

Champs presque F -principaux

Par LIVIU NICOLESCU (Bucarest)

Dans cette article on introduit les champs presque F -principaux dans l'algèbre associée à un champ tensoriel de type $(1, 2)$ (§ 1). Dans le § 2 on introduit les connexions presque F -principales. Dans le dernier paragraphe on met en évidence une propriété des hypersurfaces sphérique.

§ 0. Introduction

Soit M une variété C^∞ -différentiable et à n dimensions. On note par $\mathcal{F}(M)$ -l'anneau des fonctions réelles de classe C^∞ sur M et par $\mathcal{T}_s^r(M)$ -le $\mathcal{F}(M)$ -module des champs de tenseurs de type (r, s) sur M . Particulièrement, pour $\mathcal{T}_0^1(M)$, resp. $\mathcal{T}_1^0(M)$, on utilise de même la notation $\mathcal{X}(M)$, resp. $\wedge^1(M)$.

Considérons un champ tensoriel $A \in \mathcal{T}_2^1(M)$. Si l'on définit le produit de deux champs de vecteurs $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ par la formule $X \circ Y = A(X, Y)$, alors $\mathcal{X}(M)$ devient une $\mathcal{F}(M)$ -algèbre. Cette algèbre s'appelle l'algèbre associée à A et sera notée par $\mathcal{U}(M, A)$ [5].

§ 1. Champs presque F -principaux

Soient $A \in \mathcal{T}_2^1(M)$ et $F \in \mathcal{T}_1^1(M)$.

Définition 1.1. Un champ $X \in \mathcal{X}(M)$ s'appelle champ presque F -principal dans l'algèbre $\mathcal{U}(M, A)$ s'il existe deux 1-formes $\omega, \eta \in \wedge^1(M)$ telle que:

$$(1.1) \quad A(Z, X) = \omega(Z)X + \eta(Z)F(X), \quad (\forall) Z \in \mathcal{X}(M).$$

Remarque 1.2.

1.2.1. Si $\eta=0$ et $\omega=0$, alors (1.1) nous montre que X est un champ spécial dans l'algèbre $\mathcal{U}(M, A)$ [4].

1.2.2. Si $\eta=0$, alors (1.1) nous montre que X est un champ principal dans l'algèbre $\mathcal{U}(M, A)$ [4].

1.2.3. Si $\omega=0$, alors X est un champ F -principal dans l'algèbre $\mathcal{U}(M, A)$.

1.2.4. Soient $\omega_0, \eta_0 \in \wedge^1(M)$ et soit $P'(M, F)$ l'ensemble des champs presque F -principaux dans l'algèbre $\mathcal{U}(M, A)$. Alors l'ensemble

$$\{X \in P'(M, F): A(Z, X) = \omega_0(Z)X + \eta_0(Z)F(X), \quad (\forall) Z \in \mathcal{X}(M)\}$$

est une $\mathcal{F}(M)$ -sousmodule du module $\mathcal{X}(M)$.

Définition 1.3. Soit $X \in P'(M, F)$. Si les vecteurs X_p et $F_p(X_p)$ sont indépendants pour tout $p \in M$, alors X s'appelle champ presque F -principal de directions. Les trajectoires des champs presque F -principaux de directions sont appelées courbes presque F -principales.

Proposition 1.4. Soit $X \in \mathcal{U}(M, A)$. Supposons que les vecteurs X_p et $F_p(X_p)$ sont indépendants $(\forall) p \in M$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- (i) X est un champ presque F -principal de directions.
- (ii) Pour tout $Z \in \mathcal{X}(M)$ on a la relation:

$$(1.2) \quad \{A(Z, X) \otimes X - X \otimes A(Z, X)\} \otimes \{F(X) \otimes X - X \otimes F(X)\} - \\ - \{F(X) \otimes X - X \otimes F(X)\} \otimes \{A(Z, X) \otimes X - X \otimes A(Z, X)\} = 0.$$

DÉMONSTRATION (i) $\Rightarrow$ (ii) Puisque $X_p \neq 0$, $(\forall) p \in M$, de (1.1) on a:

$$(1.3) \quad A(Z, X) \otimes X = \omega(Z)X \otimes X + \eta(Z)F(X) \otimes X,$$

$$(1.3') \quad X \otimes A(Z, X) = \omega(Z)X \otimes X + \eta(Z)X \otimes F(X).$$

