

Идемпотентные элементы в ассоциативных тройных системах

В. РАМАСВАМИ (ИНБЮ ДЕЛИ)

В этой статье, определим идемпотентный элемент в ассоциативной тройной системе и докажем, что E' , множество всех классов эквивалентности, является Булевой алгеброй если T содержит обратимый идемпотент.

Модуль T вместе с трилинейным отображением

$$T \times T \times T \rightarrow T$$
$$(x, y, z) \mapsto \langle x, y, z \rangle$$

Называется *тройной системой*.

Тройная система T называется *ассоциативной* если

$$(1) \quad \langle \langle x, y, z \rangle, u, v \rangle = \langle x, \langle y, z, u \rangle, v \rangle = \langle x, y, \langle z, u, v \rangle \rangle.$$

для всех $x, y, z, u, v \in T$.

Элемент e называется *идемпотентным элементом* если $e^3 = \langle e, e, e \rangle = e$.

Пусть T ассоциативная тройная система. Обозначим через E множество всех идемпотентных элементов в T . Определим в E отношение $\sim$ следующим образом. $e \sim f$ тогда и только тогда $\langle e, e, f \rangle = \langle f, e, e \rangle = f$ и $\langle f, f, e \rangle = \langle e, f, f \rangle = e$. Тогда имеем:

Лемма 1. $\sim$ отношение эквивалентности в E .

Доказательство. Так как, для любого элемента $e \in E$, $\langle e, e, e \rangle = e$, то $\sim$ рефлексивно. $\sim$ очевидно симметрично. Пусть теперь $e \sim f \cup f \sim g$. Тогда, по определению, имеем:

$$g = \langle f, f, g \rangle = \langle \langle e, e, f \rangle, f, g \rangle = \langle e, \langle e, f, f \rangle, g \rangle = \langle e, e, g \rangle$$

и

$$g = \langle g, f, f \rangle = \langle g, \langle e, e, f \rangle, f \rangle = \langle g, e, \langle e, f, f \rangle \rangle = \langle g, e, e \rangle$$

Точно так же можем доказать, что $e = \langle e, g, g \rangle = \langle g, g, e \rangle$, так что $e \sim g$. Поэтому $\sim$ также транзитивно. Лемма доказана.

Обозначим через E' , множество всех классов эквивалентности. Определим в E' отношение $\cong$ следующим образом: $[f] \cong [g]$ тогда и только тогда, когда $\langle f, g, g \rangle = \langle g, g, f \rangle = f$.

Предложение 2. Отношение $\cong$ частичное упорядочение в E' ,

Доказательство. Так как $\langle f, f, f \rangle = f$ для всех $f \in E$, то $[f] \cong [f]$ для всех $[f] \in E'$. Если $[f] \cong [g]$ и $[g] \cong [f]$, то $\langle f, g, g \rangle = \langle g, g, f \rangle = f$ и $\langle g, f, f \rangle = \langle f, f, g \rangle =$

$=g$. Поэтому, по определению, $f \sim g$ и это доказывает, что $[f]=[g]$. Пусть теперь $[f] \equiv [g]$ и $[g] \equiv [h]$. Тогда $\langle f, g, g \rangle = \langle g, g, f \rangle = f$ и $\langle g, h, h \rangle = \langle h, h, g \rangle = g$, так что

$$\langle f, h, h \rangle = \langle \langle f, g, g \rangle, h, h \rangle = \langle f, g, \langle h, g, h \rangle \rangle = \langle f, g, g \rangle = f.$$

Подобно, предыдущему, $\langle h, h, f \rangle = f$. Поэтому $[f] \equiv [h]$. Предложение доказано.

Сейчас допускаем, что T ассоциативная тройная система, в которой $\langle e, f, f \rangle = \langle f, f, e \rangle$ для всех $e, f \in E$. Если $f, g \in E$, то ясно, что $\langle f, f, g \rangle \in E$ и $f+g - \langle f, f, g \rangle \in E$.

