$, то $p' = a^{-1} - \alpha$ и равенство главных идеалов $(p) = (p')$ выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha = \pm 1$, т.е. когда $(p) = (a \pm 1)$. Пусть $p = a^2 + \alpha a + \beta$, где $x^2 + \alpha x + \beta$

неприводимый вещественный полином. Если $(a^2 + \alpha a + \beta) = (a^{-2} + \alpha a^{-1} + \beta)$, то $\frac{1}{\beta} = 1$, $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha$ и $(p) = (a^2 + \alpha a + 1)$.

2. Пусть $A = A_{10}$. Тогда $T = R(a)$. Если $p = a - \alpha$, $\alpha \in R$ то $p' = -a^{-1} - \alpha$ и равенство $(a - \alpha) = (-a^{-1} - \alpha)$ эквивалентно равенству $\alpha^{-1} = -\alpha$, что невозможно. Пусть $p = a^2 + \alpha a + \beta$, где $x^2 + \alpha x + \beta$ неприводимый над R полином. Тогда $p' = a^{-2} - \alpha a^{-1} + \beta$ и равенство $(p) = (p')$ выполняется тогда и только тогда, когда $\frac{1}{\beta} = \beta$, $\alpha = -\frac{\alpha}{\beta}$. Отсюда $\beta = 1$, $\alpha = 0$. Следовательно, $p = a^2 + 1$.

3. Пусть $A = A_6$. Тогда для $p = a - \alpha \in C(a)$ имеем $p' = a^{-1} - \alpha$ и равенство $Tr = Tr'$ эквивалентно условию $\alpha = \pm 1$.

Пусть $A = A_{12}, A_{13}$. Тогда при $p = a - \alpha \in C(a)$ имеем $p' = a^{-1} - \bar{\alpha}$, а равенство $(p) = (p')$ равносильно условию $\alpha^{-1} = \bar{\alpha}$ или $|\alpha| = 1$.

4. Пусть $A = A_8$. Если $p = a - \alpha$, $\alpha \in R$, то $p' = a^{-1} - \alpha$ и $p \sim p'$ в $C_1(a)$ тогда и только тогда, когда $\alpha^2 = 1$, т.е. $\alpha = \pm 1$.

Пусть $p = a^2 + \alpha$, $\alpha \in C$, $\alpha \notin (-\infty, 0]$. Тогда $p' = a^{-2} + \alpha$ и подобие элементов p и p' в $C_1(a)$ равносильно условию $\alpha^{-1} = \bar{\alpha}$, т.е. $|\alpha| = 1$.

5. Пусть $A = A_{11}$. Тогда $T = C_1(a)$. Если $p = a - \alpha$, $\alpha \in R$, то $p' = -a^{-1} + \alpha$ и из $p \sim p'$ вытекало бы, что $\alpha = -\alpha$, что невозможно. Пусть $p = a^2 + \alpha$, где $\alpha \notin (-\infty, 0]$. Тогда $p' = a^{-2} + \bar{\alpha}$ и подобие элементов p и p' равносильно равенству $\bar{\alpha}^{-1} = \alpha$ или $\bar{\alpha}^{-1} = \bar{\alpha}$, которые эквивалентны условию $|\alpha| = 1$.

6. Пусть $A = A_{14}$. Тогда $T = C(a)$ и можно положить $p = a - \alpha$ ($\alpha \in C$), $p' = -\alpha^{-1} + \alpha$. Если $(p) = (p')$, то $\alpha = -(\bar{\alpha})^{-1}$, что невозможно. Следовательно, $p \not\sim p'$. Лемма доказана.

Перед тем, как приступить к описанию конечномерных над R модулей над алгебрами A_i , сделаем некоторые общие замечания о представлениях алгебр.