De (1.3) et (1.3') nous obtenons:

$$(1.4) \quad A(Z, X) \otimes X - X \otimes A(Z, X) = \eta(Z)\{F(X) \otimes X - X \otimes F(X)\}.$$

Puisque les vecteurs X_p et $F_p(X_p)$ sont indépendants $(\forall) p \in M$, de (1.4) on a:

$$(1.5) \quad \{A(Z, X) \otimes X - X \otimes A(Z, X)\} \otimes \{F(X) \otimes X - X \otimes F(X)\} = \\ = \eta(Z)\{F(X) \otimes X - X \otimes F(X)\} \otimes \{F(X) \otimes X - X \otimes F(X)\},$$

$$(1.5') \quad \{F(X) \otimes X - X \otimes F(X)\} \otimes \{A(Z, X) \otimes X - X \otimes A(Z, X)\} = \\ = \eta(Z)\{F(X) \otimes X - X \otimes F(X)\} \otimes \{F(X) \otimes X - X \otimes F(X)\}.$$

De (1.5) et (1.5') on obtient (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i) De (1.2) il résulte que les champ $A(Z, X) \otimes X - X \otimes A(Z, X)$ et $F(X) \otimes X - X \otimes F(X)$ sont colinéaires, $(\forall) Z \in \mathcal{X}(M)$. Donc il existe une fonction $h_Z \in \mathcal{F}(M)$ t.q.

$$(1.6) \quad A(Z, X) \otimes X - X \otimes A(Z, X) = h_Z(F(X) \otimes X - X \otimes F(X)), \quad (\forall) Z \in \mathcal{X}(M).$$

Puisque les vecteurs $F_p(X_p)$ et X_p sont indépendants, $(\forall) p \in M$ de (1.6) il résulte:

$$(1.6') \quad h_{Z+V} = h_Z + h_V, \quad (\forall) Z, V \in \mathcal{X}(M),$$

$$(1.6'') \quad h_{uZ} = uh_Z, \quad (\forall) Z \in \mathcal{X}(M), (\forall) u \in \mathcal{F}(M).$$

De (1.6') et (1.6'') nous avons $h_Z = \eta(Z)$, $(\forall) Z \in \mathcal{X}(M)$, où η est une 1-forme sur M . Maintenant la relation (1.6) on écrit:

$$(1.7) \quad \{A(Z, X) - \eta(Z)F(X)\} \otimes X = X \otimes \{A(Z, X) - \eta(Z)F(X)\}.$$

La relation (1.7) nous montre que les champs $A(Z, X) - \eta(Z)F(X)$ et X sont colinéaires, $(\forall) Z \in \mathcal{X}(M)$. Il résulte qu'il existe une fonction $f_Z \in \mathcal{F}(M)$ t.q.

$$(1.7') \quad A(Z, X) - \eta(Z)F(X) = f_Z X, \quad (\forall) Z \in \mathcal{X}(M).$$

Puisque $X_p \neq 0$, $(\forall) p \in M$, de (1.7') on obtient:

$$(1.8) \quad f_{Z+V} = f_Z + f_V, \quad (\forall) Z, V \in \mathcal{X}(M),$$

$$(1.8') \quad f_{uZ} = u f_Z, \quad (\forall) u \in \mathcal{F}(M), (\forall) Z \in \mathcal{X}(M).$$

De (1.8) et (1.8') nous avons $f_Z = \omega(Z)$, $(\forall) Z \in \mathcal{X}(M)$, où ω est une 1-forme sur M . Maintenant la relation (1.7') on écrit:

$$(1.7'') \quad A(Z, X) - \eta(Z)F(X) = \omega(Z)X, \quad (\forall) Z \in \mathcal{X}(M)$$

c'est-à-dire justement (1.1).

