

## Об инвариантах пар полупростых групповых алгебр периодических абелевых групп

Т. Ж. МОЛЛОВ

Пусть  $G$  и  $G'$  — периодические абелевы группы,  $H$  и  $H'$  — соответственно их подгруппы,  $K$  — поле, характеристика которого не делит порядки элементов групп  $G$  и  $G'$  и  $KG$  — групповая алгебра группы  $G$  над полем  $K$ . Хорошо известно, что в этом случае групповая алгебра  $KG$  полупроста. Поле  $K$  называется полем второго рода относительно  $p$  ([6], стр. 684), если степень  $(K(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots): K) < \infty$ , где  $\varepsilon_i$  — первообразный корень степени  $p^i$  из единицы в алгебраическом замыкании  $\bar{K}$  поля  $K$ ,  $i \in N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$  ( $p$  — простое число). В противном случае  $K$  называется полем первого рода относительно  $p$ . Говорят, что пары групповых алгебр  $(KG, KH)$  и  $(KG', KH')$   $K$ -изоморфны, если существует  $K$ -изоморфизм алгебры  $KH$  на алгебру  $KH'$ , продолжающийся до  $K$ -изоморфизма алгебры  $KG$  на алгебру  $KG'$ . В статье найдены необходимые и достаточные условия для  $K$ -изоморфизма пар  $(KG, KH)$  и  $(KG', KH')$  полупростых групповых алгебр периодических абелевых групп, т.е. полная система инвариантов пары  $(KG, KH)$ , когда 1)  $K$  — алгебраически замкнутое поле и 2) когда  $G$  — абелева  $p$ -группа,  $p \neq 2$  и  $K$  — поле второго рода относительно  $p$ . Оказывается, что эта полная система инвариантов состоит из мощности  $|G|$  и индекса  $(G:H)$  подгруппы  $H$  в группе  $G$ . С. Д. Бермая [1] доказывает, что когда  $G$  счетна и  $K$  — алгебраически замкнутое поле, то полная система инвариантов полупростой групповой алгебры  $KG$  образуется из мощности  $|G|$ . Позже Мей [3] получает тот же самый результат, когда периодическая группа  $G$  имеет любую мощность.

Отметим несколько предварительных утверждений.

**Предложение 1.** Если  $G$  и  $G'$  — абелевы группы,  $H$  и  $H'$  — соответственно их подгруппы,  $K$  — любое поле и пары алгебр  $(KG, KH)$  и  $(KG', KH')$  —  $K$ -изоморфны, то индекс  $(G, H)$  совпадает с индексом  $(G', H')$ .

**Доказательство.** Пусть  $\varphi: (KG, KH) \rightarrow (KG', KH')$  является  $K$ -изоморфизмом пар групповых алгебр. Единичный характер  $\chi$  группы  $H$  над полем  $K$  может быть рассмотрен как линейный характер алгебры  $KH$ , т.е.  $\chi$  является  $K$ -гомоморфизмом  $K$ -алгебры  $KH$  на  $K$ -алгебру  $K$ . Характеру  $\chi$  алгебры  $KH$  можно сопоставить линейный характер  $\chi'$  алгебры  $KH'$ , если для каждого элемента  $x' \in KH'$  положить

$$(1) \quad \chi'(x') = \chi(\varphi^{-1}(x')).$$

Так как  $\varphi^{-1}$  и  $\chi$  —  $K$ -гомоморфизмы и  $\chi$  — характер алгебры  $KH$  над  $K$ , то  $\chi'$  — характер алгебры  $KH'$ . Докажем, что

$$(2) \quad \varphi(\text{Ker } \chi) = \text{Ker } \chi'$$

Действительно, пусть  $a$  — любой элемент ядра  $\text{Ker } \chi$ . Тогда  $\varphi(a) \in \text{Ker } \chi'$ , так как  $\chi'(\varphi(a)) = \chi(\varphi^{-1}(\varphi(a))) = \chi(a) = 0$ , где первое равенство следует из формулы (1), т.е.  $\varphi(\text{Ker } \chi) \subseteq \text{Ker } \chi'$ . Докажем обратное включение. Пусть  $a \in \text{Ker } \chi'$ , т.е.  $\chi'(a) = 0$ . Тогда, ввиду (1), получится