Пусть A — конечномерная алгебра с единицей над полем K , а φ — автоморфизм этой алгебры конечного порядка n . Скрещенное произведение $B = (A, \varphi, C)$, где c — обратимый элемент алгебры A , определяется так же, как скрещенное произведение поля с его автоморфизмом. Алгебра B состоит из всевозможных линейных комбинаций

$$u = x_1 + x_2 \varphi + \dots + x_{n-1} \varphi^{n-1}, \quad x_i \in A,$$

где $\varphi^n = c$. По определению

$$x_1 + x_2 \varphi + \dots + x_{n-1} \varphi^{n-1} = y_1 + y_2 \varphi + \dots + y_{n-1} \varphi^{n-1}; \quad x_i, y_j \in A$$

тогда и только тогда, когда $x_i = y_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$).

Операции над элементами $u \in B$ определяются естественным образом с учётом соотношений $x\varphi = \varphi x^\varphi$, $\varphi^n = c$.

Пусть M — A -модуль. Тогда можно образовать индуцированный B -модуль

$$(1) \quad M^B = M + \varphi M + \dots + \varphi^{n-1} M,$$

состоящий из всевозможных формальных линейных комбинаций

$$(2) \quad y_1 + \varphi y_2 + \dots + \varphi^{n-1} y_{n-1} \quad (y_i \in M, i = 1, \dots, n-1).$$

Каждая из подпространств $\varphi^i M$ является A -модулем в силу соглашения

$$u(\varphi^i x) = \varphi^i(u\varphi^i x), \quad u \in A.$$

Действие оператора φ на элементы (2) определяются очевидным образом. Если $B=(A, \varphi, c)$, $\varphi^n=c$, то в случае, когда характеристика поля K не делит число n , имеет место теорема, аналогичная известной теореме Хигмана в теории индуцированных представлений конечных групп.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Каждый конечномерный над K B -модуль M является компонентой индуцированного модуля N^B , где N —некоторый неразложимый A -модуль.*

Предложение I можно доказать, дословно воспроизводя рассуждения, которые применяются в доказательстве теоремы Хигмана [4].

Мы используем предложение I для нахождения всех неразложимых R -конечномерных A_i -модулей, где A_i —алгебры типа E ($i=5, 6, \dots, 15$). Каждая из таких алгебр является скрещенным произведением алгебры $T=R(a)$, $C(a)$, $Q(a)$, $C_1(a)$ с автоморфизмом φ второго порядка: $\varphi(x)=b^{-1}xb$, $x \in T$. Поэтому, ввиду предложения I, и леммы 1 имеет место

ЛЕММА 3. *Каждый неразложимый конечномерный над R A_i -модуль M есть компонента индуцированного A_i -модуля*

$$(3) \quad M^* = M \dot{+} bM,$$

где

$$M \cong T/Tr^m$$

неразложимый T -модуль, описанный в лемме 1.

Замечание 1. Легко видеть, что модуль M^* в лемме 3 как A -модуль изоморфен фактор-идеалу A/Ar^m , и поэтому, задача описания всех неразложимых A -модулей сводится к разложению фактор-модулей A/Ar^m . Далее, слагаемые M и bM в (3) являются неразложимыми T -модулями, и поэтому, прямое разложение модуля A/Ar^m может содержать не более двух слагаемых.

Заметим, что подмодуль bM в сумме (3) является неразложимым T -модулем, изоморфным модулю $T/(p')^m$, где $p'=b^{-1}pb$.

Мы можем теперь указать простой достаточный признак неразложимости модуля M^* .

ЛЕММА 4. *Если $M=T/(p^m)$ и простые элементы p и p' кольца T не подобны, то модуль M^* неразложим.*

Доказательство. В условиях леммы модуль M^* , рассматриваемый как T -модуль, является прямой суммой двух подмодулей

$$M \cong T/(p^m), \quad bM \cong T/(p')^m,$$

причём слагаемые M и bM модуля M^* как T -модуля определены абсолютно однозначно в силу условия $p \not\sim p'$ и леммы 1. Следовательно, любой A_i -модуль N , $0 \subset N \subset M^*$, являющийся прямым слагаемым модуля M^* , совпадает с одним из модулей M , bM , а тогда $N=M$, что невозможно.