Remarque 1.5. Soient A_{jk}^i, F_j^i , resp. X^i les composantes de A, F , resp. X dans un système de coordonnées locales. Alors (1.1) s'écrit:

$$(1.1') \quad A_{ki}^r X^i = \omega_k X^r + \eta_k F_i^r X^i,$$

où ω_k , resp. η_k sont les composantes locales de ω , resp. η . En coordonnées locales la relation (1.5) s'écrit:

$$(1.5') \quad B_{jksmr}^{ihpq} X^k X^s X^m X^r = 0$$

où

$$(1.9) \quad B_{jksmr}^{ihpq} = (A_{jk}^i \delta_s^h - A_{jk}^h \delta_s^i)(\delta_m^p F_r^q - \delta_m^q F_r^p) - (A_{jk}^p \delta_s^q - A_{jk}^q \delta_s^p)(\delta_m^i F_r^h - \delta_m^h F_r^i).$$

En utilisant (1.5') on obtient le système différentiel d'équations des courbes presque F -principales de l'algèbre $\mathcal{U}(M, A)$:

$$(1.10) \quad B_{jksmr}^{ihpq} \frac{dx^k}{dt} \frac{dx^s}{dt} \frac{dx^m}{dt} \frac{dx^r}{dt} = 0.$$

Proposition 1.6. Soient l'algèbre $\mathcal{U}(M, A)$ et le champ tensoriel $F \in \mathcal{T}_1^1(M)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- (i) Tout élément de l'algèbre $\mathcal{U}(M, A)$ est un champ presque F -principal.
- (ii) Il existe deux 1-formes $\omega, \eta \in \wedge^1(M)$ t.q.

$$(1.11) \quad A = \omega \otimes \delta + \eta \otimes F.$$

DÉMONSTRATION. Evidemment.

Définition 1.7. Si tout élément de l'algèbre $\mathcal{U}(M, A)$ est un champ presque F -principal, alors $\mathcal{U}(M, A)$ s'appelle algèbre presque F -principale.

Proposition 1.8. Si $\mathcal{U}(M, A)$ est une algèbre presque F -principale et $\mathcal{U}(M, A)$ est commutative, alors il existe deux 1-formes $\sigma, \Theta \in \wedge^1(M)$ t.q.

$$(1.12) \quad A = \sigma \otimes \delta + \delta \otimes \sigma + \Theta \otimes F + F \otimes \Theta.$$

DÉMONSTRATION. Puisque l'algèbre $\mathcal{U}(M, A)$ est presque F -principale, il existe deux 1-formes $\omega, \eta \in \wedge^1(M)$ t.q. on a (1.11). De (1.11) on obtient pour tout $X, Y \in$

$\in \mathcal{X}(M)$ la relation :

$$(1.11') \quad A(X, Y) + A(Y, X) = \omega(X)Y + \omega(Y)X + \eta(X)F(Y) + \eta(Y)F(X).$$

Puisque $A(X, Y) = A(Y, X)$, $(\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M)$ de (1.11') on obtient (1.12) où $2\sigma = \omega$ et $2\Theta = \eta$.

Définition 1.9. Soit ∇ une connexion linéaire sur M et soit $F \in \mathcal{T}_1^1(M)$. Un élément $X \in \mathcal{X}(M)$ s'appelle champ (∇, F) -recurrent s'il existe $\alpha, \beta \in \wedge^1(M)$ t.q.

$$\nabla_Z X = \alpha(Z)X + \beta(Z)F(X), \quad (\forall) Z \in \mathcal{X}(M).$$

Soit ∇ une connexion linéaire sur M . Considérons les connexions linéaires $\overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla}$ définies par

$$\overset{1}{\nabla} = \nabla - \frac{1}{2}A, \quad \overset{2}{\nabla} = \nabla + \frac{1}{2}A.$$

L'algèbre $\mathcal{U}(M, A)$, où $A = \overset{2}{\nabla} - \overset{1}{\nabla}$, s'appelle l'algèbre de déformation de la paire de connexions $(\overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla})$ [7]. Relatif à la paire $(\overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\nabla})$ on a

Proposition 1.10. Soit $X \in \mathcal{U}(M, A)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) X est un champ presque F -principal et $(\overset{1}{\nabla}, F)$ -recurrent.
- (ii) X est un champ presque F -principal et $(\overset{2}{\nabla}, F)$ -recurrent.
- (iii) X est un champ $(\overset{1}{\nabla}, F)$ -recurrent et $(\overset{2}{\nabla}, F)$ -recurrent.