Лемма 3. $[\langle f, f, g \rangle] = [\langle f, g, g \rangle]$ и $[f+g - \langle f, f, g \rangle] = [f+g - \langle f, g, g \rangle]$ для всех $f, g \in E$.

Доказательство. Так как $f^3 = f$, $g^3 = g$, получаем по предположению и по (1), что

$$\begin{aligned} \langle \langle f, f, g \rangle, \langle f, f, g \rangle, \langle f, g, g \rangle \rangle &= \langle \langle f, f, \langle f, f, g \rangle \rangle, g, \langle g, g, f \rangle \rangle = \\ &= \langle \langle f, f, \langle g, g, f \rangle \rangle = \\ &= \langle f, f, \langle f, g, g \rangle \rangle = \langle f, g, g \rangle. \end{aligned}$$

По предположению,

$$\begin{aligned} \langle \langle f, f, g \rangle, \langle f, f, g \rangle, \langle f, g, g \rangle \rangle &= \langle \langle f, f, \langle f, f, g \rangle \rangle, g, \langle f, g, g \rangle \rangle = \\ &= \langle \langle f, f, \langle f, g, g \rangle \rangle, g, g \rangle = \langle f, g, g \rangle. \end{aligned}$$

Точно так же,

$$\langle \langle f, f, g \rangle, \langle f, g, g \rangle, \langle f, g, g \rangle \rangle = \langle \langle f, g, g \rangle, \langle f, g, g \rangle, \langle f, f, g \rangle \rangle = \langle f, f, g \rangle.$$

Следовательно, $\langle f, f, g \rangle \sim \langle f, g, g \rangle$ и поэтому $[\langle f, f, g \rangle] = [\langle f, g, g \rangle]$. Аналогично можем доказать, что $[f+g - \langle f, f, g \rangle] = [f+g - \langle f, g, g \rangle]$.

Полагаем теперь

$$[f] \wedge [g] = [\langle f, f, g \rangle]$$

и

$$[f] \vee [g] = [f+g - \langle f, f, g \rangle].$$

По лемме 3 имеем $[f] \wedge [g] = [\langle f, g, g \rangle] \cup [f] \vee [g] = [f+g - \langle f, g, g \rangle]$.

Лемма 4. $\wedge$ и $\vee$ вполне определены.

Доказательство. Допускаем, что $[f] = [f'] \cup [g] = [g']$. Мы должны доказать, что $[\langle f, f, g \rangle] = [\langle f', f', g' \rangle] \cup [f+g - \langle f, f, g \rangle] = [f'+g' - \langle f', f', g' \rangle]$. Так как, $[f] = [f'] \cup [g] = [g']$, имеем $\langle f, f, f' \rangle = f'$, $\langle f', f', f \rangle = f$, $\langle g, g, g' \rangle = g'$, $\langle g', g', g \rangle = g$. Поэтому, пользуясь предположением и (1), получим

$$\begin{aligned} \langle \langle f, f, g \rangle, \langle f, f, g \rangle, \langle f', f', g' \rangle \rangle &= \langle \langle f, f, \langle f, f, g \rangle \rangle, g, \langle f', f', g' \rangle \rangle = \\ &= \langle \langle f, f, \langle f', g' \rangle \rangle, f, g', g' \rangle = \langle \langle \langle f, f, f' \rangle, g, g \rangle, f', g' \rangle = \\ &= \langle \langle f', g, g \rangle, f', g' \rangle = \langle f', \langle f', g, g \rangle, g' \rangle = \langle f', f', \langle g, g, g' \rangle \rangle = \langle f', f', g' \rangle. \end{aligned}$$