ЛЕММА 5. Пусть $A = A_i$ ($5 \leq i \leq 15$, $i \neq 9, 13$). Если в обозначениях леммы 1 идеал Ap является двусторонним идеалом кольца A , то модуль M^* (см. (3)) разлагается в прямую сумму двух A -подмодулей

$$M^* = \{(1+b), M\} \dot{+} \{(1-b), M\} = M_1 \dot{+} M_2.$$

Модули M_1 и M_2 не изоморфны тогда и только тогда, когда $(p) = (a+1)$ или $(p) = (a-1)$ и при этом $b\lambda = \lambda b$ для всех $\lambda \in R, C, Q$ (соответственно).

Доказательство. В условиях леммы M^* можно отождествить с факторкольцом $B = A/(p^m)$, рассматриваемым как A -модуль. Так как $1 = e_1 + e_2$, где $e_1 = \frac{1}{2}(1+b)$, $e_2 = \frac{1}{2}(1-b)$ — идемпотенты, то

$$(4) \quad B = Be_1 \dot{+} Be_2.$$

Слагаемые (4) неразложимы, так как каждый из модулей Be_i как T -модуль изоморфен подмодулю T/Tr^m .

Если для некоторого $\lambda \in R, C, Q$ (соответственно), $\lambda_1 b = b\lambda$, $\lambda \neq \lambda_1$, то $(1-b)\lambda(1+b) = (\lambda - \lambda_1)(1+b)$, $(\lambda - \lambda_1) \neq 0$, что доказывает изоморфизм $B(1-b) \cong B(1+b)$. Пусть $Tr \neq (a+1)$, $(a-1)$. Тогда

$$(1-b)a(1+b) = (a - a^{-1})(1+b) = a^{-1}(a^2 - 1)(1+b) \neq 0,$$

ибо $(p) \neq (a+1)$, $(a-1)$ и $B(1+b) \cong T/(p^m)$. Значит, $B(1-b) \cong B(1+b)$.

Пусть, наконец, $p = (a+1)$ или $p = (a-1)$ и $b\lambda = \lambda b$ соответственно для всех $\lambda \in R, C, Q$. Тогда фактор-алгебра $A/(p)$ изоморфна групповой алгебре $K(b)$, где $K = R, C, Q$, а (b) — циклическая группа второго порядка. Эта алгебра имеет два неизоморфных неприводимых модуля, соответствующих идеалам

$$K(b)(1+b) = \{\lambda(1+b)\}, \quad K(b)(1-b) = \{\lambda(1-b)\}, \quad \lambda \in K.$$

Так как (p) — радикал алгебры $A/(p^m)$, то, в силу известных теорем теории артиновых алгебр, число неизоморфных неразложимых модулей в разложении $A/(p^m)$ равно числу её неприводимых неизоморфных модулей, т.е. двум. Лемма доказана.

Определение. Пусть $A = A_i$ ($i = 5, 6, \dots, 15$), а $T = R(a), C(a), Q(a), C_1(a)$ — соответствующая алгебре A подалгебра. Будем называть простой элемент $p \in T$ соответственно элементом первого, второго или третьего рода, если для любого натурального m модуль A/Ap^m (см. (3) и замечание 1) или неразложим, или разлагается в прямую сумму двух неразложимых модулей, которые соответственно изоморфны или неизоморфны.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $A = A_i$ ($i = 5, 6, 9, 10, 12, 13, 14$). Каждый простой элемент $p \in T$ является элементом первого, второго или третьего рода. Для алгебр A_i ($i = 5, 6, 10, 12, 14$) элемент $p \in T$ является элементом первого рода тогда и только тогда, когда $Tr \neq Tr'$. При $(p) = (p')$ для алгебр A_{12}, A_{14} элемент p — второго рода, а для алгебр A_5, A_6, A_{10} при $(p) = (p')$ элемент p — второго рода, если $Tr \neq T(a+1), T(a-1)$, и третьего рода при $Tr = T(a+1), T(a-1)$. Для A_9, A_{13} каждый простой элемент $p \in T$ — первого рода. Характеризация простых элементов $p \in T$, удовлетворяющих условиям $Tr \neq Tr'$ или $Tr = Tr'$ дана в лемме 2.

