

Об одном вычислительном свойстве конечных циклических групповых алгебр и многочленов применительно к теории кодирования

Р. М. АНТОНЯН, А. М. АНТОНЯН (Ереван)

Общепринятый способ задания циклических кодов ([1]) предусматривает наличие так называемого порождающего элемента, который может иметь вид либо многочлена над алфавитом кода, либо идемпотента соответствующей групповой алгебры конечной циклической группы над упомянутым алфавитом. По теории Веддерберна—Артина ([2]) каждый идемпотент классически полупростой (вполне приводимой, полупростой артиновой) алгебры разлагается в сумму неразложимых идемпотентов. Из изложенного следует достаточность задания неразложимых идемпотентов для описания всех идемпотентов классически полупростой алгебры.

§ 1. Прямое вычисление неразложимых идемпотентов

Введем в рассмотрение некоторые объекты, необходимые для дальнейших рассуждений и выводов. Пусть F есть поле из двух элементов, G представляет собой группу нечетного порядка n , $n > 1$, ζ — образующая группы G , а FG — групповая алгебра группы G над полем F . Рассмотрим элемент

$$(1) \quad \zeta^t + \zeta^{2t} + \zeta^{2^2 t} + \dots + \zeta^{2^{r-1} t}$$

алгебры FG , где t есть произвольное натуральное число, причем $2^r t \equiv t \pmod{n}$ и $2^i t \not\equiv t \pmod{n}$ для всех i из множества $\{1, 2, \dots, r-1\}$. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что вышеприведенный элемент является идемпотентом алгебры FG . Ф. Дж. Мак—Вильямс называет такие идемпотенты тривиальными ([3]), однако термин «циклотомические» представляется нам более удачным с точки зрения отражения сущности рассматриваемого объекта.

Множество всех различных идемпотентов вида (1) обозначим через $\{a_i | i \in I\}$, причем $a_0 = 1$. Для дальнейших рассмотрений нам понадобится

Лемма. а) Произвольный идемпотент алгебры FG может быть задан в виде суммы элементов множества $\{a_i | i \in I\}$;

б) любая сумма элементов множества $\{a_i | i \in I\}$ есть некоторый идемпотент алгебры FG .

Доказательство. Каждый элемент алгебры FG может быть записан в виде многочлена $f(\zeta)$ от образующей ζ группы G с коэффициентами из поля F . Если $f(\zeta)$ есть идемпотент алгебры FG , то выполняется соотношение

$$f^2(\zeta) = f(\zeta^2) = f(\zeta)$$

в силу двоичности поля F , то есть, автоморфизм $\zeta \rightarrow \zeta^2$ группы G индуцирует всего лишь перестановку одночленов в многочлене $f(\zeta)$. Отсюда следует, что из присутствия в $f(\zeta)$ одночлена ζ^i вытекает содержание в $f(\zeta)$ одночленов $\zeta^{2^i}, \zeta^{2^{2^i}}, \dots, \zeta^{2^{r-1}i}$, что и завершает доказательство пункта а).

б) Справедливость второй части леммы следует из факта, что сумма любых идемпотентов классически полупростой алгебры снова есть идемпотент этой алгебры.

Хорошо известно ([4]), что классически полупростая групповая алгебра конечной группы G разлагается в прямую сумму одномерного и фундаментального идеалов, причем одномерный идеал порождается идемпотентом

$$(2) \quad \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g,$$

а фундаментальный — идемпотентом, причем фундаментальный идеал состоит из всех элементов, вес Ли ([1]) которых является сравнимым с нулем по модулю характеристики основного поля, а одномерный — из элементов, скалярно кратных (2).

В нашем случае одномерный идеал содержит один единственный ненулевой элемент, то есть (2), а порождающий фундаментальный идеал идемпотент имеет вид

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{n-1} \zeta^i,$$

причем нетрудно видеть, что элемент (3) совпадает с суммой всех элементов множества $\{a_i | i \in I\}$.

Преобразуем множество $\{a_i | i \in I\}$ следующим образом: для каждого $i, i \in I$, обозначим через b_i элемент a_i , если a_i имеет четный вес Хэмминга, либо $\sum_{i=0}^{n-1} \zeta^i + a_i$, в противном случае. Сформулируем основное утверждение этого параграфа.

Теорема 1. Максимальное ненулевое произведение элементов множества $\{b_i | i \in I\}$ есть неразложимый идемпотент алгебры FG .