По предположению

$$\begin{aligned} \langle \langle f', f', g' \rangle, \langle f, f, g \rangle, \langle f, f, g \rangle \rangle &= \langle \langle f', f', g' \rangle, \langle g, f, f \rangle, \langle f, f, g \rangle \rangle = \\ &= \langle \langle \langle f', f', g' \rangle, g, f \rangle, f, g \rangle = \langle \langle f', f', g \rangle \langle f, f, g \rangle g \rangle, = \langle \langle f', f \langle f, f, g \rangle \rangle = \langle f', f', g' \rangle. \end{aligned}$$

Подобно предыдущему,

$$\langle \langle f, f, g \rangle, \langle f', f', g' \rangle, \langle f', f', g' \rangle \rangle = \langle \langle f', f', g' \rangle, \langle f', f', g' \rangle, \langle f, f, g \rangle \rangle = \langle f, f, g \rangle.$$

Следовательно, $\langle f, f, g \rangle \sim \langle f', f', g' \rangle$, так что $[\langle f, f, g \rangle] = [\langle f', f', g' \rangle]$. Аналогично можем доказать, что $[f + g - \langle f, f, g \rangle] = [f' + g' - \langle f', f', g' \rangle]$. Лемма доказана.

Предложение 5. $(E', \wedge, \vee)$ — дистрибутивная структура.

Доказательство. Прежде всего, для всех $f, g \in E$, по (1) и по предположению, имеем:

$$\langle \langle f, f, g \rangle, f, f \rangle = \langle f, f, \langle g, f, f \rangle \rangle = \langle f, f, \langle f, f, g \rangle \rangle = \langle f, f, g \rangle.$$

Поэтому $[\langle f, f, g \rangle] \leq [f]$. Так как, очевидно, $\langle \langle f, f, g \rangle, g, g \rangle = \langle f, f, g \rangle$, имеем $[\langle f, f, g \rangle] \leq [g]$. Пусть теперь $[h] \leq [f] \cup [h] \leq [g]$. Докажем, что $[h] \leq [\langle f, f, g \rangle]$. Так как $[h] \leq [f] \cup [h] \leq [g]$, имеем $\langle h, f, f \rangle = \langle h, g, g \rangle = h$ и

$$\begin{aligned} \langle h, \langle f, f, g \rangle, \langle f, f, g \rangle \rangle &= \langle \langle h, f, f \rangle \langle g, f, f \rangle g \rangle = \langle \langle h, f, f \rangle \langle f, f, g \rangle, g \rangle = \\ &= \langle \langle h, f, f \rangle, g, g \rangle = \langle h, g, g \rangle = h \end{aligned}$$

Поэтому $[h] \leq [\langle f, f, g \rangle]$. Таким образом, мы доказали, что $[\langle f, f, g \rangle]$ точная нижняя грань. Точно так же можем доказать, что $[f + g - \langle f, f, g \rangle]$ точная верхняя грань, так что E' -структура. Если теперь $[f], [g], [h] \in E'$, тогда

$$(2) \quad [f] \vee ([g] \wedge [h]) = [f] \vee [\langle g, g, h \rangle] = [f + \langle g, g, h \rangle - \langle f, f, \langle h, g, h \rangle \rangle]$$

Имеем также

$$(3) \quad ([f] \vee [g]) \wedge ([f] \vee [h]) = [f + g - \langle f, f, g \rangle] \wedge [f + h - \langle f, f, h \rangle] = \\ = [\langle f + g - \langle f, f, g \rangle, f + g - \langle f, f, g \rangle, f + h - \langle f, f, h \rangle \rangle].$$

Так как $\langle f, f, g \rangle = \langle g, f, f \rangle$, $f^3 = f$ и $g^3 = g$, то легко проверить, что

$$\langle f + g - \langle f, f, g \rangle, f + g - \langle f, f, g \rangle, f + h - \langle f, f, h \rangle \rangle = f + \langle g, g, h \rangle - \langle f, f, \langle g, g, h \rangle \rangle.$$

Поэтому из (2) и (3) следует, что

$$[f] \vee ([g] \wedge [h]) = ([f] \vee [g]) \wedge ([f] \vee [h]).$$

Предложение доказано.