Доказательство. Так как для рассматриваемых алгебр A_i кольцо T — коммутативное эвклидово кольцо, то при $(p) \neq (p')$ модуль $B = A/Ap^m$ неразложим по лемме 4, и элемент p — первого рода. При $Tr = Tr'$ идеал Ap^m — двухсторонний идеал алгебры A . В этом случае модуль B изоморфен фактор-кольцу A/Ap^m как A -модулю. Теперь утверждение теоремы для алгебр A_i ($i = 5, 6, 10, 12, 14$) вытекает из леммы 5.

Пусть $A = A_9, A_{13}$ и $Tr = Tr'$. При $A = A_9$ тогда $(p) = (a \pm 1)$ или $(p) = (a^2 + \alpha a + 1)$, ($T = R(a)$). Нетрудно показать, что в первом случае фактор-алгебра A/Ar изоморфна полю C , а во втором — телу Q . Отсюда следует неразложимость фактор-кольца $B = A/Ap^m$ в прямую сумму левых идеалов, ибо $L = Ar/Ar^m$ — радикал алгебры B , и A/L — тело.

Пусть $A = A_{13}$ и $(p) = (p')$, $p \in C(a)$. Тогда, в силу леммы 2, $(p) = (a - \alpha)$, $|\alpha| = 1$. В этом случае фактор-алгебра A/Ar изоморфна телу Q , а фактор-алгебра A/Ar^m неразложима в прямую сумму левых идеалов ввиду той же аргументации, которая выше была проведена для A_9 . Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A = A_8, A_{11}$. Для алгебры A_8 каждый простой элемент $p \in C_1(a)$ третьего рода подобен элементам $a+1, a-1$; а каждый элемент p второго рода — элементам $a^2 + \alpha$, $|\alpha| = 1$, $\alpha \neq -1$. Остальные простые $p \in C_1(a)$ — первого рода. Если $A = A_{11}$, то простые элементы $p \sim a^2 + \alpha$, $|\alpha| = 1$, $\alpha \neq -1$ являются элементами второго рода, а остальные простые $p \in C_1(a)$ — первого рода.

Доказательство. Пусть $A = A_8$. В силу леммы 4 нужно исследовать только такие простые $p \in C_1(a)$, что $p \sim p' = b^{-1}pb$. По лемме 2 все такие простые p подобны элементам $a \pm 1$ и $a^2 + \alpha$, $|\alpha| = 1$, $\alpha \neq -1$. Рассмотрим сначала случай $p = a \pm 1$. Положим $N = Tr^m$ и пусть

$$M_1 = \{N, (1+b)\}, \quad M_2 = \{N, (1-b)\}$$

левые идеалы алгебры A , порождённые соответственно N и $(1+b)$, N и $(1-b)$. Покажем, что имеет место прямое разложение

$$(4) \quad M^* = A/Ar^m = M_1/Ar^m \dot{+} M_2/Ar^m.$$

В доказательстве мы существенно используем то обстоятельство, что

$$(5) \quad b^{-1}(Ar^m)b = Ar^m.$$

Прежде всего установим, что имеют место строгие включения $M_i \subset A$ ($i = 1, 2$). Действительно, каждый элемент вида $x(1 \pm b)$, где $x \in A$, очевидно, записывается в виде $\lambda(1 \pm b)$, где $\lambda \in C_1(a)$. Предположим, что

$$(\lambda_0 + \lambda_1 b)p^m + \lambda_2(1 \pm b) = 1,$$

где $\lambda_i \in T$. Тогда

$$(6) \quad \lambda_0 p^m + \lambda_2 = 1, \quad \lambda_1 b p^m \pm \lambda_2 b = 0.$$

Из второго равенства (6) в силу соотношения $b^{-1}(Ar^m)b = Ar^m$ получаем, что $\lambda_2 \in Ar^m$, а тогда первое равенство (6) даёт противоречие. Предположим теперь, что

$$(7) \quad x_1(1+b) + x_2(1-b) \in Ar^m.$$

Тогда по-предыдущему можно считать $x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in C_1(a)$. Из (7) следует, что

$$x_1 + x_2 \in Ap^m, \quad x_1 b - x_2 b \in Ap^m,$$

и, снова используя равенство (5), получим, что также $x_1 - x_2 \in Ap^m$, откуда $x_1, x_2 \in Ap^m$, что в силу (5) даёт $x_1(1+b) \in Ap^m, x_2(1-b) \in Ap^m$. Следовательно, разложение (4) — нетривиальное прямое разложение модуля M^* .