$$(3) \quad \chi(\varphi^{-1}(a)) = 0.$$

Так как  $\varphi$  — изоморфизм алгебры  $KH$  на  $KH'$ , то  $a = \varphi(b)$ , где  $b \in KH$ . Покажем, что  $b \in \text{Ker } \chi$ , откуда будет следовать, что  $a \in \varphi(\text{Ker } \chi)$  или, что  $\text{Ker } \chi' \subseteq \varphi(\text{Ker } \chi)$ . Действительно, ввиду (3), получится  $0 = \chi(\varphi^{-1}(a)) = \chi(\varphi^{-1}(\varphi(b))) = \chi(b)$ , т.е.  $\chi(b) = 0$  или  $b \in \text{Ker } \chi$ , чем формула (2) установлена. Пусть  $\langle \text{Ker } \chi \rangle$  и  $\langle \text{Ker } \chi' \rangle$  — идеалы соответственно алгебр  $KG$  и  $KG'$ , порожденные идеалами  $\text{Ker } \chi$  и  $\text{Ker } \chi'$ . Так как  $\langle \text{Ker } \chi \rangle$  порождается элементами  $h-1$ , где  $h$  пробегает группу  $H$ , то  $K(G/H) \cong KG / \langle \text{Ker } \chi \rangle \cong \varphi(KG) / \varphi(\langle \text{Ker } \chi \rangle) \cong KG' / \langle \text{Ker } \chi' \rangle$ , где первый изоморфизм — хорошо известный факт (см. [1]), второй изоморфизм устанавливается тривиально, а последний следует из (2). Этим установлена формула

$$(4) \quad K(G/H) \cong KG' / \langle \text{Ker } \chi' \rangle.$$

В теории скрещенных групповых алгебр известно, что фактор-алгебра  $KG' / \langle \text{Ker } \chi' \rangle$   $K$ -изоморфна скрещенной групповой алгебре  $(G'/H', K, \{\chi'(h')\})$  группы  $G'/H'$  и поля  $K$  с системами факторов  $\{\chi'(h')\}$ . Тогда из (4) получается

$$(5) \quad K(G/H) \cong (G'/H', K, \{\chi'(h')\}).$$

Из (5) получается  $(G: H) = (G': H')$ , так как алгебра  $K(G/H)$  имеет групповой базис с мощностью  $(G: H)$ , а скрещенная групповая алгебра  $(G'/H', K, \{\chi'(h')\})$  — базис с мощностью  $(G': H')$ , и из  $K$ -изоморфизма двух скрещенных групповых алгебр над одним и тем же полем  $K$  вытекает, что мощности их базисов совпадают.

**Лемма 2.** Если  $G$  — периодическая абелева группа и  $H$  — ее подгруппа, то  $G$  можно представить как объединение возрастающей последовательности

$$(6) \quad H = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_\alpha \subset \dots \subset G_\beta = G$$

таких своих подгрупп  $G_\alpha$ , что выполняются следующие две условия: (\*) индекс  $(G_\alpha: H)$  — конечное число, если  $\alpha$  — конечное порядковое число и  $(G_\alpha: H) = |\alpha|$ , если  $\alpha$  — бесконечное порядковое число;

(\*\*) для каждого порядкового числа  $\alpha$ ,  $\alpha \leq \beta$ , имеет место  $(G_{\alpha+1}: G_\alpha) = p_{\alpha+1}$ , где  $p_{\alpha+1}$  — некоторое простое число.

**Доказательство.** Положим  $H = G_0$ . Допустим, что уже построены все группы  $G_\gamma$ , где  $\gamma < \alpha$  и  $\alpha \leq \beta$ . Пусть  $\alpha$  — неперечисленное порядковое число. Тогда  $G_\alpha$  построим следующим образом: выбираем такой элемент  $g_\alpha \in G \setminus G_{\alpha-1}$ , что  $g_\alpha^{p_\alpha} \in G_{\alpha-1}$ , где  $p_\alpha$  — некоторое простое число. Очевидно такой элемент  $g_\alpha$  существует.