Идемпотентный элемент e называется *обратимым*, если $\langle e, e, t \rangle = \langle t, e, e \rangle = t$ для всех $t \in T$.

Предложение 6. Если T содержит обратимый идемпотент e , то E' -Булева алгебра.

Доказательство. Нужно доказать, что E' , дистрибутивная структура с дополнением. Согласно предложению 5, E' дистрибутивная структура. Так

как e обратимый идемпотент, то $\langle h, e, e \rangle = h$ для всех $h \in E \cup$, поэтому $[h] \subseteq [e]$ для всех $[h] \in E'$. Таким образом, $[e]$ наибольший элемент в E' . Пусть репер $[f] \in E'$. Нужно найти такой $[g] \in E'$, что $[f] \wedge [g] = [0] \cup [f] \vee [g] = [e]$. Полагаем $g = e - \langle f, f, e \rangle$. Легко проверить, что $g \in E$.

$$\langle f, f, g \rangle = \langle f, f, e - \langle f, f, e \rangle \rangle = \langle f, f, e \rangle - \langle f, f, \langle f, f, e \rangle \rangle = \langle f, f, e \rangle - \langle f, f, e \rangle = 0,$$

так что $[f] \wedge [g] = [0]$. Снова, $[f] \vee [g] = [f + g - \langle f, f, g \rangle] = [f + g]$ поскольку $\langle f, f, g \rangle = 0$. Так как e -обратимый идемпотент, то $\langle f + g, e, e \rangle = f + g$ и легко проверить, что $\langle f + g, f + g, e \rangle = e$. Поэтому $f + g \sim e \cup [f + g] = [e]$, так что $[f] \vee [g] = [f + g] = [e]$. Таким образом, E' Булева алгебра.

Пусть теперь e , такой элемент в T , что $\langle e, t, e \rangle = t$ для всех $t \in T$. Очевидно e , обратимый идемпотент в T . Пусть e_1 произвольный идемпотент в T . Имеем

$$\langle e, e, e_1 \rangle = \langle e, \langle e_1, e_1, e \rangle e_1 \rangle = \langle e, e_1, \langle e_1, e, e_1 \rangle \rangle = \langle e, e_1, e \rangle.$$

Подобно $\langle e, e, e_1 \rangle = \langle e_1, e, e \rangle$. Теперь

$$\begin{aligned} \langle \langle e, e, e_1 \rangle, \langle e, e, e_1 \rangle, \langle e, e, e_1 \rangle \rangle &= \langle \langle e_1, e, e \rangle \langle e, e, e_1 \rangle, \langle e, e, e_1 \rangle \rangle = \\ &= \langle \langle e_1, e, e \rangle e_1 \langle e, e, e_1 \rangle \rangle = \langle e_1, \langle e_1, e, e \rangle \langle e, e, e_1 \rangle \rangle = \langle \langle e_1, e_1, e \rangle e, e_1 \rangle = \\ &= \langle e_1, e_1, \langle e, e, e_1 \rangle \rangle = \langle e, e, e_1 \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, $\langle e, e, e_1 \rangle$ идемпотент в T . Далее, легко проверить, что $e_1 - \langle e, e, e_1 \rangle$ тоже идемпотент в T . Полагаем теперь,

$$\begin{aligned} T_{11} &= \langle \langle e, e, e_1 \rangle, T, \langle e, e, e_1 \rangle \rangle \\ T_{10} &= \langle \langle e, e, e_1 \rangle T, e_1, -\langle e, e, e_1 \rangle \rangle \\ T_{01} &= \langle e_1, -\langle e, e, e_1 \rangle T, \langle e, e, e_1 \rangle \rangle \\ T_{00} &= \langle e_1, -\langle e, e, e_1 \rangle, T, e_1, -\langle e, e, e_1 \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Предложение 7. Пусть $T = T_{11} \oplus T_{10} \oplus T_{01} \oplus T_{00}$. Если e такой идемпотент, что $\langle e, e, t \rangle = \langle t, e, e \rangle$ для всех $t \in T$, то T_{11} и T_{00} идеалы в T .

