

Гиперпространства полусинтопогенных пространств

В. В. МАСЛОВ, Р. С. ЛИНИЧУК (ВОРОШИЛОВГРАД)

Как известно, топологические, близостные и равномерные структуры являются частными случаями так называемых синтопогенных структур, первоначальное изучение которых проведено венгерским математиком, академиком А. Часаром в [2]. Понятие полусинтопогенной структуры есть обобщение понятия синтопогенной структуры; полусинтопогенные структуры впервые рассматривались в [1]. С терминологией можно ознакомиться в указанных работах.

Настоящая статья посвящена первоначальному изучению гиперпространств полусинтопогенных пространств. Следует отметить, что понятие гиперпространства полусинтопогенного пространства введено как естественное обобщение понятия гиперпространства топологического пространства (см. [3] и [4]). Однако, указанный процесс обобщения не является чисто механическим переносом известных результатов хотя бы потому, что в теории полусинтопогенных пространств необходимо применяется аппарат, несколько отличный от аппарата, традиционно используемого в общей топологии. Нужно учесть, что из результатов, излагаемых в данной статье, могут быть получены некоторые следствия, касающиеся, например, равномерных и близостных пространств. Однако, такой аспект, представляющий, конечно, известный интерес, развивался нами наименьшим образом.

Пусть X — произвольный непустой класс, а $\mathfrak{P}(X)$ — класс всех его частей. Отображение $i_X: X \rightarrow \mathfrak{P}(X)$, определяемое правилом: $x \rightarrow \{x\}$, $x \in X$, является канонической инъекцией класса X в класс $\mathfrak{P}(X)$; обозначим $\tilde{X} = i_X(X)$.

Предположим, что на классе X задан полутопогенный порядок $<$. Образ порядка $<$ относительно отображения i_X является полутопогенным порядком в классе $\tilde{X}$, который будем обозначать символом $\tilde{<}$. Договоримся отождествлять классы X и $\tilde{X}$ и полутопогенные порядки $<$ и $\tilde{<}$.

Предложение 1. Для того, чтобы полутопогенный порядок $<^*$, определённый на классе $\mathfrak{P}(X)$, имел сужением на класс X полутопогенный порядок $<$, необходимо и достаточно, чтобы были эквивалентны соотношения:

$$A < B \text{ и } A <^* B \cup (\mathfrak{P}(X) \setminus X)$$

(для всех таких $A, B \subset X$, что $A < B$).

Определение 1. Полутопогенный порядок $<^*$ на классе $\mathfrak{P}(X)$ называется гиперпродолжением полутопогенного порядка $<$, определённого на классе X , если $<^*|X = <$.

Корректность данного определения подтверждается следующими примерами.

Пример 1. Пусть $<$ — полутопогенный порядок на классе $X \neq \emptyset$. Для подклассов $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ класса $\mathfrak{P}(X)$ положим: $\mathfrak{A} <_* \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда: 1) либо $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \emptyset$, 2) либо найдутся две такие части U и V класса X что: $U < V$ и $\mathfrak{A} \subset \{(W): W \subset U\}, \{(W): W \subset V\} \subset \mathfrak{B}$.

Предложение 2. Отношение $<_*$ является таким полутопогенным порядком на классе $\mathfrak{P}(X)$, что $<_*|X = <$.

Доказательство. Тот факт, что $<_*$ есть полутопогенный порядок на классе $\mathfrak{P}(X)$, устанавливается простой проверкой выполнения аксиом $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3$. Допустим теперь, что $A <_* B$ для $A, B \subset X$. Это соотношение эквивалентно соотношению $A <_* B \cup (\mathfrak{P}(X) \setminus X)$. Найдём части U и V класса X так, как того требует определение полутопогенного порядка $<_*$, т. е.:

$$U < V, A \subset \{(W): W \subset U\},$$

$$\{(W): W \subset V\} \subset B \cup (\mathfrak{P}(X) \setminus X).$$

Если $x \in A$, то $x \in \{(W): W \subset U\}$, так что $\{x\} \subset U$, а потому $x \in U$; таким образом, $A \subset U$. Если же $x \in V$ то $\{x\} \in \{(W): W \subset V\}$ так что $x \in B \cup (\mathfrak{P}(X) \setminus X)$. Учитывая что $\{x\} \in \mathfrak{P}(X)$ и $x \in X$ получаем в силу договорённости: $x \in B$; таким образом, $V \subset B$. Согласно аксиоме $\mathcal{O}_2$, из соотношений $A \subset U, V \subset B$ и $U < V$ вытекает соотношение $A < B$. Итак, $< = <_*|X$.

Пример 2. Пусть $<$ — некоторый полутопогенный порядок на классе $X \neq \emptyset$. Между элементами $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ класса $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))$ определим отношение $<_\lambda$ следующим правилом: $\mathfrak{A} <_\lambda \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда: 1) либо $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \emptyset$, 2) либо найдутся такие две части класса X , например, U и V , что

$$U < V, \mathfrak{A} \subset \{(W): W \cap U \neq \emptyset\}, \{(W): W \cap V \neq \emptyset\} \subset \mathfrak{B}$$

Предложение 3. Отношение $<_\lambda$ является полутопогенным порядком на классе $\mathfrak{P}(X)$, сужение которого на класс X есть $<$.

Доказательство аналогично доказательству предложения 2.

Пример 3. Если $<$ — некоторый полутопогенный порядок на классе $X \neq \emptyset$, то символом $<_\psi$ обозначим отношение $<_* \cup <_\lambda$ на классе $\mathfrak{P}(X)$.