вует, и  $G_\alpha$  строится как подгруппа группы  $G$ , порожденная подгруппой  $G_{\alpha-1}$  и элементом  $g_\alpha$ . Если  $\alpha$  — предельное порядковое число, то положим  $G_\alpha = \bigcup_{\gamma < \alpha} G_\gamma$ .

Таким образом, последовательность (6) вообще так построена, что группы  $G_\alpha$  удовлетворяют условию (\*). Докажем, что выполняется условие (\*). Для  $\alpha=0$  условие (\*) выполняется тривиально. Допустим, что условие (\*) выполняется для всех групп  $G_\gamma$ , для которых  $\gamma < \alpha \leq \beta$ . Рассмотрим следующие случаи: 1) существует  $\alpha-1$  и 2)  $\alpha-1$  не существует.

1) Пусть существует  $\alpha-1$ . Если  $\alpha$  — конечное порядковое число, то  $(G_\alpha: H) = (G_\alpha: G_{\alpha-1}) \dots (G_1: H) = p_\alpha \dots p_1$ , где  $p_1, \dots, p_\alpha$  — простые числа, и второе равенство следует из того, что выполняется условие (\*) для групп  $G_\alpha$ . Следовательно,  $(G_\alpha: H)$  — конечное число, т.е. условие (\*) выполнено. Пусть  $\alpha$  — бесконечное порядковое число. Тогда порядковое число  $\alpha-1$  бесконечно и  $(G_\alpha: H) = (G_\alpha: G_{\alpha-1}) (G_{\alpha-1}: H) = p_\alpha |\alpha-1| = |\alpha-1| = |\alpha|$ , где второе равенство следует из индуктивного предположения, а четвертое выполняется ввиду того, что  $|\alpha-1|$  — бесконечное кардинальное число.

2) Пусть  $\alpha-1$  не существует. Так как  $G_\alpha = \bigcup_{\gamma < \alpha} G_\gamma$ , то  $G_\alpha | H = \bigcup_{\gamma < \alpha} G_\gamma | H$ . Следовательно,  $(G_\alpha: H) = \sup \{(G_\gamma: H)\}_{\gamma < \alpha} = \sup \{|\gamma|\}_{\gamma < \alpha} = |\alpha|$ . Этим установлено свойство (\*). Лемма доказана.

**Лемма 3.** Если  $G$  — периодическая абелева группа и  $K$  — алгебраически замкнутое поле, то группа  $V(KG)$  нормированных единиц алгебры  $KG$  является полной.

**Доказательство.** Докажем, что если  $n$  — любое натуральное число, то из каждого элемента группы  $V(KG)$  извлекается корень  $n$ -ой степени в  $V(KG)$ . Действительно, пусть  $x \in V(KG)$ . Тогда  $x \in KF$ , где  $F$  — некоторая конечная подгруппа группы  $G$ . Так как  $KF$  — конечномерная полупростая алгебра, то  $KF$  разлагается в прямую сумму минимальных идеалов  $I_i = KFe_i$ , каждый из которых порождается соответственно единственным минимальным идемпотентом  $e_i$ ,  $i=0, 1, \dots, s$ , т.е.  $KF = I_0 \oplus I_1 \oplus \dots \oplus I_s$ . Если  $e_0$  соответствует единичному характеру группы  $F$ , то  $xe_0 = e_0$  и  $x = e_0 + xe_1 + \dots + xe_s$ . Так как каждый идеал  $I_i$  изоморфен алгебраически замкнутому полю  $K$ , то из каждого компонента  $xe_i$  элемента  $x$  извлекается корень  $n$ -ой степени в  $V(KF) \subseteq V(KG)$ . Лемма доказана.

Аналогично лемме 3 можно сформулировать следующее утверждение.

**Лемма 3'.** Если  $G$  — абелева  $p$ -группа и  $K$  — поле второго рода относительно  $p$ , причем при  $p=2$  имеет место  $K=K(\varepsilon_2)$ , то силовская  $p$ -подгруппа  $S(KG)$  группы  $V(KG)$  является полной.