Доказательство. Если $x \in T$, то легко проверить, что

$$\begin{aligned} x &= \langle \langle e, e, e_1 \rangle x, \langle e, e, e_1 \rangle \rangle + \langle \langle e, e, e_1 \rangle x, e_1 - \langle e, e, e_1 \rangle \rangle + \\ &+ \langle e_1 - \langle e, e, e_1 \rangle, x, \langle e, e, e_1 \rangle \rangle + \langle e_1 - \langle e, e, e_1 \rangle, x, e_1 - \langle e, e, e_1 \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Поэтому $x \in T_{11} + T_{10} + T_{01} + T_{00}$, так что $T = T_{11} + T_{10} + T_{01} + T_{00}$. Пусть теперь $\langle \langle e, e, e_1 \rangle, t, \langle e, e, e_1 \rangle \rangle = \langle \langle e, e, e_1 \rangle t, e_1 - \langle e, e, e_1 \rangle \rangle \in T_{11} \cap T_{10} \langle (t, t_1, \in T) \rangle$.

Тогда

$$\begin{aligned} \langle \langle \langle e, e, e_1 \rangle t, \langle e, e, e_1 \rangle \rangle e_1, \langle e, e, e_1 \rangle \rangle &= \langle \langle \langle e, e, e_1 \rangle t, e_1, -\langle e, e, e_1 \rangle \rangle e_1, \langle e, e, e_1 \rangle \rangle = \\ &= \langle \langle e, e, e_1 \rangle t_1, \langle e_1, -\langle e, e, e_1 \rangle e_1, \langle e, e, e_1 \rangle \rangle = \langle \langle e, e, e_1 \rangle t_1, \langle e_1, e_1, \langle e, e, e_1 \rangle \rangle - \\ &- \langle \langle e, e, e_1 \rangle e, \langle e, e, e \rangle \rangle = \langle \langle e, e, e \rangle t, \langle e, e, \langle e, e, e \rangle \rangle - \langle \langle e, e, e_1 \rangle e_1, \langle e, e, e_1 \rangle \rangle = \\ &= \langle e, e, e_1 \rangle t, \langle e, e, e_1 \rangle - \langle e, e, e_1 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$0 = \langle\langle\langle e, e, e_1 \rangle t, \langle e, e, e_1 \rangle \rangle e, \langle e, e, e_1 \rangle \rangle = \langle\langle e, e, e_1 \rangle t, \langle\langle e, e, e_1 \rangle e_1 \langle e, e, e_1 \rangle \rangle \rangle = \\ = \langle\langle e, e, e_1 \rangle t, \langle\langle e, e \langle e_1, e_1, e \rangle \rangle e, e_1 \rangle \rangle = \langle\langle e, e, e_1 \rangle t, \langle e, e, e_1 \rangle \rangle$$

Таким образом, мы доказали, что $T_{11} \cap T_{10} = (0)$. Точно так же можем показать что $T_{ij} \cap T_{kl} = (0)$, если $i \neq k$ или $j \neq l$. Поэтому $T = T_{11} \oplus T_{10} \oplus T_{01} \oplus T_{00}$.

Теперь допускаем, что e такой идемпотент в T что $\langle e, e, t \rangle = \langle t, e, e \rangle$ для всех $t \in T$. Так как $\langle e_1, t, e_1 \rangle = t$ для всех $t \in T$, имеем для всех $t_1, t_2 \in T$,

$$\langle e_1, t_1, t_2 \rangle = \langle e_1, \langle e_1, t_1, e_1 \rangle t_2 \rangle = \langle\langle e_1, e_1, t_1 \rangle e_1, t_2 \rangle = \langle t_1, e_1, t_2 \rangle.$$