Предложение 4. Отношение $<_\psi$ является полутопогенным порядком на классе $\mathfrak{P}(X)$, имеющим сужением на класс X полутопогенный порядок $<$.

Предложение 5. Если полутопогенный порядок $<$ сильнее полутопогенного порядка $<'$ на классе $X \neq \emptyset$, то полутопогенный порядок $<_*$ (соответственно, $<_\lambda$; соответственно, $<_\psi$) сильнее полутопогенного порядка $<'_*$ (соответственно, $<'_\lambda$; соответственно, $<'_\psi$) на $\mathfrak{P}(X)$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} <'_* \mathfrak{B}$, так что существуют такие части U и

V класса X , что $U <' V$,

$$\mathfrak{A} \subset \{(W): W \subset U\}, \{(W): W \subset V\} \subset \mathfrak{B}.$$

Так как из соотношения $U <' V$ следует соотношение $U < V$, то $\mathfrak{A} <_* \mathfrak{B}$.

Предложение 6. Каков бы ни был полутопогенный порядок $<$ на классе $X \neq \emptyset$, полутопогенный порядок $(<^c)_*$ совпадает с полутопогенным порядком $(<_\lambda)^c$ на классе $\mathfrak{P}(X)$.

Доказательство. Соотношение $\mathfrak{A}(<_\lambda)^c \mathfrak{B}$ эквивалентно соотношению $\mathfrak{P}(X) \setminus \mathfrak{B} <_\lambda \mathfrak{P}(X) \setminus \mathfrak{A}$. Согласно определению полутопогенного порядка $<_\lambda$, найдутся такие части U и V класса X , что: $U < V$, $\mathfrak{P}(X) \setminus \mathfrak{B} \subset \{(W): W \cap U \neq \emptyset\}$, $\{(W): W \cap V \neq \emptyset\} \subset \mathfrak{P}(X) \setminus \mathfrak{A}$.

Так как $X \setminus V <^c X \setminus U$ и $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(X) \setminus \{(W): W \cap V \neq \emptyset\}$, $\mathfrak{P}(X) \setminus \{(W): W \cap U \neq \emptyset\} \subset \mathfrak{B}$, то из очевидных равенств $\mathfrak{P}(X) \setminus \{(W): W \cap V \neq \emptyset\} = \{(W): W \subset X \setminus V\}$ и $\mathfrak{P}(X) \setminus \{(W): W \cap U \neq \emptyset\} = \{(W): W \subset X \setminus U\}$ получаем соотношение $\mathfrak{A}(<^c)_* \mathfrak{B}$.

Предложение 7. Для каждого полутопогенного порядка $<$ на классе $X \neq \emptyset$ порядки $(<_*)^c$ и $(<^c)_\lambda$ равны.

Доказательство. Если $\mathfrak{A}(<_*)^c \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{P}(X) \setminus \mathfrak{B} <_* \mathfrak{P}(X) \setminus \mathfrak{A}$. Найдём части U и V класса X так, чтобы: $U < V$ и

$$\mathfrak{P}(X) \setminus \mathfrak{B} \subset \{(W): W \subset U\}, \{(W): W \subset V\} \subset \mathfrak{P}(X) \setminus \mathfrak{A}.$$

Отсюда: $X \setminus V <^c X \setminus U$, $\mathfrak{P}(X) \setminus \{(W): W \subset U\} \subset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(X) \setminus \{(W): W \subset V\}$, так как, очевидно,

$$\mathfrak{P}(X) \setminus \{(W): W \subset U\} = \{(W): W \cap (X \setminus U) \neq \emptyset\}$$

и

$$\mathfrak{P}(X) \setminus \{(W): W \subset V\} = \{(W): W \cap (X \setminus V) \neq \emptyset\},$$

то $\mathfrak{A}(<^c)_\lambda \mathfrak{B}$.

Предложение 8. Равенство $(<^c)_\psi = (<_\psi)^c$ справедливо для каждого полутопогенного порядка $<$ на классе $X \neq \emptyset$.

Доказательство. В самом деле, имеем: $(<_\psi)^c = (<_* \cup <_\lambda)^c = = (<_*)^c \cup (<_\lambda)^c = (<^c)_\lambda \cup (<^c)_* = (<^c)_* \cup (<^c)_\lambda = (<^c)_\psi$.

Следствие. Если $<$ — симметричный полутопогенный порядок на классе $X \neq \emptyset$, то $<_\psi$ — симметричный полутопогенный порядок на классе $\mathfrak{P}(X)$.

Действительно, $(<_\psi)^c = (<^c)_\psi = <_\psi$.

Предложение 9. Для каждого полутопогенного порядка $<$ на классе $X \neq \emptyset$ справедливо равенство $(<^p)_\lambda = (<_\lambda)^p$.

Доказательство. Если $\mathfrak{A}(<^p)_\lambda \mathfrak{B}$, то найдутся такие части U и V класса X , что: $\mathfrak{A} \subset \{(W): W \cap U \neq \emptyset\}$, $\{(W): W \cap V \neq \emptyset\} \subset \mathfrak{B}$. Воспользовавшись определением совершенного $<^p$, найдём части U_i , $i \in I \neq \emptyset$, класса X так, чтобы $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ и для каждого индекса $i \in I$ справедливо соотношение $U_i < V$.

