

# О всегда сходящихся итерационных методах касательных выпуклых функций для решения нелинейных уравнений

МАГДОЛЬНА ВАРТЕРЕС (Дебрецен)

*Abstract.* For solving nonlinear equations Z. SZABÓ [1] worked out the always convergent iterations of second order generated by tangential parabolas, hyperbolas, ellipses and generally, by tangential special convex functions. In this paper a more general class of always convergent and second order iteration functions are given including all the iteration functions described in [1]. The derivation, the sufficient conditions of convergence and the error estimates of our iterative methods are described and proved.

## 1. Введение

*Определение 1.1.* Итерационный метод

$$(1.1) \quad x_{n+1} = F(x_n) \quad n = 0, 1, \dots,$$

который определяется функцией  $F$ , стационарен, основан на одной точке и вычисляет корни ( $\alpha \in I$ ) функции  $f: I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  обладает порядком сходимости  $p$ , если итерационная последовательность  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  существует и сходится ( $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ ), кроме того найдётся вещественное число  $p \geq 1$ , такое что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = c \neq 0.$$

*Определение 1.2.* ([2], стр. 11.) Информационной эффективностью итерационного метода (1.1) называется выражение:

$$EFF = \frac{p}{q},$$

где  $p$  — порядок сходимости стационарного метода,

$q$  — число новых значений функции  $f^{(j)}(x_i)$ , которые вычисляются в одном итерационном шаге.

**Теорема 1.1.** ([2], стр. 98.) Для итерационного метода вида (1.1) выполняются следующие утверждения:

1° информационная эффективность метода (1.1) удовлетворяет неравенству

$$EFF \leq 1,$$

- 2° для каждого натурального  $p$  найдётся итерационный метод вида (1.1), порядок сходимости которого равняется  $p$  и информационная эффективность равна единице,  
 3° определяющая функция каждого итерационного метода (1.1) порядка  $p$  содержит в себе явным образом все следующие функции:

$$f, f', \dots, f^{(p-1)}.$$

*Определение 1.3.* ([2], стр. 12.) В случае  $EFF=1$  итерационный метод вида (1.1) называется оптимальным.

Среди итерационных методов типа (1.1) важное значение имеет оптимальный метод Ньютона—Рафсона второго порядка, который определяется функцией

$$F_{НР}(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Этот метод был обобщён и модифицирован многими исследователями, но большая часть полученных методов состояла из не сходящихся методов. Известный метод Ньютона, определённый функцией

$$F(x) = x - \frac{|f(x)|}{M_1}$$

всегда сходится на сегменте  $I=[a, b]$ , если

$$|f'(x)| \leq M_1, \quad x \in I,$$

но этот метод линейен ( $p=1$ ).

В последние годы выработали ряд различных методов, в которых использовались методы интервальной арифметики, и которые — при выполнении некоторых строгих ограничений — всегда сходятся. При пользовании этими методами вообще требуется и условие:

$$(1.2) \quad f(a)f(b) < 0.$$

З. Сабо [1] в своих работах исследовал итерационные методы, которые не требуют использования арифметики интервалов и независимо от отношения (1.2) всегда сходятся. Такими методами являются например «метод гиперболы», «метод параболы», «метод эллипса» и «метод специальных касательных выпуклых функций», которые сходятся при выполнении не слишком строгих условий. Эти методы обладают порядком 2. В настоящей работе конструируется класс функций, которые определяют методы второго порядка, так что эти методы всегда сходятся и являются обобщениями методов З. Сабо [1].

*Обозначения:*

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Пусть функция } f: [a, b] = I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \text{ дважды непрерывно} \\ \text{дифференцируема на сегменте } I, \text{ и кроме этого} \\ \text{выполняются следующие условия} \\ |f(x)| \leq M \neq 0, \\ |f'(x)| \leq M_1 \neq 0, \quad x \in I \\ |f''(x)| \leq M_2 \neq 0. \end{array} \right.$$

$\alpha$  — корень функции  $f$  на сегменте  $I$ ,  $e_n = \alpha - x_n$  — погрешность итерационной точки  $x_n$ ,  $d_n = x_{n+1} - x_n$  — разность соседних точек итерации.