§ 2. Conexions presque F -principales sur une variété pseudo-riemannienne

Soient (M, g) une variété pseudo-riemannienne à n dimensions, $\Theta \in \wedge^1(M)$ et $F \in \mathcal{T}_1^1(M)$. En tenant compte de [1], [2] on a

Définition 2.1. Une connexion linéaire ∇ sur M s'appelle la connexion de Gołąb associée à (Θ, F) si pour tout $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ on a :

$$(2.1) \quad \nabla_X g = 0 \quad \text{et} \quad T(X, Y) = \Theta(Y)F(X) - \Theta(X)F(Y), \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

où $T \in \mathcal{T}_2^1(M)$ est le champ tensoriel de torsion de ∇ .

Remarque 2.2. Il est connu [1], [2] que étant données une variété pseudo-riemannienne (M, g) , une 1-forme $\Theta \in \wedge^1(M)$ et un champ tensoriel $F \in \mathcal{T}_1^1(M)$, alors il existe une unique connexion de Gołąb associée à (Θ, F) . Si nous notons par $\overset{\circ}{\nabla}$ la connexion de Levi—Civita associée à g , alors la connexion de Gołąb associée à (Θ, F) est donnée par la formule [2]:

$$(2.2) \quad \nabla_X Y = \overset{\circ}{\nabla}_X Y + \Theta(Y)F(X) - S(X, Y)P, \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

où

$$(2.3) \quad g(P, X) = \Theta(X), \quad S(X, Y) = g(F(X), Y), \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Définition 2.3. Soient (M, g) une variété pseudo-riemannienne à n dimensions, $\Theta \in \wedge^1(M)$ et $F \in \mathcal{T}_1^1(M)$. Soit ∇ la connexion de Gôłab associée à (Θ, F) . On dit qu'une connexion linéaire $\bar{\nabla}$ sur M est une connexion presque F -principale si tout élément de l'algèbre $\mathcal{U}(M, \bar{\nabla} - \nabla)$ est un champ presque F -principal.

Remarque 2.4. En utilisant la proposition 1.6 il en résulte que $\bar{\nabla}$ est une connexion presque F -principale si et seulement s'il existe deux 1-formes $\omega, \eta \in \wedge^1(M)$ t.q.

$$(2.4) \quad \bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \omega(X)Y + \eta(X)F(X), \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

De (2.2) et (2.4) on obtient pour tout $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ la formule:

$$(2.5) \quad \bar{\nabla}_X Y = \overset{\circ}{\nabla}_X Y + \omega(X)Y + \Theta(Y)F(X) + \eta(X)F(Y) - S(X, Y)P.$$

Théorème 2.5. Les algèbres $\mathcal{U}(M, \nabla - \overset{\circ}{\nabla})$ et $\mathcal{U}(M, \bar{\nabla} - \overset{\circ}{\nabla})$ ont les mêmes champs presque F -principaux.

DÉMONSTRATION. On note $A = \nabla - \overset{\circ}{\nabla}$, $\bar{A} = \bar{\nabla} - \overset{\circ}{\nabla}$. En utilisant les formules (2.2) et (2.5) on obtient pour tout $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ les relations:

$$(2.2') \quad A(X, Y) = \Theta(Y)F(X) - S(X, Y)P,$$

$$(2.5') \quad \bar{A}(X, Y) = \omega(X)Y + \eta(X)F(Y) + \Theta(Y)F(X) - S(X, Y)P.$$

De (2.2') et (2.5') on a:

$$\bar{A}(X, Y) - A(X, Y) = \omega(X)Y + \eta(X)F(Y), \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

d'où l'on tire facilement le résultat du théorème 2.5.

Exemple 2.6. Soient (M, g) une variété pseudo-riemannienne, $\overset{\circ}{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita associée à g , Ric le champ tensoriel de Ricci, K l'invariant de Ricci. Considérons la 1-forme $\Theta \in \wedge^1(M)$ définie par $\Theta(X) = \overset{\circ}{\nabla}_X K$, $(\forall) X \in \mathcal{X}(M)$ et soit $F \in \mathcal{T}_1^1(M)$ défini par la formule

$$g(F(X), Y) = \text{Ric}(X, Y), \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Alors, la connexion de Gôłab ∇ associée à (Θ, F) est donnée par la formule [2]

$$\nabla_X Y = \overset{\circ}{\nabla}_X Y + \Theta(Y)F(X) - \text{Ric}(X, Y)P, \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

où $g(P, Z) = \omega(Z)$, $(\forall) Z \in \mathcal{X}(M)$.