При этом очевидно,

$$\{(W): W \cap U_i \neq \emptyset\} < \{(W): W \cap V \neq \emptyset\}.$$

Учитывая равенство

$$\{(W): W \cap (\bigcup_{i \in I} U_i)\} = \bigcup_{i \in I} \{(W): W \cap U_i \neq \emptyset\}$$

и включение $\{(W): W \cap V \neq \emptyset\} \subset \mathfrak{B}$, находим: $\mathfrak{A}(<_i)^p \mathfrak{B}$. Обратно, если $\mathfrak{A}(<_\lambda)^p \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{A}_i <_\lambda \mathfrak{B}$, $i \in I$. Каждое соотношение $\mathfrak{A}_i <_\lambda \mathfrak{B}$ позволяет выбрать такие части U_i и V_i , $i \in I$ класса X , что: $U_i < V_i$, $\mathfrak{A} \subset \{(W): W \cap U_i \neq \emptyset\}$, $\{(W): W \cap V_i \neq \emptyset\} \subset \mathfrak{B}$. Положив $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, $V = \bigcup_{i \in I} V_i$, из соотношений $U_i < V_i$, $i \in I$, найдём: $U <^p V$, а отсюда:

$$\{(W): W \cap U \neq \emptyset\} (<^p)_\lambda \{(W): W \cap V \neq \emptyset\}.$$

Так как $\mathfrak{A} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{A}_i \subset \bigcup_{i \in I} \{(W): W \cap U_i \neq \emptyset\} = \{(W): W \cap (\bigcup_{i \in I} U_i) \neq \emptyset\} = \{(W): W \cap U \neq \emptyset\}$ и $\{(W): W \cap V \neq \emptyset\} \subset \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A} (<^p)_\lambda \mathfrak{B}$. Итак, окончательно, $(<_\lambda)^p = (<^p)_\lambda$.

Следствие. Если полутопогенный порядок $<$ — совершенный, то таков же и порядок $<_\lambda$.

В самом деле, $(<_\lambda)^p = (<^p)_\lambda = <_\lambda$.

Замечание. Полутопогенные порядки $(<_\lambda)^p$ и $(<^p)_\lambda$ (а потому и $(<_\psi)^p$ и $(<^p)_\psi$ — несравнимы.

Предложение 10. Каков бы ни был полутопогенный порядок $<$ на классе $X \neq \emptyset$, всегда: $(<^2)_\lambda = (<_\lambda)^2$, $(<^2)_\psi = (<_\psi)^2$.

Доказательство. Если $\mathfrak{A} (<^2)_\lambda \mathfrak{B}$, то найдутся такие части U и V класса X , что $U <^2 V$,

$$\mathfrak{A} \subset \{(W): W \subset U\}, \{(W): W \subset V\} \subset \mathfrak{B}.$$

Соотношение $U <^2 V$ позволяет выделить такую часть T класса X , что $U < T < V$. Тогда очевидно, $\mathfrak{A} <_\lambda \mathfrak{C} <_\lambda \mathfrak{B}$, где положено $\mathfrak{C} = \{(W): W \subset T\}$. В таком случае ясно, что $\mathfrak{A} (<_\lambda)^2 \mathfrak{B}$. Обратно, если $\mathfrak{A} (<_\lambda)^2 \mathfrak{B}$, то найдётся такая часть $\mathfrak{C}$ класса $\mathfrak{B}(X)$, что $\mathfrak{A} <_\lambda \mathfrak{C} <_\lambda \mathfrak{B}$. Определение полутопогенного порядка $<_\lambda$ позволяет найти такие части U, V, U', V' класса X , что $U < V$, $\mathfrak{A} \subset \{(W): W \subset U\}$, $\{(W): W \subset V\} \subset \mathfrak{C}$, $U' < V'$, $\mathfrak{C} \subset \{(W): W \subset U'\}$, $\{(W): W \subset V'\} \subset \mathfrak{B}$; так как $V \subset U'$, то $U < V < V'$, а потому $U <^2 V'$, так что $\mathfrak{A} (<^2)_\lambda \mathfrak{B}$.

Итак, $(<^2)_\lambda = (<_\lambda)^2$.

Аналогичные рассуждения проводятся и для полутопогенных порядков $(<^2)_\psi$ и $(<_\psi)^2$.

Следствие. Полутопогенный порядок $(<_\psi)^2$ сильнее полутопогенного порядка $(<^2)_\psi$, каков бы ни был полутопогенный порядок $<$ на классе $X \neq \emptyset$.

Действительно, из равенств $(<^2)_\psi = (<^2)_\lambda \cup (<^2)_\lambda = (<_\lambda)^2 \cup (<_\lambda)^2$, $(<_\lambda \cup <_\lambda)^2 = (<_\psi)^2$, учитывая то, что полутопогенный порядок $(<_\lambda \cup <_\lambda)^2$ сильнее полутопогенного порядка $(<_\lambda)^2 \cup (<_\lambda)^2$, получаем требуемое.

Предложение 11. Пусть $<$ — некоторый полутопогенный порядок на классе $X \neq \emptyset$. Полутопогенный порядок $(<_x)^a$ [соответственно, $(<_x)^b$] является слабейшим топогенным (соответственно, бисовершенным) порядком на классе $\mathfrak{P}(X)$ среди тех топогенных (соответственно, бисовершенных) порядков, которые сильнее порядка $<_x$, а порядок $(<_x)^s$ — слабейший среди всех симметричных топогенных порядков на $\mathfrak{P}(X)$, которые сильнее порядка $<_x$.

Замечание. Аналогичное предложению 11 утверждение справедливо относительно полутопогенных порядков $<_\lambda$ и $<_\psi$.