Доказательство. Легко убедиться в справедливости леммы для множества $\{b_i | i \in I\}$. Рассмотрим максимальное ненулевое произведение элементов $b_i, i \in I$. Допустим, оно имеет вид

$$(4) \quad b_{i_1} \cdot b_{i_2} \cdot \dots \cdot b_{i_n}.$$

Если элемент (4) не есть неразложимый идемпотент алгебры FG , то умножим его на произвольный неразложимый идемпотент из его разложения, к примеру, на e . Тогда элемент

$$(5) \quad b_{i_1} \cdot b_{i_2} \cdot \dots \cdot b_{i_k} \cdot e$$

есть неразложимый идемпотент алгебры FG . По лемме, идемпотент e разлагается в сумму некоторых элементов множества $\{b_i | i \in I\}$. Из максимальнойности произведения (4) вытекает, что элемент (5) разлагается в сумму нескольких экземпляров элемента (4), так как все остальные слагаемые равны нулю. Отсюда и из двоичности поля F следует справедливость равенства

$$e = b_{i_1} \cdot \dots \cdot b_{i_k} \cdot e = b_{i_1} \cdot \dots \cdot b_{i_k}$$

и доказательство теоремы завершено.

§ 2. Формулы связи неприводимых многочленов и неразложимых идемпотентов полупростых факторалгебр алгебры многочленов над конечными полями

В литературе ([1]) описан способ задания циклических кодов в виде идеалов факторалгебры $F[X]/\text{Id}(X^n - 1)$ алгебры многочленов $F[X]$ над конечным полем F , $|F| = q$, причем n взаимно просто с q . Порождающими элементами этих идеалов являются с одной стороны идемпотенты алгебры $F[X]/\text{Id}(X^n - 1)$, а с другой — делители двучлена $X^n - 1$. Так как произвольный идемпотент классически полупростой алгебры разлагается в сумму неразложимых идемпотентов, а каждый многочлен алгебры $F[X]$ — в произведение неприводимых многочленов, задача нахождения формул связи неразложимых идемпотентов и неприводимых многочленов представляет интерес. Нижеследующее утверждение решает эту задачу для несколько более широкого класса алгебр.

Теорема 2. Пусть $f(X)$ — произвольный сепарабельный многочлен из $F[X]$ ненулевой степени n . Пусть также

$$\pi: F[X] \rightarrow F[X]/\text{Id } f(X) —$$

канонический эпиморфизм, а $f_1(X), \dots, f_r(X)$ — неприводимые делители многочлена $f(X)$ над полем F . Тогда множество

$$\{1 - f_i^k(\pi(X)) | k = \text{н.о.к.} (q^{\deg f_i(X)} - 1), i = 1, \dots, r\}$$

является максимальной ортогональной системой неразложимых идемпотентов алгебры $F[X]/\text{Id } f(X)$.

Доказательство. Покажем, что алгебра $F[X]/\text{Id } f(X)$ полупроста. Действительно, пусть существует многочлен $g(X) \in F[X]$, $\deg g(X) < \deg f(X)$, такой, что

$$\exists t \in \mathbf{N} (g^t(X) \equiv 0 \pmod{f(X)}).$$

Это означает, что $g^t(X)$ делится на $f(X)$. Но $g(X)$ не делится на $f(X)$, а это

противоречит сепарабельности многочлена $f(X)$. Легко видеть, что все нильпотентные элементы принадлежат радикалу Джекобсона $\text{Rad}(F[X]/\text{Id } f(X))$. Покажем теперь, что в алгебре $F[X]/\text{Id } f(X)$ каждый простой идеал максимален. Действительно, пусть $a \in F[X]/\text{Id } f(X)$, a не нильпотентен. Пусть также $T = \{a, a^2, a^3, \dots\}$. В силу конечности алгебры $F[X]/\text{Id } f(X)$ множество T конечно и содержит идемпотент e . По известным кольцевым построениям ([2]) множество $F[X]/\text{Id } f(X) \setminus T$ содержит хотя бы один простой идеал P , являющийся максимальным относительно этого свойства. Тогда алгебра $(F[X]/\text{Id } f(X))/P$ есть конечная область целостности, являющаяся полем. Отсюда вытекает, что P — максимальный идеал и $\text{Rad}(F[X]/\text{Id } f(X)) = 0$, так как в алгебре $F[X]/\text{Id } f(X)$ нет нильпотентных элементов, то есть, наша алгебра полупроста.

В силу полупростоты алгебра $F[X]/\text{Id } f(X)$ распадается в прямую сумму минимальных двусторонних идеалов, являющихся полями, что следует из коммутативности $F[X]/\text{Id } f(X)$. Обозначим $F[X]/\text{Id } f(X)$ и $\pi(X)$ через R и ζ соответственно. Тогда по известной теореме об изоморфизмах ([2]) множество $\{f_i(\zeta) \cdot R \mid i=1, \dots, r\}$, где $\pi(f(X)) = f(\zeta)$, совпадает с множеством максимальных идеалов алгебры R . Рассмотрим последовательность

$$(6) \quad f_i(\zeta), f_i^2(\zeta), f_i^3(\zeta), \dots$$

элементов идеала $f_i(\zeta) \cdot R$ для некоторого фиксированного i . Эта последовательность не содержит нуля, так как для любого натурального числа j имеет место равенство

$$f_i^j(\zeta) R = (f_i(\zeta) R)^j = f_i(\zeta) R$$

в силу идемпотентности любого идеала в полупростой артиновой алгебре.