Soient $\omega, \eta \in \wedge^1(M)$ deux 1-formes arbitraires. Alors la connexion linéaire $\bar{\nabla}$ définie par la formule

$$\bar{\nabla}_X Y = \overset{\circ}{\nabla}_X Y + \omega(X)Y + \Theta(Y)F(X) + \eta(X)F(X) - \text{Ric}(X, Y)P, \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

est une connexion presque F -principale.

§ 3. Une théorème sur les hypersurfaces

Soit M une hypersurfaces dans l'espace euclidien E^{n+1} , où $n \geq 2$. Soit g , resp. b , la première, resp. la deuxième forme fondamentale. Supposons que $\text{rang } b = n$. Soient ∇ et $\bar{\nabla}$ les connexions linéaires associées à g et b . Soit F l'application de Weingarten donnée par :

$$g(X, F(Y)) = g(F(X), Y) = b(X, Y), \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Si nous notons par $A = \bar{\nabla} - \nabla$, alors pour tout $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ nous avons les formules [3], [6] :

$$g(A(X, Y), F(Z)) = g(A(Y, Z), F(X)),$$

$$b(A(X, Y), Z) = -\frac{1}{2}(\nabla_X b)(Y, Z).$$

Proposition 3.1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Tout élément de l'algèbre $\mathcal{U}(M, A)$ est un champ presque F -principal.*
- (ii) *M est une hypersurface sphérique.*

DÉMONSTRATION. (i) $\Rightarrow$ (ii) En utilisant la proposition 1.6 on a :

$$A(X, Y) = \omega(X)Y + \eta(X)F(Y), \quad (\forall) X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Pour $Y = X$ on obtient

$$A(X, X) = \omega(X)X + \eta(X)F(X), \quad (\forall) X \in \mathcal{X}(M)$$

c'est-à-dire l'algèbre $\mathcal{U}(M, A)$ est F -caractéristique. En utilisant [3] (Proposition 4.1) il en résulte que M est une hypersurface sphérique.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Evidemment, si M est une hypersurface sphérique, alors $A = 0$ et pour tout $X \in \mathcal{X}(M)$ on a

$$A(Z, X) = \omega(Z)X + \eta(Z)F(X), \quad (\forall) Z \in \mathcal{X}(M)$$

où $\omega = \eta = 0$. Une conséquence immédiate est :

Proposition 3.2, [6]. *Soit M une hypersurface dans l'espace euclidien E^{n+1} , où $n \geq 2$. Soit g , resp. b , la première, resp. la deuxième forme fondamentale. Supposons que $\text{rang } b = n$. Soient ∇ et $\bar{\nabla}$ les connexions de Levi—Civita associées à g et b . Notons par F l'application de Weingarten et soit $A = \bar{\nabla} - \nabla$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Les ∇ -géodésiques sont $\bar{\nabla}$ -géodésiques.*
- (ii) *Les $\bar{\nabla}$ -géodésiques sont ∇ -géodésiques.*
- (iii) *$\nabla_X b = 0$ pour tout $X \in \mathcal{X}(M)$.*
- (iv) *$\nabla = \bar{\nabla}$.*
- (v) *Tout élément de l'algèbre $\mathcal{U}(M, A)$ est un champ presque F -principal.*
- (vi) *M est une hypersurface sphérique.*

Bibliographie

- [1] S. GOLĂB, On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections, *Tensor, N. S.* **29** (1975), 249—254.
- [2] R. S. MISHRA and S. N. PANDEY, On quarter-symmetric metric F -connections, *Tensor, N. S.*, **34** (1980), 1—7.
- [3] M. MARTIN et L. NICOLESCU, Des courbes (∇, F) -planes, *Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R. S. R.*, **21** (1969), nr. 3—4 (1977), 345—353.
- [4] L. NICOLESCU, Sur la géométrie de l'algèbre associée à un champ tensoriel du type $(1, 2)$, *Tensor, N. S.*, **38** (1982), 235—241.
- [5] L. NICOLESCU et M. MARTIN, Sur l'algèbre associée à un champ tensoriel du type $(1, 2)$, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*, **31** (1—2) (1978), 27—35.
- [6] U. SIMON, On the inner geometry of the second fundamental form, *Michigan J. Math.* **19** (1972), 129—132.
- [7] I. VAISMAN, Sur quelques formules du calcul de Ricci global, *Comm. Math. Helv.* **41** (1966—67), 73—87.

(Reçu le 9 Avril 1984)