Предложение 12. Если $[X; S]$ — некоторое полусинтопогенное пространство, то $[\mathfrak{P}(X); S_x]$, $[\mathfrak{P}(X); S_\lambda]$ и $[\mathfrak{P}(X); S_\psi]$ — полусинтопогенные пространства.

Здесь положено $S_x = \{<_x; < \in S\}$, $S_\lambda = \{<_\lambda; < \in S\}$, $S_\psi = \{<_\psi; < \in S\}$.

Доказательство. Пусть $<_x, <'_x \in S_x$; тогда $<, <' \in S$. Найдём в структуре S полутопогенный порядок $<''$, который сильнее полутопогенных порядков $<$ и $<'$. Тогда полутопогенный порядок $<'' \in S_x$ сильнее полутопогенных порядков $<_x$ и $<'_x$ (см. предложение 5). Далее, если $<_x \in S_x$, то для полутопогенного порядка $< \in S$ найдём порядок $<' \in S$ так, как того требует аксиома (S_2) ; тогда полутопогенный порядок $<'_x \in S_x$ удовлетворяет аксиоме (S_2) .

Предложение 13. Пусть S — полусинтопогенная структура на классе $X \neq \emptyset$. Справедливы следующие утверждения:

- 1) S_x^a (соответственно, S_x^p, S_x^b, S_x^s) — слабейшая из синтопогенных (соответственно, полусинтопогенных совершенных, бисовершенных, синтопогенных симметричных) структур на классе $\mathfrak{P}(X)$, которые сильнее структуры S_x ;
- 2) S_λ^a (соответственно, $S_\lambda^p, S_\lambda^b, S_\lambda^s$) — слабейшая из синтопогенных (соответственно, полусинтопогенных совершенных, бисовершенных, синтопогенных симметричных) структур на классе $\mathfrak{P}(X)$, которые сильнее структуры S_λ ;
- 3) S_ψ^a (соответственно, $S_\psi^p, S_\psi^b, S_\psi^s$) — слабейшая из синтопогенных (соответственно, полусинтопогенных совершенных, бисовершенных, синтопогенных симметричных) структур на классе $\mathfrak{P}(X)$, которые сильнее структуры S_ψ .

Напомним, что символом S^t обозначается полусинтопогенная структура, состоящая из единственного полутопогенного порядка, являющегося объединением всех полутопогенных порядков структуры S .

Предложение 14. Какова бы ни была полусинтопогенная структура S на классе $X \neq \emptyset$, всегда:

$$(S_x)^t = (S^t)_x, (S_\lambda)^t = (S^t)_\lambda, (S_\psi)^t = (S^t)_\psi.$$

Доказательство. Пусть $(S_x)^t = \{<\}$ и $\{<_1\} = (S^t)_x$. Если $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$, то существует такой полутопогенный порядок $<'_x \in S_x$, что $\mathfrak{A} <_x \mathfrak{B}$. Последнее

осотношение эквивалентно существованию таких частей U и V класса X , что:

$$U < 'V, \mathfrak{A} \subset \{(W): W \subset U\}, \{(W): W \subset V\} \subset \mathfrak{B}.$$

Если считать, что $S' = \{<''\}$, то очевидно, $U < ''V$, а потому: $\mathfrak{A} < ''\mathfrak{B}$. Так как $<'' = <_1$, то $\mathfrak{A} <_1 \mathfrak{B}$. Обратно, пусть $\mathfrak{A} <_1 \mathfrak{B}$; так как $<_1 = <''$ (при обозначении $\{<''\} = S'$), то $\mathfrak{A} < ''\mathfrak{B}$, а потому найдутся такие части U и V класса X , что: $U < ''V$, $\mathfrak{A} \subset \{(W): W \subset U\}$, $\{(W): W \subset V\} \subset \mathfrak{B}$. Ясно, что $U < 'V$ при некотором полутопогенном порядке $<'$ из структуры S , так что $\mathfrak{A} < ' \mathfrak{B}$; вместе с этим, $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$.

Итак, $< = <_1$.

Предложение 15.1. Пусть $<$ — некоторый полутопогенный порядок на классе $X \neq \emptyset$. Верны следующие утверждения:

- 1) если $< = <^q$, то $(<_x)^q | X = <$;
- 2) если $< = <^p$, то $(<_x)^p | X = <$;
- 3) если $< = <^c$, то $(<_x)^c | X = <$;
- 4) если $< = <^b$, то $(<_x)^b | X = <$;
- 5) если $< = <^s$, то $(<_x)^s | X = <$.

Доказательство. 1) Предположим, что $A(<_x)^q | XB$ при $A, B \subset X$. Тогда $A(<_x)^q B \cup (\mathfrak{P}(X) \setminus X)$. Найдём натуральные числа m, n_i ($i=1, 2, \dots, m$) и части A_j, B_{ij} ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n_i$) класса $\mathfrak{P}(X)$ так, чтобы: $A_{ij} < B_{ij}$ — для всех указанных индексов i, j , и

$$A = \bigcup_{i=1}^m \left(\bigcap_{j=1}^{n_i} A_{ij} \right), B \cup (\mathfrak{P}(X) \setminus X) = \bigcup_{i=1}^m \left(\bigcup_{j=1}^{n_i} B_{ij} \right).$$

Используя определение полутопогенного порядка $<_x$, найдём такие части U_{ij}, V_{ij} ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n_i$) класса X , что $U_{ij} < V_{ij}$ для всех индексов i, j , и

$$A_{ij} \subset \{(W): W \subset U_{ij}\}, \{(W): W \subset V_{ij}\} \subset B_{ij}.$$

