

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & a_i^{-1}(j_1, \dots, j_{i-1}) a_m(l_1, \dots, l_{m-1}) a_i(j_1, \dots, j_{i-1}) = \\
 & = \begin{cases} a_m(l_1, \dots, l_{i-1}, l_i+1, l_{i+1}, \dots, l_{m-1}) \\ \text{если } l_s = j_s; \quad s = 1, 2, \dots, i-1, \\ a_m(l_1, \dots, l_{m-1}) \\ \text{если } l_s \neq j_s \text{ для некоторого } 1 \leq s \leq i-1; \end{cases} \\
 & 1 \leq i < m \leq k; \quad 1 \leq l_s \leq p^{n_{s_1}}; \quad s_1 = 1, 2, \dots, m-1; \quad 1 \leq j_{s_2} \leq p^{n_{s_1}}; \\
 & s_2 = 1, 2, \dots, i-1.
 \end{aligned}$$

Введём следующие обозначения:

$$(3) \quad x_m = a_1 \cdot a_2(1) \dots a_m(1, 1, \dots, 1); \quad x_{k-1} = x$$

Вводя аналогичные [3] обозначения:

$$(4) \quad y_j(1) = x_{j-1}^{-1} a_j(1, \dots, 1) x_{j-1}; \quad y_j(i) = x_{j-1}^{-1} y_j(i-1) x_{j-1}$$

легко получаем, что

$$y_j\left(\sum_{i=1}^{j-1} p^{n_i}\right) = y_j(1).$$

Очевидно, что элементы

$$y_k(1), y_k(2), \dots, y_k(q); \quad q = p^{\sum_{i=1}^{k-1} n_i}$$

являются упорядочением (в лексикографическом порядке) следующего базиса группы A_k :

$$a_k(j_1, \dots, j_{k-1}); \quad j_s = 1, 2, \dots, p^{n_s}; \quad s = 1, 2, \dots, k-1.$$

3. Класс nilпотентности группы G

Лемма 1. Порядок элементов x_m ($m=1, 2, \dots, k$) равен

$$p^{\sum_{i=1}^m n_i}.$$

Доказательство

Доказательство проводится индукцией по числу m . При $m=1$ утверждение очевидно, т.к. порядок элемента $x_1 = y_1(1) = a_1$ равен p^{n_1} .

Пусть теперь порядок элемента $x_j = y_1(1) y_2(1) \dots y_j(1)$ равен l . Тогда равенство

$$x_{j+1}^l = x_j y_{j+1}(1) y_{j+1}(2) \dots y_{j+1}(l) = e$$

выполняется лишь тогда, когда $l = \sum_{i=1}^j p^i \cdot s_1$ для некоторого $s_1 \geq 1$.

Следовательно,

$$y_{j+1}(1) y_{j+1}(2) \dots y_{j+1}(l) = (y_{j+1}(1) \cdot y_{j+1}(2) \dots y_{j+1}(p^{n_1} + \dots + n_j))^{s_1} = e$$

и порядок элемента $y_{j+1}(1)$ очевидно равен $p^{n_{j+1}}$, и так $s_1 = p^{n_{j+1}}$ и $l = \sum_{i=1}^{j+1} p^{n_i}$, что и доказывает лемму.

Лемма 2. В сплетении G выполняется

$$[A_k, G, \dots, G] = [A_k, x, \dots, x],$$

где правая и левая стороны равенства представляют собой подгруппы G , порождённые многократными коммутаторами с одинаковым числом членов.

Доказательство

Так как A_k коммутативный нормальный делитель G , то $[A_k, G] = [A_k, A_k \cdot K] = [A_k, K]$ ($[C, D]$ обозначает группу, порождённую взаимными коммутаторами подгрупп C и D). Далее, из следующих соотношений для коммутаторов

$$[a, k_1 k_2] = [a, k_2]^{k_1} [a, k_1] \quad \text{и} \quad [a, k_1^{-1}] = ([a, k_1]^{k_1^{-1}})^{-1},$$

где $a \in A_k$; $k_1, k_2 \in K$ и того, что A_k -коммутативный нормальный делитель группы G , следует, что группа $[A_k, K]$ порождается множеством коммутаторов вида $[a, k_1]$, где элементы a и k_1 являются соответственно порождающими элементами подгрупп A_k и K .

Для доказательства теоремы достаточно показать, что коммутаторы вида $[y_k(l), g]$ могут быть представлены в виде произведения коммутаторов типа $[y_k(l), x]$, где $y_k(l)$ -базисный элемент A_k , определённый в (4), а g -какой-либо из порождающих элементов группы K .