Доказательство аналогично лемме 3, но его можно получить как прямое следствие теоремы 1 статьи [4] и предложения 11 статьи [5].

**Лемма 4.** Пусть  $G$  — периодическая абелева группа,  $H$  — такая ее подгруппа, что  $G/H$  — циклическая группа порядка  $p$  для некоторого простого числа  $p$  и  $K$  — алгебраически замкнутое поле, характеристика которого не делит порядки элементов группы  $G$ . Если  $H'$  — любой групповой базис алгебры  $KH$ , то алгебра  $KG$  обладает базисом, разлагающимся в прямое

произведение  $H' \times \langle c \rangle$ , где  $\langle c \rangle$  — циклическая подгруппа группы  $V(KG)$  нормированных единиц алгебры  $KG$  и порядок группы  $\langle c \rangle$  равняется  $p$ .

Доказательство. Пусть  $G/H = \langle aH \rangle$ . Так как мощность  $|G/H| = p$ , то существует элемент  $f$  группы  $H$ , такой что

$$(7) \quad a^p = f.$$

Ввиду того, что  $H \subseteq V(KH)$  и группа  $V(KH)$ , в силу леммы 3, полна, то существует такой элемент  $t$  группы  $V(KH)$ , что  $f = t^p$ . Из этого равенства и из (7), полагая

$$(8) \quad c = at^{-1},$$

получается, что  $c^p = 1$ ,  $c \in V(KH)$  и что порядок элемента  $c$  равен  $p$ . Так как  $KH = KH'$  и  $a^i \notin H$  для  $0 < i < p$ , то  $c^i = a^i t^{-i} \notin H$ , т.е.  $H' \cap \langle c \rangle = 1$  или существует прямое произведение  $H' \times \langle c \rangle$ . Группа  $G' = H' \times \langle c \rangle$  является  $K$ -порождающим множеством алгебры  $KG$ , ввиду того, что для каждого элемента  $g \in G$  существует такой элемент  $h \in H$ , что  $g = a^s h = c^s t^s h \in K(H' \times \langle c \rangle)$ , где  $s$  — целое неотрицательное число и второе равенство следует из (8). Покажем, что  $G'$  — линейно независимое множество над  $K$ . Любой элемент группы  $G'$ , ввиду (8), имеет вид  $xa^j t^{-j}$ , где  $x \in H'$ . Допустим, что существуют такие элементы  $\alpha_{xj} \in K$ , что

$$\sum_{j=0}^{p-1} \sum_{x \in H'} \alpha_{xj} xa^j t^{-j} = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{j=0}^{p-1} a^j t^{-j} \sum_{x \in H'} \alpha_{xj} x = 0.$$

Так как  $a^j H$  образуют различные смежные классы группы  $G$  по подгруппе  $H$  для  $j = 0, 1, \dots, p-1$ , то из последнего равенства следует  $a^j t^{-j} \sum_{x \in H'} \alpha_{xj} x = 0$  и, ввиду обратимости элемента  $a^j t^{-j}$ , что  $\sum_{x \in H'} \alpha_{xj} x = 0$ . Так как  $H'$  — групповой базис алгебры  $KH$ , то  $\alpha_{xj} = 0$  для каждого  $x \in H'$  и для  $j = 0, 1, \dots, p-1$ . Следовательно,  $H' \times \langle c \rangle$  — групповой базис алгебры  $KG$ . Лемма доказана.

Аналогичным образом, используя лемму 3', получается следующее утверждение.

**Лемма 4'.** Пусть  $G$  — абелева  $p$ -группа,  $H$  — такая ее подгруппа, что  $G/H$  — циклическая группа порядка  $p$  и  $K$  — поле второго рода относительно  $p$ , причем при  $p=2$  имеет место  $K = K(\varepsilon_2)$ . Если  $H'$  — любой групповой базис алгебры  $KH$ , то алгебра  $KG$  обладает групповым базисом  $G' = H' \times \langle c \rangle$ , где  $\langle c \rangle$  — циклическая подгруппа группы  $V(KG)$  и порядок группы  $\langle c \rangle$  равняется  $p$ .