Положив $U = \bigcup_{i=1}^m \bigcap_{j=1}^{n_i} U_{ij}$, $V = \bigcup_{i=1}^m \bigcap_{j=1}^{n_i} V_{ij}$, получим $U <^q V$; учитывая, что $< = <^q$, имеем: $U < V$. Покажем, что $A \subset U$ и $V \subset B$. Допустим, что $x \in A$; тогда $x \in A_{i_0 j}$ для некоторого индекса i_0 и всех индексов $j=1, 2, \dots, n_{i_0}$ а потому — $x \in \bigcap_{j=1}^{n_{i_0}} A_{i_0 j}$, так что $x \in U$. Если же $x \in V$, то $x \in V_{i_0 j}$ для некоторого индекса i_0 и всех индексов $j=1, 2, \dots, n_{i_0}$. Следовательно, $x \in B_{i_0 j}$ и $x \in B \cup (\mathfrak{P}(X) \setminus X)$. Так как $x \in X$, то $x \notin \mathfrak{P}(X) \setminus X$ и потому $x \in B$. Итак, $A \subset B$. Учитывая то обстоятельство, что всюду в доказательстве использовались лишь определения и разного рода критерии, можно утверждать, что доказано равенство $< = (<_x)^q | X$.

2) Пусть $A(<_x)^p | XB$ при $A, B \subset X$. Тогда $A(<_x)^p B \cup (\mathfrak{P}(X) \setminus X)$. Найдём такой класс индексов I , для каждого $i \in I$ — часть A_i класса X , что: $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ и $A_i <_x B \cup (\mathfrak{P}(X) \setminus X)$, $i \in I$. Согласно определению полутопогенного порядка $<_x$, существуют такие части U_i, V_i , $i \in I$, класса X , что: $U_i < V_i$,

$A_i \subset \{(W) : W \subset U_i\}$, $\{(W) : W \subset V_i\} \subset B \cup (\mathfrak{P}(X) \setminus X)$, $i \in I$. Положив $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, $V = \bigcup_{i \in I} V_i$, получим: $U <^p V$, поэтому $U < V$. Покажем, что $A \subset U$ и $V \subset B$.

Если $x \in A$, то $x \in A_{i_0}$ — для некоторого индекса i_0 , а потому — $x \in U_{i_0}$, так что $x \in U$.

Если $x \in V$, то $x \in V_{i_1}$ — для некоторого индекса i_1 , а потому $x \in B \cup (\mathfrak{P}(X) \setminus X)$; так как $x \in X$, то из последнего соотношения находим $x \in B$.

Итак, $A < B$. Следовательно, $< = (<_*)^p|X$.

3) Допустим, что $A(<_*)^c|XB$ при $A, B \subset X$. Тогда $A(<_*)^c B \cup (\mathfrak{P}(X) \setminus X)$, так что $X \setminus B <_* \mathfrak{P}(X) \setminus A$. Найдём такие части U и V класса X , что $U < V$, $X \setminus B \subset \{(W) : W \subset U\}$, $\{(W) : W \subset V\} \subset \mathfrak{P}(X) \setminus A$. Так как $<^c = <$, то из соотношения $X \setminus V <^c X \setminus U$ получаем соотношение $X \setminus V < X \setminus U$. Покажем, что $A \subset X \setminus V$ и $X \setminus U \subset B$.

Если $x \in A$, то $x \notin \mathfrak{P}(X) \setminus A$, так что $x \notin V$, то есть $x \in X \setminus V$. Если $x \in X \setminus U$, то $x \notin U$, так что $x \notin X \setminus B$, то есть $x \in B$. Следовательно, $A < B$. Итак, $< = (<_*)^c|X$.

4) Допустим, что $A(<_*)^b|XB$ при $A, B \subset X$. Это значит, что $A(<_*)^b B \cup (\mathfrak{P}(X) \setminus X)$. Найдём класс индексов I и класс индексов J , а для каждого $i \in I$ (соответственно, $j \in J$) — часть A_i (соответственно, B_j) класса $\mathfrak{P}(X)$ так, чтобы:

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i, B \cup (\mathfrak{P}(X) \setminus X) = \bigcup_{j \in J} B_j, A_i <_* B_j.$$

При каждом $(i, j) \in I \times J$ найдутся такие части U_i и V_j класса X , что:

$$U_i < V_j, A_i \subset \{(W) : W \subset U_i\}, \{(W) : W \subset V_j\} \subset B_j.$$

Положив $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, $V = \bigcup_{j \in J} V_j$, найдём сначала: $U <^b V$, а затем — $U < V$.

Если $x \in A$, то $x \in A_{i_0}$ при некотором индексе i_0 , а потому $x \in U_{i_0}$ и $x \in U$; итак, $A \subset U$.

Если же $x \in V$, то $x \in V_j$ при всех $j \in J$, так что $x \in B_j$; поэтому $x \in \bigcap_{j \in J} B_j = B \cup (\mathfrak{P}(X) \setminus X)$. Поскольку $x \in X$, то $x \notin \mathfrak{P}(X) \setminus X$, а потому $x \in B$; итак, $V \subset B$.

Следовательно, $A < B$, так что $< = (<_*)^b|X$.

5) Утверждение вытекает из 1) и 3).

Замечание. Доказательство предложения 15.1. можно значительно сократить следующим образом. Будем условно считать, что запись $<^a$ обозначает любую из записей $<^q, <^p, <^c, <^b, <^s$. Тогда $<(\lambda)^a|X = (<_*|X)^a = <^a = <$.