Пусть, далее, $p = a^2 + \alpha, |\alpha| = 1, \alpha \neq -1$. Тогда $ab(Ap)ab = Ap$ и, следовательно,

$$(8) \quad ab(Ap^m)ab = Ap^m.$$

Положим $\hat{N} = Tp^m$ и обозначим соответственно через $\hat{M}_1$ и $\hat{M}_2$ левые идеалы алгебры A , порождённые соответственно $\hat{N}$ и $(1+ab)$, $\hat{N}$ и $(1-ab)$. Тогда имеет место прямое разложение

$$(9) \quad M^* = A/Ap^m = \hat{M}_1/Ap^m \dot{+} \hat{M}_2/Ap^m.$$

Формула (9) доказывается точно такими же рассуждениями, как ранее формула (4) с использованием вместо (5) формулы (8).

Покажем, что слагаемые (4) не изоморфны как A -модули. Для этого сначала установим этот факт при $m=1$. Так как $p = a \pm 1$, то в этом случае модуль A/Ap — двумерное пространство над C , а слагаемые M_i/Ap — одномерные пространства. Предположим, что существует A -изоморфизм $\theta: M_1/Ap \rightarrow M_2/Ap$. Положим

$$(10) \quad e_1 = \frac{1}{2}(1+b), \quad e_2 = \frac{1}{2}(1-b).$$

Тогда

$$\Theta(e_1 + Ap) = \delta e_2 + Ap, \quad \delta \in C.$$

Так как в силу (10) $e^2 = e_1, e_1 e_2 = 0$, то

$$\Theta(e_1 + Ap) = \Theta[e_1(e_1 + Ap)] = e_1(\delta e_2 + Ap) = Ap,$$

что даёт противоречие.

Пусть теперь m — произвольное натуральное число. Легко видеть, что каждый из модулей $M_1/Ap^m, M_2/Ap^m$ как T -модуль изоморфен цепному T -модулю T/Tp^m . Отсюда следует, что каждый из подмодулей $M'_1 = Ap^{m-1}e_1 + Ap^m/Ap^m, M'_2 = Ap^{m-1}e_2 + Ap^m/Ap^m$ определён в M_1/Ap^m и M_2/Ap^m абсолютно однозначно. Далее,

$$Ap^{m-1} = Ap^{m-1}e_1 \dot{+} Ap^{m-1}e_2$$

и

$$A/Ap \cong Ap^{m-1}/Ap^m \cong M'_1 \dot{+} M'_2.$$

Если существует изоморфизм

$$\Theta: M_1/Ap^m \rightarrow M_2/Ap^m,$$

то $\theta(M'_1) \cong \theta(M'_2)$, что ввиду (10) противоречит доказанному неизоморфизму слагаемых (4) при $m=1$.

Исследуем теперь разложение (9). В силу (8) имеем

$$\begin{aligned}(1+ab)a(1-ab) &= (a-a^{-1})(1-ab) = a^{-1}(a^2-1)(1-ab) \equiv \\ &\equiv a^{-1}(-\alpha-1)(1-ab) \pmod{A(a^2+\alpha)}, \quad |\alpha|=1, \alpha \neq -1.\end{aligned}$$

Значит

$$(1+ab) \cdot A(1-ab) = A(1-ab)$$

и отображение

$$\Theta[(1+ab)+Ap^m] = (1+ab)a(1-ab)+Ap^m$$

определяет A -изоморфизм модуля $\hat{M}_1/Ap^m$ на $\hat{M}_2/Ap^m$.