Используя (2) и (4) легко видеть, что для произвольного $g \in K$ возможны лишь следующие два случая:

$$a) [y_k(l), g] = y_k(l) y_k^{-1}(l+j) \quad \text{для некоторого } j > 0.$$

$$б) [y_k(l), g] = y_k(l) y_k^{-1}(l-i) \quad \text{для некоторого } i > 0.$$

Так как $[y_k(l), x] = y_k^{-1}(l+1) y_k(l)$ выполняется, то для а)

$$[y_k(l), g] = [y_k(l), x] [y_k(l+1), x] \cdot \dots \cdot [y_k(l+j-1), x] = y_k^{-1}(l) y_k(l+j),$$

а для б)

$$[y_k(l), g] = [y_k^{-1}(l-i), x] \cdot \dots \cdot [y_k^{-1}(l-1), x] = y_k(l) y_k^{-1}(l-i).$$

Вследствии этого получаем, что $[A_k, G] = [A_k, x]$. Пусть

$$A^{(1)} = A_k; \quad [A^{(i)}, G] = A^{(i+1)}.$$

Группы $A^{(i)}$ являются нормальными делителями группы G , так как для элементов $a_i \in A^{(i)}$ и $g \in G$ справедливо $[a_i, g] = a_i^{-1} a_i^g \in A^{(i)}$ т.е. $a_i^g \in A_k$ и поэтому нормализатором группы $A^{(i)}$ в группе G является сама G . Аналогично первому шагу доказательства можно показать $[A^{(i)}, G] = [A^{(i)}, K]$. Используя этот факт и соотношения для коммутаторов вида $[y_k(l), g]$, приведённые в доказательстве выше, утверждение теоремы может быть легко доказано по индукции.

В дальнейшем используется следующий результат [1] стр. 378.

Лемма 3. Пусть A нормальный делитель нильпотентной группы G и $G = A \cdot K$ для некоторой подгруппы $K \subseteq G$. Определим нормальные делители $A^{(i)}$ группы G следующим образом:

$$A^{(1)} = A; \quad A^{(i)} = [A^{(i-1)}, G],$$

Тогда для нижнего центрального ряда

$$G = \Gamma_1(G) \supset \Gamma_2(G) \supset \dots \supset \Gamma_{c+1}(G) = e$$

группы G выполняется

$$\Gamma_i(G) = A^{(i)} \Gamma_i(K).$$

Теорема 4. Для класса нильпотентности c группы G выполняется равенство

$$c = n_k \left(p^{\sum_{i=1}^{k-1} n_i} - p^{\sum_{i=1}^{k-1} n_i - 1} \right) + p^{\sum_{i=1}^{k-1} n_i - 1}$$

Доказательство

Для группы $\bar{G} = (a_k) \wr (x)$, где x -элемент группы G вида (3), очевидно выполняется, что $\bar{G} \subset G$ и $\bar{G} = A_k \cdot (x)$, так как порядок элемента x равен $\sum_{i=1}^{k-1} p^{n_i}$. По леммам 2. и 3. выполняется $A^{(i)} = [A_k, x, \dots, x] \subseteq \Gamma_i(\bar{G})$, и поэтому $\Gamma_i(G) \cap A_k = \Gamma_i(\bar{G}) \cap A_k = A^{(i)}$. Класс нильпотентности группы G совпадает с длиной нормального ряда $A^{(1)} \supset A^{(2)} \supset \dots \supset A^{(c)}$, так как класс нильпотентности группы K не превышает класс нильпотентности группы G . Класс нильпотентности групп $\bar{G}$ и G совпадает вследствие $A^{(i)} \subseteq \Gamma_i(\bar{G})$. Так как группа G является сплетением двух циклических групп и известно [5] что класс нильпотентности сплетения группы порядка p^n с группой порядка p^m равен $n(p^m - p^{m-1}) + p^{m-1}$, то доказательство закончено.

Замечание: Х. Либек [5] доказал, что класс нильпотентности сплетения двух абелевых групп зависит только от экспоненты первого множителя и от второго множителя. Теорема 4. может быть обобщена и на случай когда первый множитель сплетения является абелевой p -группой с экспонентой p^k .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] B. HUPPERT, Endliche Gruppen I. Springer-Verlag 1967.
- [2] L. A. KALOJNINE, La Structure des p -groupes de Sylow des groupes symmetriques finis, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **65** (1948), 239—276.
- [3] К. Бузаши, О структуре сплетения конечного числа циклических групп простого порядка *Publ. Math. (Debrecen)* **15** (1968), 107—129.
- [4] G. BAUMSLAG, Wreath products and p -groups. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **55** (1959), 224—231.
- [5] H. LIEBECH, Concerning nilpotent wreath products. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **58** (1962), 443—451.
- [6] D. P. MELDRUM, Central series in wreath products. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **63** (1967), 551—567.
- [7] В. И. Сушанский, Сплетения элементарных абелевых групп. *Матем. заметки* (1972) **II**, 61—72.

(Поступило 17. з. 1983.)