Предложение 15. 2. Пусть $<$ — произвольный полутопогенный порядок на классе $X \neq \emptyset$. Верны следующие утверждения:

- 1) если $< = <^q$, то $(<_\lambda)^q|X = <$;
- 2) если $< = <^p$, то $(<_\lambda)^p|X = <$;
- 3) если $< = <^c$, то $(<_\lambda)^c|X = <$;
- 4) если $< = <^b$, то $(<_\lambda)^b|X = <$;
- 5) если $< = <^s$, то $(<_\lambda)^s|X = <$.

Предложение 15.3. Для каждого полутопогенного порядка $<$ на классе $X \neq \emptyset$ верны следующие утверждения:

- 1) если $< = <^q$, то $(<_\psi)^q|X = <$;
- 2) если $< = <^p$, то $(<_\psi)^p|X = <$;
- 3) если $< = <^c$, то $(<_\psi)^c|X = <$;
- 4) если $< = <^b$, то $(<_\psi)^b|X = <$;
- 5) если $< = <^s$, то $(<_\psi)^s|X = <$.

Предложение 16. Пусть S — полусинтопогенная структура на классе $X \neq \emptyset$. Тогда имеют место следующие факты:

- 1) если S — синтопогенная, то $(S_\times)^q$ соответственно, $(S_\lambda)^q$, $(S_\psi)^q$ — слабая среди тех синтопогенных структур на $\mathfrak{P}(X)$, которые сильнее структуры $S_\times$ (соответственно, S_λ , S_ψ); при этом: $(S_\times)^q|X = (S_\lambda)^q|X = (S_\psi)^q|X = S$;
- 2) если S — совершенная, то $(S_\lambda)^p$ — такая же;
- 3) если S — симметричная, то $(S_\lambda)^c$ — симметрична;
- 4) если S — бисовершенная, то $(S_\lambda)^b$ — бисовершенная;
- 5) если S — топогенная и симметричная, то такова же и $(S_\lambda)^s$.

Следствия:

1. Если $S = \{<\}$ — топология на классе $X \neq \emptyset$, то $\{<_\times\}^{qp}$ (соответственно, $\{<_\lambda\}^q$, $\{<_\psi\}^{qp}$) — слабая из всех тех топологий на классе $\mathfrak{P}(X)$, которые сильнее структуры $\{<_\times\}$ (соответственно, $\{<_\lambda\}$, $\{<_\psi\}$); при этом $\{<_\times\}^{qp}|X = \{<_\lambda\}^q|X = \{<_\psi\}^{qp}|X = S$.

2. Если $S = \{<\}$ — структура близости на классе $X \neq \emptyset$, то $\{<_\times\}^{qc}$ (соответственно, $\{<_\lambda\}^{qc}$, $\{<_\psi\}^q$) — слабая из всех тех структур близости на классе $\mathfrak{P}(X)$ которые сильнее структуры $\{<_\times\}$ (соответственно, $\{<_\lambda\}$, $\{<_\psi\}$); при этом

$$\{<_\times\}^{qc}|X = \{<_\lambda\}^{qc}|X = \{<_\psi\}^q|X = S.$$

3. Если S — равномерная структура на классе $X \neq \emptyset$, то $S_\times^{bc}$ (соответственно, S_λ^{bc} , S_ψ^b) — слабая из всех тех равномерных структур на классе $\mathfrak{P}(X)$, которые сильнее структуры $S_\times$ (соответственно, S_λ , S_ψ); при этом

$$S_\times^{bc}|X = S_\lambda^{bc}|X = S_\psi^b|X = S.$$

4. Пусть S — равномерная структура на классе $X \neq \emptyset$. Тогда структура близости, выводимая из равномерной структуры $S_\times^{bc}$ (соответственно, S_λ^{bc} , S_ψ^b) на классе $\mathfrak{P}(X)$, совпадает со структурой близости $((S^{tq})_\times)^{qc}$ соответственно, $((S^t)_\lambda)^{qc}$, $((S^t)_\psi)^q$, получающейся описанным образом из структуры близости S^{tq} , выводимой из структуры S на классе X .

5. Пусть S — структура близости на классе $X \neq \emptyset$. Тогда топология $(S_\lambda)^{pq}$, выводимая из структуры близости $(S_\lambda)^{qc}$ на классе $\mathfrak{P}(X)$, совпадает с топологией $(S^{pq})_\lambda$, получающейся описанным образом на классе $\mathfrak{P}(X)$ из топологии S^{pq} на классе X .

6. Пусть S — равномерная структура на классе $X \neq \emptyset$. Тогда топология $((S_\lambda)^{qc})^{tqp}$ на классе $\mathfrak{P}(X)$, выводимая из равномерной структуры $(S_\lambda)^{bc}$, совпадает с топологией $(S^{tqp})_\lambda$, получающейся описанным образом из топологии S^{tqp} , выводимой из равномерной структуры S на классе X .

Указание. Доказательство сформулированных результатов достаточно элементарно, а потому здесь не приводится.

Определение 2. Гиперпродолжение $<^*$ полутопогенного порядка $<$ назовём согласованным, если $<^*$ обладает всеми теми свойствами, что и $<$.

Например: 1) гиперпродолжение $<_\lambda$ (соответственно, $<_\psi$) совершенного (соответственно, симметричного) полутопогенного порядка является согласованным;

2) гиперпродолжение $<_*$ топогенного порядка $<$ не является согласованным.