Пусть $A=A_{11}$. По лемме 2 простые $p \in C_1(a)$, для которых $p \sim p'$, с точностью до подобия совпадают с элементами $p=a^2+\alpha$, $|\alpha|=1$, $\alpha \neq -1$. Тогда имеет место формула (8), и, дословно повторяя рассуждения для алгебры A_8 при $p=a^2+\alpha$, получим для $A=A_{11}$ формулу типа (9), где слагаемые в правой части изоморфны. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $A=A_7, A_{15}$. Для алгебры $A=A_7$ каждый простой элемент $p=a-\alpha \in Q(a)$ третьего рода подобен элементу $a \pm 1$. Остальные простые p —первого рода. Для алгебры $A=A_{15}$ простые $p \sim a-\alpha$, $|\alpha|=1$ —второго рода, а остальные простые — первого рода.

Доказательство. Пусть $A=A_7$. Алгебра A является групповой алгеброй бесконечной группы диэдра над телом кватернионов Q . Пусть $1, i, j, k$ —стандартный базис тела Q над полем R . Как было показано выше, каждый простой элемент $p \in Q(a)$ подобен элементу $a-\alpha$, $\alpha \in R(i)$. Предположим, что $a \neq \pm 1$. Покажем, что в этом случае фактор-модуль A/Ap^m неразложим. Доказательство проведём индукцией по числу m . Пусть $m=1$. Очевидно, произвольный элемент $x \in A$ удовлетворяет сравнению

$$x \equiv \mu_0 + \mu_1 b \pmod{Ap},$$

где $\mu_0, \mu_1 \in Q$. Если $\mu_0 = \pm \mu_1$, то $\mu_0 + \mu_1 b$ — обратимый элемент групповой алгебры $Q(b)$ циклической группы второго порядка (b над телом Q). Значит, остаётся рассмотреть случай, когда $\mu_0 = \pm \mu_1 \neq 0$. Имеем

$$a(1 \pm b) = a \pm ba^{-1} \equiv \alpha \pm b\alpha^{-1} \pmod{Ap}.$$

Следовательно,

$$\alpha(1 \pm b) - a(1 \pm b) \equiv \pm(\alpha - \alpha^{-1})b \pmod{Ap},$$

где элемент $(\alpha - \alpha^{-1})b$ обратим в $Q(a)$, ибо $\alpha \neq \alpha^{-1}$. Итак, если $x \not\equiv 0 \pmod{Ap}$, то $(p, x) = (1)$, т.е. A/Ap — простой A -модуль.

Предположим, что для всех $m \leq n$, $n > 1$ уже доказано, что модуль A/Ap^m — цепной, причём все его подмодули имеют вид

$$(11) \quad Ap^m, Ap + Ap^m/Ap^m, \dots, Ap^{m-1} + Ap^m/Ap^m.$$

Рассмотрим фактор-модуль A/Ap^{n+1} . Покажем, что он — цепной, причём все его подмодули имеют вид (11) при $m=n+1$. Если $x=yp$ то в силу индуктивного предположения $(y, p^n) = Ap^i$ ($0 \leq i \leq n$) и, следовательно, $(x, p^{n+1}) = Ap^{i+1}$.

Предположим, что $x \not\equiv 0 \pmod{Ap}$, и покажем, что $(x, p^{n+1}) = (1)$. По предположению индукции для некоторого $y \in A$ $yx = 1 + zp^n$ и, значит, идеал $I = (x, p^{n+1})$ содержит элемент $1 + (\mu_0 + \mu_1 b)p^n$, а тогда и элемент

$$(12) \quad p^n + p^n(\mu_0 + \mu_1 b)p^n = [1 + p^n(\mu_0 + \mu_1 b)]p^n \quad (\mu_i \in Q),$$