**Предложение 5.** Если  $G$  — периодическая абелева группа,  $H$  — ее подгруппа и  $K$  — алгебраически замкнутое поле, характеристика которого не делит порядки элементов группы  $G$ , то групповая алгебра  $KG$  обладает групповым базисом  $H \times A$ , где  $A$  — подгруппа группы  $V(KG)$  нормированных единиц алгебры  $KG$ ,  $A$  — прямое произведение циклических групп простых порядков и мощность  $|A| = (G: H)$ .

Доказательство. Ввиду леммы 2, группа  $G$  можно представить как объединение возрастающей последовательности (6) таких своих подгрупп  $G_x$ ,

что выполнены условия (\*) и (\*\*) леммы 2. Доказательство проводится методом индукции в интервале  $[0, \beta]$ . Если порядковое число  $\alpha$  интервала  $[0, \beta]$  равняется нулю, то утверждение тривиально для  $G_0$ . Допустим, что для всех  $\gamma < \alpha$  построен групповой базис  $F_\gamma$  алгебры  $KG_\gamma$ ,  $F_0 = H$ , удовлетворяющий следующим условиям:

- а)  $F_\gamma = H \times A_\gamma$ ,  $A_\gamma \subseteq V(KG_\gamma)$ ,  $A_\gamma$  — прямое произведение циклических групп простых порядков, и  $|A_\gamma| = (G_\gamma : H)$ ;
- в) если  $\gamma$  — неперделное порядковое число, то  $A_\gamma = A_{\gamma-1} \times \langle t_\gamma \rangle$  и порядок  $O(t_\gamma)$  элемента  $t_\gamma$  — некоторое простое число;
- с) если  $\gamma$  — предельное порядковое число, то  $A_\gamma = \bigcup_{\delta < \gamma} A_\delta$ .

Построим групповой базис  $F_\alpha$  алгебры  $KG_\alpha$ , удовлетворяющий условиям а), в) и с).

1) Пусть  $\alpha$  — предельное порядковое число. Положим  $A_\alpha = \bigcup_{\gamma < \alpha} A_\gamma$  и  $F_\alpha = H \times A_\alpha$ . Тогда, ввиду индуктивного предположения для  $F_\gamma$ ,  $\gamma < \alpha$ , получится

$$F_\alpha = H \times A_\alpha = H \times \left( \bigcup_{\gamma < \alpha} A_\gamma \right) = \bigcup_{\gamma < \alpha} (H \times A_\gamma) = \bigcup_{\gamma < \alpha} F_\gamma, \quad \text{т.е.} \quad F_\alpha = \bigcup_{\gamma < \alpha} F_\gamma.$$

Так как  $G_\alpha = \bigcup_{\gamma < \alpha} G_\gamma$  и, согласно индуктивному предположению,  $KG_\gamma = KF_\gamma$  для каждого  $\gamma < \alpha$ , то

$$KG_\alpha = K\left(\bigcup_{\gamma < \alpha} G_\gamma\right) = \bigcup_{\gamma < \alpha} KG_\gamma = \bigcup_{\gamma < \alpha} KF_\gamma = K\left(\bigcup_{\gamma < \alpha} F_\gamma\right) = KF_\alpha.$$

$K$ -линейная независимость элементов группы  $F_\alpha$  вытекает из того, что элементы каждого базиса  $F_\gamma$  являются  $K$ -линейно независимыми. Следовательно,  $F_\alpha$  — групповой базис алгебры  $KG_\alpha$ . По построению условие с) выполнено для  $F_\alpha$ . Докажем условие а). Так как, по индуктивному предположению,  $A_\gamma \subseteq V(KG_\gamma)$  и  $G_\alpha$  — объединение возрастающей последовательности подгрупп  $G_\gamma$ ,  $\gamma < \alpha$ , то

$$A_\alpha = \bigcup_{\gamma < \alpha} A_\gamma \subseteq \bigcup_{\gamma < \alpha} V(KG_\gamma) = V\left(K\left(\bigcup_{\gamma < \alpha} G_\gamma\right)\right) = V(KG_\alpha),$$