Подобно предыдущему, $\langle t_1, e_1, t_2 \rangle = \langle t_1, t_2, e_1 \rangle$. Поэтому для $t_1, t_2 \in T$, имеем

$$\langle\langle e, e, e_1 \rangle t, t_2 \rangle = \langle e, e \langle t_1, t_2, e \rangle \rangle = \langle\langle t, e, e \rangle, t_2, e \rangle = \langle t_1, \langle e, e, t_2 \rangle e_1 \rangle = \\ = \langle t_1, \langle t_2, e, e_1 \rangle e_1 \rangle = \langle t_1, t_2, \langle e, e, e_1 \rangle \rangle.$$

Пусть теперь $\langle\langle e, e, e_1 \rangle t, \langle e, e, e_1 \rangle \rangle \in T_{11}$, тогда

$$\langle\langle\langle e, e, e_1 \rangle t \langle e, e, e_1 \rangle \rangle t_1, t_2 \rangle = \langle\langle e, e, e_1 \rangle t, \langle\langle e, e, e_1 \rangle t_1, t_2 \rangle \rangle = \\ = \langle\langle e, e, e_1 \rangle t, \langle t_1, t_2 \langle e, e, e_1 \rangle \rangle \rangle = \langle\langle e, e, e_1 \rangle \langle t, t_1, t_2 \rangle \langle e, e, e_1 \rangle \rangle$$

Таким образом $\langle\langle\langle e, e, e_1 \rangle t, \langle e, e, e_1 \rangle \rangle, t_1, t_2 \rangle = \langle\langle e, e, e_1 \rangle, \langle t, t_1, t_2 \rangle, \langle e, e, e_1 \rangle \rangle \in T_1$ и это показывает что $\langle T_{11}, T, T \rangle \subseteq T_{11}$. Точно так же можем показать что $\langle T, T_{11}, T \rangle \subseteq T_{11}$ и $\langle T, T, T_{11} \rangle \subseteq T_{11}$, так что T_{11} идеал в T .

Теперь докажем что T_{00} идеал в T . Пусть $t, t_1, t_2 \in T$. Тогда

$$\langle\langle e_1 - \langle e, e, e_1 \rangle t, e_1 - \langle e, e, e_1 \rangle \rangle t_1, t_2 \rangle = \langle e_1 - \langle e, e, e_1 \rangle \langle t, e_1 \langle e, e, e_1 \rangle t_1 \rangle t_2 \rangle = \\ = \langle e_1 - \langle e, e, e_1 \rangle \langle t, e_1, t_1 \rangle t_2 \rangle - \langle e_1 - \langle e, e, e_1 \rangle \langle t, \langle e, e, e_1 \rangle t_1 \rangle t_2 \rangle = \\ = \langle e_1 - \langle e, e, e_1 \rangle \langle t, t_1, e_1 \rangle t_2 \rangle - \langle e, \langle e, e, e_1 \rangle, \langle t, e, e \rangle, \langle t_1, t_2, e_1 \rangle \rangle = \\ = \langle e, -\langle e, e, e_1 \rangle, t, \langle t_1, t_2, e \rangle \rangle - \langle\langle e - \langle e, e_1, e_1 \rangle t, \langle t_1 e, e \rangle \rangle t_2, e_1 \rangle = \\ = \langle e_1 - \langle e, e, e_1 \rangle \langle t, t_1, t_2 \rangle e_1 \rangle - \langle\langle e_1 - \langle e, e, e_1 \rangle t, t \rangle \langle t_2, e, e \rangle e_1 \rangle = \\ = \langle e_1 - \langle e, e, e_1 \rangle \langle t, t_1, t_2 \rangle, e, -\langle e, e, e_1 \rangle \rangle \in T_{00}.$$

Таким образом $\langle T_{00}, T, T \rangle \subseteq T_{00}$. Подобным образом имеем $\langle T, T_{00}, T \rangle \subseteq T_{00}$ и $\langle T, T, T_{00} \rangle \subseteq T_{00}$, так что T_{00} тоже является идеалом в T .