что в результате дальнейшей редукции элемента (12) по $\text{mod } p^{n+1}$ приводит к элементу

$$[1 + p(\gamma_0 + \gamma_1 b)]p^n \in I \quad (\gamma_i \in Q).$$

Покажем, что

$$z = 1 + p(\gamma_0 + \gamma_1 b) \not\equiv 0 \pmod{Ap}.$$

Предположим, что

$$(13) \quad 1 + (a - \alpha)(\gamma_0 + \gamma_1 b) = (\lambda_0 + \lambda_1 b)(a - \alpha), \quad (\gamma_0, \gamma_1 \in Q; \lambda_0, \lambda_1 \in Q(a))$$

Из (13) вытекает, что $\lambda_0 = \gamma_0$ и

$$1 + (a - \alpha)\gamma_0 = \gamma_0(a - \alpha),$$

откуда

$$(14) \quad 1 = \alpha\gamma_0 - \gamma_0\alpha, \quad (\alpha \in R(i), \gamma_0 \in Q).$$

Покажем, что равенство (14) противоречиво. В самом деле, элемент γ_0 можно записать в виде $\gamma_0 = \beta_1 + \beta_2 j$ где $\beta_1, \beta_2 \in R(i)$. Тогда из (14) имеем

$$1 = \alpha(\beta_1 + \beta_2 j) - (\beta_1 + \beta_2 j)\alpha,$$

то есть

$$1 = \alpha\beta_2 j - \beta_2 j\alpha = (\alpha\beta_2 - \beta_2 \bar{\alpha})j, \quad (\alpha, \beta_2 \in R(i)).$$

Последнее равенство невозможно.

Итак, идеал $I = (x, p^{n+1})$ содержит элемент (12) вида $zp^n, z \not\equiv 0 \pmod{Ap}$. Теперь, в силу индуктивного предположения, $(zp^n, p^{n+1}) = Ap^n$ и, снова применяя предположение индукции, получим, что $(x, p^n) = (1)$, и тогда $I = (1)$. Индукция завершена. Мы получили, что каждый модуль $A/Ap^m, p = a - \alpha, \alpha \neq \pm 1$ — цепной и, в частности, неразложимый модуль.

Пусть $p = a \pm 1$. Тогда Ap^m — двухсторонний идеал алгебры A . Фактор-алгебра $B = A/Ap^n$ разлагается в прямую сумму двух левых идеалов

$$(15) \quad B = B(e_1 + Ap^n) \dot{+} B(e_2 + Ap^n),$$

в соответствии с разложением единицы $1 = e_1 + e_2; e_1 = \frac{1}{2}(1+b), e_2 = \frac{1}{2}(1-b)$.

Слагаемые в правой части (15) не изоморфны для $A = A_7$. Пусть

$$A = A_{15} = \{Q(a), b\}, \quad b^{-1}ab = a^{-1}, \quad a\lambda = \lambda a, \quad b\lambda = \lambda b, \quad b^2 = -1, \quad (\lambda \in Q).$$

Для доказательства теоремы нужно исследовать только простые $p = a - \alpha, |\alpha| = 1, \alpha \in R(i)$, для которых $p \sim p' = a - \alpha^{-1}$. Пусть, как и раньше, $1, i, j, k$ стандартный базис Q над R . Тогда $(jb)^2 = 1$ и

$$(16) \quad (jb)(Ap)jb = Ap, \quad p = a^2 + \alpha, \quad \alpha \in R(i), \quad |\alpha| = 1.$$

Положим

$$M_1 = \{Ap^m, (1+jb)\}, \quad M_2 = \{Ap^m, (1-jb)\}.$$

Тогда с помощью (16) можно доказать прямое разложение

$$(17) \quad A/Ap^m = M_1/Ap^m \dot{+} M_2/Ap^m$$

точно таким же путём, каким для алгебры A_8 доказана формула (4) с использованием (5).

Слагаемые в правой части (17) не изоморфны. В самом деле,

$$(1+jb)i(1-jb) = 2i(1-jb).$$

Это соотношение позволяет построить A -изоморфизм

$$\Theta: M_1/Ap^m \rightarrow M_2/Ap^m$$

по формуле

$$\Theta[(1+jb)+Ap^m] = (1+jb)i(1-jb)+Ap^m.$$

Теорема доказана.