т.е.  $A_\alpha \subseteq V(KG_\alpha)$ . Если  $\gamma$  — неперделное порядковое число,  $\gamma < \alpha$ , то, по индуктивному предположению,  $A_\gamma = A_{\gamma-1} \times \langle t_\gamma \rangle$ , где  $O(t_\gamma) = p_\gamma$  — некоторое простое число. Следовательно,  $A_\gamma$  удовлетворяет условиям леммы 15 статьи [5], откуда вытекает, что  $A_\alpha = A_0 \times \prod_{\gamma} \langle t_\gamma \rangle = \prod_{\gamma} \langle t_\gamma \rangle$ , где  $\gamma$  пробегает все неперделные порядковые числа между 0 и  $\alpha$ , т.е.  $A_\alpha$  разлагается в прямое произведение циклических групп простых порядков и  $A_\alpha = |\alpha| = (G_\alpha : H)$ , где последнее равенство следует из леммы 2. Этим условие а) доказано для группы  $F_\alpha$ .

2) Пусть  $\alpha$  — неперделное порядковое число. Тогда  $(G_\alpha : G_{\alpha-1}) = p_\alpha$  для некоторого простого числа  $p_\alpha$ . Согласно индуктивному предположению, алгебра  $KG_{\alpha-1}$  обладает групповым базисом  $F_{\alpha-1} = H \times A_{\alpha-1}$ , причем  $F_{\alpha-1}$  удовлетворяет условиям а), в) и с). Из леммы 4 следует, что алгебра  $KG_\alpha$

имеет групповой базис  $F_x = F_{x-1} \times \langle t_x \rangle = (H \times A_{x-1}) \times \langle t_x \rangle$ , где  $\langle t_x \rangle \subseteq V(KG_x)$  и  $O(t_x) = p_x$ . Положим  $A_x = A_{x-1} \times \langle t_x \rangle$ . Этим выполнено условие в) для группы  $F_x$ . Покажем, что для группы  $F_x$  выполняется условие а). Действительно,  $F_x = H \times A_x$  и так как  $A_{x-1} \subseteq V(KG_{x-1})$ ,  $\langle t_x \rangle \subseteq V(KG_x)$ , то  $A_x \subseteq V(KG_x)$ . Так как группа  $A_{x-1}$ , ввиду индуктивного предположения, разлагается в прямое произведение циклических групп простых порядков и  $O(t_x) = p_x$ , то  $A_x = A_{x-1} \times \langle t_x \rangle$  разлагается в прямое произведение циклических групп простых порядков. Кроме того из последнего равенства следует, что  $|A_x| = |A_{x-1}| O(t_x) = (G_{x-1} : H) p_x = (G_{x-1} : H) (G_x : G_{x-1}) = (G_x : H)$ , где второе равенство вытекает из индуктивного предположения для  $A_{x-1}$ . Таким образом, условие а) выполнено для группы  $F_x$ . Предложение доказано.

Аналогичным образом, используя леммы 2 и 4', доказывается следующее утверждение.

**Предложение 5'.** Если  $G$  — абелева  $p$ -группа,  $H$  — ее подгруппа,  $K$  — поле второго рода относительно  $p$  (с характеристикой, отличной от  $p$ ), причем при  $p=2$  имеет место  $K=K(\varepsilon_2)$ , то групповая алгебра  $KG$  обладает базисом  $H \times A$  где  $A$  — подгруппа группы  $V(KG)$  нормированных единиц алгебры  $KG$ ,  $A$  — прямое произведение циклических групп простых порядков и  $|A| = (G : H)$ .

Из предложений 5 и 5', полагая  $H=1$ , получается следующее утверждение.

**Следствие 6.** Пусть  $G$  — периодическая абелева группа,  $K$  — поле, характеристика которого не делит порядки элементов группы  $G$  и, или а)  $K$  — алгебраически замкнутое поле, или в)  $G$  — абелева  $p$ -группа и  $K$  — поле второго рода относительно  $p$ , причем при  $p=2$  имеет место  $K=K(\varepsilon_2)$ . Тогда групповая алгебра  $KG$  обладает групповым базисом, разлагающимся в прямое произведение циклических групп  $\langle t_\gamma \rangle$  простых порядков, причем в случае в)  $\langle t_\gamma \rangle$  —  $p$ -группа.