Предложение 8. $T = T_{11} \oplus T_{00}$ Тогда и только тогда $\langle e, e, t \rangle = \langle t, e, e \rangle$ для всех $t \in T$.

Доказательство. Если $T = T_{11} \oplus T_{00}$, то $T_{10} = T_{01} = (0)$. Так что для $t \in T$ имеем $\langle\langle e, e, e_1 \rangle t, e_1 - \langle e, e, e_1 \rangle \rangle = 0$ и поэтому

$$(4) \quad \langle\langle e, e, e_1 \rangle, t, e_1 \rangle = \langle\langle e, e, e_1 \rangle, t, \langle e, e, e_1 \rangle \rangle$$

Так как $t = \langle e_1, t, e_1 \rangle$, по (1) и по (4), получим

$$\langle e, e, t \rangle = \langle e, e, \langle e_1, t, e_1 \rangle \rangle = \langle\langle e, e, e_1 \rangle, t, e_1 \rangle = \langle\langle e, e, e_1 \rangle t, \langle e, e, e_1 \rangle \rangle = \\ = \langle e, e, \langle e_1 \langle t, e, e \rangle, e_1 \rangle \rangle = \langle e, e, \langle t, e, e \rangle \rangle.$$

Так как $T_{01}=(0)$, $\langle e_1 - \langle e, e, e_1 \rangle, t, \langle e, e, e_1 \rangle \rangle = 0$ то

$$(5) \quad \langle et\langle eee \rangle \rangle = \langle \langle eee \rangle t\langle eee \rangle \rangle$$

По (5) имеем

$$\begin{aligned} \langle t, e, e \rangle &= \langle e_1 \langle t, e, e \rangle e_1 \rangle = \langle e_1, t, \langle e, e, e_1 \rangle \rangle = \langle \langle e, e, e_1 \rangle, t, \langle e, e, e_1 \rangle \rangle = \\ &= \langle e, e, \langle e_1 \langle t, e, e \rangle e_1 \rangle \rangle = \langle e, e, \langle t, e, e \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что $\langle e, e, t \rangle = \langle e, e, \langle t, e, e \rangle \rangle = \langle t, e, e \rangle$ для всех $t \in T$.

Обратно, мы допускаем что $\langle e, e, t \rangle = \langle t, e, e \rangle$ для всех t и пусть $\langle \langle e, e, e_{10} \rangle, e_1 - \langle e, e, e_1 \rangle \in T_{10} \rangle$, где $t \in T$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \langle \langle e, e, e_1 \rangle t, e_1 - \langle e, e, e_1 \rangle \rangle &= \langle \langle e, e, e_1 \rangle t, e_1 \rangle - \langle \langle e, e, e_1 \rangle t, \langle e, e, e_1 \rangle \rangle = \\ &= \langle e, e, t \rangle - \langle e, e, \langle e \langle t, e, e \rangle e_1 \rangle \rangle = \langle e, e, t \rangle - \langle e, e, \langle t, e, e \rangle \rangle = \langle e, e, t \rangle - \langle e, e \langle e, e, t \rangle \rangle = 0 \end{aligned}$$

(так как $e^3=e$). (по предположению)

Таким образом $T_{10}=(0)$. Подобно имеем $T_{01}=(0)$. Предложение доказано.

Литература

KURT MEYBERG: Lectures on Algebras and triple systems, *Lecture Notes, University of Virginia*, 1972

АДРЕС:
НЬЮ ДЕЛИ - 110 016
7, С. ДЖ. С. САНСАНВАЛ МАРГ,
ИНДИАНСКИЙ СТАТИСТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ,
В. РАМАСВАМИ.

ADDRESS:
V. RAMASWAMY,
INDIAN STATISTICAL INSTITUTE
7, S. J. S. SANSANWAL MARG,
NEW DELHI — 110 014, INDIA.

(Поступило 27. V. 1983.)