Последовательность (6) с некоторого момента начинает циклиться из-за конечности числа элементов идеала $f_i(\zeta) \cdot R$. Следовательно, существуют натуральные числа l и t , такие, что

$$f_i^l(\zeta) = f_i^t(\zeta).$$

Без ограничения общности можно предположить, что $l > t$. Тогда

$$f_i^l(\zeta) \cdot f_i^{l-t}(\zeta) = f_i^l(\zeta) = f_i^{2(l-t)}(\zeta) \cdot f_i^t(\zeta)$$

и $f_i^{2(l-t)}(\zeta) - f_i^{l-t}(\zeta)$ аннулирует ненулевой идеал $f_i(\zeta) \cdot R$ классически полупростой алгебры R и одновременно принадлежит ему. Из [2] вытекает, что $L(R)$ есть структура с дополнениями. Отсюда следует, что элемент

$$f_i^{2(l-t)}(\zeta) = f_i^{l-t}(\zeta)$$

принадлежит дополнению идеала $f_i(\zeta) \cdot R$ в структуре $L(R)$. Но пересечение идеала с его дополнением равно нулю, откуда получается равенство

$$f_i^{2(l-t)}(\zeta) - f_i^{l-t}(\zeta) = 0$$

и $f_i^{l-t}(\zeta)$ -идемпотент, порождающий максимальный идеал в R . Для любого идемпотента e коммутативного кольца R с единицей имеет место разложение Пирса

$$R = eR \oplus (I - e)R$$

кольца R в прямую сумму своих идеалов. Из

$$R = f_i^{l-t}(\zeta) \cdot R \oplus (I - f_i^{l-t}(\zeta)) \cdot R$$

вытекает, что элемент $I - f_i^{l-t}(\zeta)$ является идемпотентом, порождающим минимальный идеал в R . Легко показать, что любой неразложимый идемпотент из R можно представить в подобном виде.

Пусть теперь $f_i^k(\zeta)$ -идемпотент алгебры R . Так как R разлагается в прямую сумму полей, порядки мультипликативных групп которых суть

$$q^{\deg f_j(X)} - 1, \quad j = 1, \dots, r,$$

то одним из выражений для k будет

$$k = \text{н.о.к.}_{1 \leq j \leq r} (q^{\deg f_j(X)} - 1),$$

что и завершает доказательство теоремы.

Искомое утверждение для циклических кодов с основанием F получается заменой в формулировке теоремы 2 многочлена $f(X)$ на $X^n - 1$, где n — натуральное число, взаимно простое с q .

В обозначениях теоремы 2 приведем обратное утверждение.

Теорема 3. Пусть множество $\{e_1, \dots, e_t\}$ есть максимальная ортогональная система неразложимых идемпотентов алгебры R . Тогда система

$$\{\text{н.о.д.}(1 - e_i, f(X)) \mid i = 1, \dots, t\}$$

представляет собой множество всех неприводимых делителей многочлена $f(X)$.

Доказательство. Пусть M есть максимальный идеал алгебры R . Тогда в множестве $\{e_1, \dots, e_t\}$ содержится элемент e , такой, что

$$M = (1 - e) \cdot R.$$

С другой стороны, существует неприводимый делитель $g(X)$ многочлена $f(X)$, такой, что

$$M = g(\zeta) \cdot R.$$

Элементами идеала $g(\zeta) \cdot R$ являются многочлены $r(\zeta)$, такие, что $r(X)$ делится на $g(X)$ и $\deg r(X) < \deg f(X)$. Отсюда вытекает существование многочлена $r_1(X)$, такого, что

$$r_1(X) = 1 - e.$$

Так как $M = g(\zeta) \cdot R = r_1(\zeta) \cdot R$, то

$$g(X) = \text{н.о.д.}(g(X), f(X)) = \text{н.о.д.}(r_1(X), f(X)),$$

что и требовалось доказать.

Теоремы 1 и 3 в совокупности представляют собой алгоритм разложения двучленов на неприводимые множители над полем из двух элементов.

Литература

- [1] Ф. Дж. Мак-Вильямс, Н. Дж. А. Слоэн, Теория кодов, исправляющих ошибки. М. «Связь», 1979 г.
- [2] И. Ламбек, Кольца и модули. М. «Мир», 1971 г.
- [3] F. J. MacWilliams. Binary codes which are ideals in the group algebra of an Abelian group. *BSTJ*, **49** (1970), 18.
- [4] Ч. Кэртис, И. Райнер, Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М. «Наука», 1969 г.

(Поступило 6. окт. 1983.)