Определение 3. Полусинтопогенную структуру S^* на классе $\mathfrak{P}(X)$ назовём гиперпродолжением полусинтопогенной структуры S , определённой на классе $X \neq \emptyset$, если $S^*|X = S$. Будем говорить, что гиперпродолжение S^* согласовано, если S^* обладает всеми теми же свойствами, что и S . Полусинтопогенное пространство $[\mathfrak{P}(X); S^*]$ будем называть (согласованным) гиперпространством для полусинтопогенного пространства $[X, S]$, если S^* является (согласованным) гиперпродолжением структуры S .

Например: 1) если $[X; \{<\}]$ — топологическое пространство, то его согласованными гиперпространствами будут $[\mathfrak{P}(X); \{<_*\}^{qp}]$, $[\mathfrak{P}(X); \{<_\lambda\}^{qp}]$, $[\mathfrak{P}(X); \{<_\psi\}^{qp}]$;

2) если $[X; \{<\}]$ — пространство близости, то его согласованными гиперпространствами являются

$$[\mathfrak{P}(X); \{<_*\}^{qc}], [\mathfrak{P}(X); \{<_\lambda\}^{qc}], [\mathfrak{P}(X); \{<_\psi\}^q];$$

3) если $[X; S]$ — равномерное пространство, то его согласованными гиперпространствами являются $[\mathfrak{P}(X); S_*^{bc}]$, $[\mathfrak{P}(X); S_\lambda^{bc}]$, $[\mathfrak{P}(X); S_\psi^b]$.

Из приведенных примеров видно, что одно и то же полусинтопогенное пространство может иметь несколько гиперпространств, получаемых различными процедурами.

Соглашение. Условимся писать $[\mathfrak{P}(X); \xi S]$ и $[\mathfrak{P}(Y); \xi \gamma]$, если эти гиперпространства для (соответственно) пространств $[X; S]$ и $[Y; \gamma]$ получаются некоторой единообразной процедурой (что подчёркивается использованием одной и той же буквы ξ). С этой точки зрения гиперпространства $[\mathfrak{P}(X); \xi S]$ и $[\mathfrak{P}(X); \eta S]$ являются, вообще говоря, различными, поскольку получены различными процедурами.

Как известно, каждое многозначное отображение $f: X \rightarrow Y$ порождает однозначное отображение $\hat{f}: \mathfrak{P}(X) \rightarrow \mathfrak{P}(Y)$, определяемое правилом: $(A) \rightarrow (f(A))$, если $(A) \in \mathfrak{P}(X)$, и называемое гиперпродолжением отображения f .

Определение 4. Многозначное отображение $f: [X, S] \rightarrow [Y; \gamma]$ будем называть $\langle \xi S; \xi \gamma \rangle$ -непрерывным, если однозначное отображение $\hat{f}|_X$ является $(S; \xi \gamma)$ -непрерывным.

Предложение 17. Если многозначное отображение $f: [X, S] \rightarrow [Y; \gamma]$ является $\langle \xi S; \xi \gamma \rangle$ -непрерывным, то оно и $\langle \xi S; \xi \gamma \rangle$ -непрерывно.

В самом деле, $\hat{f}|_X = \hat{f} \circ i_X$, а оба отображения, составляющие композицию, непрерывны.

Предложение 18. Для того, чтобы из $\langle \xi S; \xi \gamma \rangle$ -непрерывности многозначного отображения $f: [X; S] \rightarrow [Y; \gamma]$ вытекала его $(\xi S; \xi \gamma)$ -непрерывность, достаточно выполнения следующего условия: каждому полутопогенному порядку $< \in S$ соответствует такой полутопогенный порядок $<_1 \in S$, что из каждого соотношения $\mathfrak{A} \xi < \mathfrak{B}$ следует соотношение

$$\overset{-1}{f}(\mathfrak{A}) \cup \mathfrak{A}_1 \xi \overset{-1}{f}(\mathfrak{B}) \cup \mathfrak{B}_1;$$

здесь обозначено $\overset{-1}{f} = \hat{f}|X$,

$$\mathfrak{A}_1 = \{t: t \in \mathfrak{P}(X) \& \neg(\exists z)(z \in X \& t = \{z\}) \& (f(t) \in \mathfrak{A})\},$$

$$\mathfrak{B}_1 = \{t: t \in \mathfrak{P}(X) \& \neg(\exists z)(z \in X \& t = \{z\}) \& (f(t) \in \mathfrak{B})\}.$$

Непустота класса отображений, удовлетворяющих предложению 18, устанавливается предложениями 19—21, идея доказательства которых принадлежит Р. С. Линичуку. (см. [4]).

Предложение 19. Пусть $[Y; \{<\}]$ и $[Y; \{<_1\}]$ — топологические пространства, а $f: X \rightarrow Y$ многозначное отображение. Если отображение $\overset{-1}{f}$ является $(\{<\}; \{<_{1*}\}^{qp})$ -непрерывным, то отображение $\hat{f} — (\{<_*\}^{qp}; \{<_{1*}\}^{qp})$ -непрерывно.

Доказательство. Поскольку все фигурирующие здесь структуры состоят из единственных совершенных топогенных порядков, то никакого выбора этих порядков устанавливать не придётся. Далее, используя совершенность порядков, можно дело свести к рассмотрению лишь локального случая.

Пусть (A_0) — произвольная точка класса $\mathfrak{P}(X)$, а V — любая (в принципе, выбранная и зафиксированная) окрестность точки $\hat{f}(A_0)$. По условию, найдётся такая часть B класса X , что $A_0 < B$ и $B \subset \overset{-1}{f}(V)$. Класс $U = \{(W): W \subset B\}$ является такой окрестностью точки (A_0) , что $U \subset \overset{-1}{\hat{f}}(V)$.