**Теорема 7.** Пусть  $G$  и  $G'$  — периодические абелевы группы,  $H$  и  $H'$  — соответственно их подгруппы и  $K$  — алгебраически замкнутое поле, характеристика которого не делит порядки элементов групп  $G$  и  $G'$ . Имеет место  $K$ -изоморфизм  $(KG, KH) \cong (KG', KH')$  пар групповых алгебр тогда и только тогда, когда  $|H| = |H'|$  и  $(G : H) = (G' : H')$ .

**Доказательство.** Если  $(KG, KH) \cong (KG', KH')$ , то из предложения 1 следует  $(G : H) = (G' : H')$ . Кроме того, из  $KH \cong KH'$  вытекает  $|H| = |H'|$ .

Пусть, обратно,  $|H| = |H'|$  и  $(G : H) = (G' : H')$ . Ввиду предложения 5 групповая алгебра  $KG$  обладает групповым базисом  $H \times A$ ,  $|A| = (G : H)$ , а алгебра  $KG'$  — базисом  $H' \times A'$ ,  $|A'| = (G' : H')$ . Тогда  $KG = K(H \times A) \cong \cong KH \otimes_K KA$  и  $KG' = K(H' \times A') \cong KH' \otimes_K KA'$ . Однако из  $|H| = |H'|$  следует, что существует  $K$ -изоморфизм  $\theta$  алгебры  $KH$  на алгебру  $KH'$  [3]. Аналогично, ввиду предложения 1, из  $|A| = (G : H) = (G' : H') = |A'|$  вытекает, что существует  $K$ -изоморфизм  $\varphi$  алгебры  $KA$  на алгебру  $KA'$ . Тогда тензорное произведение  $\theta \otimes \varphi$  является изоморфизмом алгебры  $KH \otimes_K KA \cong KG$  на алгебру  $KH' \otimes_K KA' \cong KG'$ , т.е. существует изоморфизм алгебры  $KG$  на алгебру  $KG'$ , продолжающий изоморфизм  $\theta: KH \rightarrow KH'$ .

**Теорема 8.** Если  $G$  и  $G'$  — абелевы  $p$ -группы,  $H$  и  $H'$  — соответственно их подгруппы,  $K$  — поле, характеристика которого не равна  $p$  и поле  $K$  — поле

второго рода относительно  $p$ , причем при  $p=2$  имеет место  $K=K(\varepsilon_2)$ , где  $\varepsilon_2$  — первообразный корень четвертой степени из 1 в алгебраическом замыкании поля  $K$ , то существует  $K$ -изоморфизм  $(KG, KH) \cong (KG', KH')$  пар групповых алгебр тогда и только тогда, когда  $|H|=|H'|$  и  $(G:H)=(G':H')$ .

Доказательство аналогично теореме 7, используя предложение 1, предложение 5' и факт, что полная система инвариантов указанной групповой алгебры  $KG$  образуется из мощности  $|G|$  (см. теорему 1 статьи [2] и предложение 2 работы [5]).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] С. Д. Берман, Групповые алгебры счетных абелевых  $p$ -групп. *Publ. Math. (Debrecen)* **14** (1967), 365—405.
- [2] С. Д. Берман, Т. Ж. Моллов. Об изоморфизме полупростых групповых алгебр несчетных абелевых  $p$ -групп. *Доклады БАН*, **35** (1982), 869—871.
- [3] W. MAU, Invariants for commutative group algebras III. *J. Math.* **15** (1971), 525—531.
- [4] Т. Ж. Моллов. О мультипликативных группах полупростых групповых алгебр абелевых  $p$ -групп. *Доклады БАН* **35**, 1982, 1619—1622.
- [5] Т. Ж. Моллов. Мультипликативные группы полупростых групповых алгебр. Сердика Българско математическо списание (в печати).
- [6] D. S. PASSMAN, The algebraic structure of group rings. *New York*, Interscience 1977.

(Поступило 27 XII. 1982 г.)