С помощью теорем 1, 2, 3 можно получить теперь полное описание всех неразложимых R -конечномерных A -модулей для $A=A_i$ ($i=1, 2, \dots, 15$). Сформулируем полученные результаты в виде следующей теоремы:

ТЕОРЕМА 4. Пусть $A=A_i$ ($i=1, 2, \dots, 15$), а $T=R(a)$, $C(a)$, $Q(a)$, $C_1(a)$ —соответствующая алгебре A подалгебра. Будем обозначать через M —неразложимые над R конечномерные A -модули. При $i=1, \dots, 4$ модули M описываются леммой 1. Пусть $i=5, \dots, 15$. Каждый модуль M изоморфен прямому слагаемому фактор-модуля A/Ap^m , где $p \in T$ —простой элемент. Описание с точностью до изоморфизма компонент модуля A/Ap^m дано в теоремах 1, 2, 3. Если $m \neq n$, то неразложимые модули, возникающие в разложении модуля A/Ap_1^m , не изоморфны слагаемым в разложении A/Ap_2^n . Если $m=n$, то неразложимая компонента M_1 модуля $A/(p_1^n)$ изоморфна некоторой неразложимой компоненте модуля $A/(p_2^n)$ тогда и только тогда когда выполняется одно из условий $p_1 \sim p_2$, $p_1' \sim p_2' = b^{-1}p_1b$.

Доказательство. Согласно замечанию 1 к лемме 3

$$(18) \quad A/(p_1^n) = T(p_1^n) + bT/(p_1^n).$$

Таким образом, $A/(p_1^n)$ как T -модуль разлагается в сумму модулей, изоморфных $T/(p_1^n)$ и $T/(p_1'^n)$, причём эти модули цепные с длиной композиционного ряда n . Так как для конечно порождённых T -модулей имеет место теорема Круля—Шмидта, то отсюда вытекает, что при $m \neq n$, слагаемые модуля $A/(p_1^n)$ не могут быть изоморфны слагаемым модуля $A/(p_2^m)$. Пусть $m=n$ и некоторая неразложимая компонента M_2 модуля $A/(p_2^n)$ изоморфна как A -модуль неразложимой компоненте M_1 модуля $A/(p_1^n)$. Тогда M_1 и M_2 изоморфны и как T -модули и, значит они как T -модули одновременно либо цепные, либо прямые суммы двух цепных модулей. В любом случае в силу леммы 1 и (18) выполняется одно из условий $p_1 \sim p_2$ или $p_2 \sim p_1'$. Если $p_1 \sim p_2$, то, очевидно, имеет место изоморфизм прямых разложений модулей $A/(p_1^n)$ и $A/(p_2^n)$. Пусть $p_2 \sim p_1' = b^{-1}p_1b$. Тогда по лемме 4 модуль $A/(p_1^n)$ —неразложим и в силу

$$A/(p_1^n) \cong A/(p_1'^n) \cong A/(p_2^n).$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В [5], в частности, описаны все неразложимые конечномерные представления бесконечной группы диэдра D над произвольным полем K , характеристика которого не совпадает с числом 2. Эти результаты дают, в частности, утверждения настоящей статьи об алгебрах A_5 и A_6 . Мы включили их в эту работу для полноты изложения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] С. Д. Берман—К. Бузаши, О представлениях группы, содержащей бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса. *Publ. Math. (Debrecen)* **29** (1982), 163—170.
- [2] С. Д. Берман — К. Бузаши, О модулях над групповыми алгебрами групп, содержащих бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса. *Studia Sci. Math. Hungarica* **16** (1981), 455—470.
- [3] N. JACOBSON, The Theory of Rings. *Amer. Math. Soc. New York* 1943.
- [4] Ч. Кэртис — И. Райнер, Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. Изд. Наука, 1969.
- [5] С. Д. Берман — К. Бузаши, О представлениях бесконечной группы диэдра. *Publ. Math. (Debrecen)* **28** (1981), 173—187.

(Поступило 20. VII. 1982 г.)