Предложение 20. Пусть $[X; \{<\}]$ и $[Y; \{<_1\}]$ — топологические пространства, $f: X \rightarrow Y$ — многозначное отображение. Если отображение $\overset{-1}{f}$ является $(\{<\}, \{<_{1\lambda}\}^q)$ -непрерывным, то отображение $\hat{f} — (\{<\}^q, \{<_{1\lambda}\}^q)$ -непрерывно.

Предложение 21. Пусть $[X; \{<\}]$ и $[Y; \{<_1\}]$ — топологические пространства, $f: X \rightarrow Y$ — многозначное отображение. Если отображение f является $(\{<\}, \{<_{1\psi}\}^{qp})$ -непрерывным, то отображение $\hat{f} — (\{<_\psi\}^{qp}, \{<_{1\psi}\}^{qp})$ -непрерывно.

Предложение 22.1. Если однозначное отображение $f: [X; S] \rightarrow [Y; \gamma]$ $(S; \gamma)$ -непрерывно, то отображение $\hat{f}$ является $(S_*; \gamma_*)$ -непрерывным.

Доказательство. Полутопогенный порядок $<_* \in \gamma_*$ определяется заданием полутопогенного порядка $< \in \gamma$, для которого, в силу $(S; \gamma)$ -непрерывности отображения f , можно подобрать полутопогенный порядок $<_1 \in S$,

мажорирующий полутопогенный порядок $\bar{f}^1(<)$. Остаётся показать, что полутопогенный порядок $<_{1*}$ мажорирует полутопогенный порядок $\bar{f}^1(<_{1*})$.

Если $\mathfrak{A}_1 \bar{f}^1(<_{1*}) \mathfrak{B}_1$, то существуют такие части $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ класса $\mathfrak{P}(Y)$, что $\mathfrak{A} <_{1*} \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}_1 \subset \bar{f}^1(\mathfrak{A})$, $\bar{f}^1(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{B}_1$. Согласно определению полутопогенного порядка $<_{1*}$, найдутся такие части U и V класса Y , что: $U < V$, $\mathfrak{A} \subset \{(W): W \subset U\}$, $\{(W): W \subset V\} \subset \mathfrak{B}$. Положив $U_1 = \bar{f}^1(U)$, $V_1 = \bar{f}^1(V)$, найдём $U_1 <_1 V_1$; поэтому $\mathfrak{A}_2 <_{1*} \mathfrak{B}_2$, где $\mathfrak{A}_2 = \{(W): W \subset U_1\}$, $\mathfrak{B}_2 = \{(W): W \subset V_1\}$. Покажем, что $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{B}_2 \subset \mathfrak{B}_1$; вместе с этим будет доказано, что $\mathfrak{A}_1 <_{1*} \mathfrak{B}_1$.

Если $t \in \mathfrak{A}_1$, то $t \in \bar{f}^1(\mathfrak{A})$, а потому $\hat{f}(t) \in \mathfrak{A}$ и $\hat{f}(t) \subset U$; отсюда $\bar{f}^1(\hat{f}(t)) \subset U_1$. Поскольку $t \subset \bar{f}^1(\hat{f}(t))$, то $t \in U_1$ и $t \in \mathfrak{A}_2$.

Если $t \in \mathfrak{B}_2$, то $t \subset V_1$, а потому $t \subset \bar{f}^1(V)$ и $f(t) \subset f(\bar{f}^1(V))$; поскольку $f(\bar{f}^1(V)) \subset V$, то $f(t) \subset V$. В таком случае имеем $f(t) \in \mathfrak{B}$; затем: $\bar{f}^1(f(t)) \in \bar{f}^1(\mathfrak{B})$. Отсюда $\bar{f}^1(f(t)) \in \mathfrak{B}_1$ и $t \in \mathfrak{B}_1$.

Предложение 22.2. Если однозначное отображение $f: [X; S] \rightarrow [Y; \gamma]$ (S, γ)-непрерывно, то отображение $\hat{f}: \mathfrak{P}(X) \rightarrow \mathfrak{P}(Y)$ является $(S_\lambda, \gamma_\lambda)$ -непрерывным.

Предложение 22.3. Если однозначное отображение $f: [X; S] \rightarrow [Y; \gamma]$ (S, γ)-непрерывно, то отображение $\hat{f}: \mathfrak{P}(X) \rightarrow \mathfrak{P}(Y)$ является (S_ψ, γ_ψ) -непрерывным.

Предложение 23. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — некоторое многозначное отображение, являющееся $\langle \xi S_i; \xi \gamma_i \rangle$ -непрерывным, $i=1, 2$. Если положить $S = S_1 \vee S_2$ и $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$, то f окажется $\langle \xi S; \xi \gamma \rangle$ -непрерывным.

Замечание. Напомним, что полусинтопогенная структура $S_1 \vee S_2$ получается путём всевозможных конечных объединений полутопогенных порядков из обеих этих структур.

Литература

- [1] В. В. Маслов, Полусинтопогенные пространства, Уч. записки МГПИ им. В. И. Ленина, No 277, М., 1970.
- [2] A. Császár, Grundlagen der Allgemeinen Topologie. Akadémiai Kiadó Budapest 1963.
- [3] E. MICHAEL, Topologies on Spaces of Subsets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **71** (1951) 152—182.
- [4] Р. С. Линичук, Многозначные отображения и непрерывность разбиений топологических пространств. — *Десятая матем. школа*, К., Изд-во ин-та матем-ки АН УССР, 1974, с. 308—329.

(Поступило 15. 2. 1981.)