*Определение 1.4.* ([1/III], стр. 187.) Определяющая функция  $F(x; r)$  итерационного метода называется всегда сходящейся на сегменте  $I = [a, b]$  относительно функции  $f$ , если, исходя из любой точки  $x_0 \in I$ , такой что  $f(x_0) \neq 0$ , для последовательности итерационных точек  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ , где

$$x_{n+1} = F(x_n; r),$$

и  $F$  стационарна, выполняются следующие условия:

- 1°  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  последовательность монотонна,
- 2°  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  сходится к ближайшему справа (или слева) по отношению к точке  $x_0$  корню  $\alpha \in I$ , если вообще он существует, и так что в процессе итерации «параметр направления»  $r$  принимает значение последовательно 1 (или  $-1$ ),
- 3° если такого корня  $\alpha \in I$  не существует, то последовательность  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  выходит из сегмента  $I$ .

Класс таких функций, которые удовлетворяют вышеописанным условиям, будем обозначать символом  $A(f, I)$ . ( $A$ : always convergent methods)

## 2. Метод касательных выпуклых функций

$$(2.1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Пусть функция } g: (-h, h) = H \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \text{ выпукла вниз и дважды непрерывно} \\ \text{дифференцируема на } H. \text{ Кроме этого выполняются следующие условия:} \\ g(0) = g'(0) = 0, \\ g''(x) > 0, \text{ если } x \in H. \\ \text{Введём ещё одно обозначение:} \\ Q_1^* = \min_{x \in H} \{ |\inf_{x \in H} g'(x)|, \sup_{x \in H} g'(x) \}. \end{array} \right.$$

Предполагаем, что  $f(x_0) \neq 0$ . Тогда прикасаемся в первом порядке параллельным переносом функцию

$$y = -s \cdot c \cdot g(x)$$

$$c > \frac{M_1}{Q_1^*}, \quad \frac{M_1}{\infty} \doteq 0$$

$$s \doteq \text{sign}(f(x_0))$$

к функции  $f$  в её точке  $(x_0, f(x_0))$ . Получаем функцию

$$G(x) = -s \cdot c \cdot g(x - \mu) + \lambda.$$

Значения параметров  $\mu, \lambda$  можем вычислить из условий:

$$G^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0), \quad i = 0, 1.$$

Получим систему уравнений:

$$-s \cdot c \cdot g(x_0 - \mu) + \lambda = f(x_0),$$

$$-s \cdot c \cdot g'(x_0 - \mu) = f'(x_0).$$

В силу условий (2.1) функция  $g'$  обратима в данной точке, ибо

$$\left| -\frac{s}{c} f'(x_0) \right| \leq \frac{Q_1^*}{M_1} |f'(x_0)| \leq Q_1^*,$$

и так

$$\mu = x_0 - g'^{-1} \left( -\frac{s}{c} f'(x_0) \right)$$

и

$$\lambda = f(x_0) + s \cdot c \cdot g \left( g'^{-1} \left( -\frac{s}{c} f'(x_0) \right) \right).$$

Поэтому выпуклая функция, которая касается в первом порядке функции  $f$  в точке  $(x_0, f(x_0))$ , имеет вид:

$$(2.2) \quad G(x) = -s \cdot c \cdot g \left( x - x_0 + g'^{-1} \left( -\frac{s}{c} f'(x_0) \right) \right) + \\ + f(x_0) + s \cdot c \cdot g \left( g'^{-1} \left( -\frac{s}{c} f'(x_0) \right) \right).$$

**Лемма 2.1.** Пусть выполняются условия (1.3) и (2.1),

$$(2.3) \quad \begin{cases} \text{существует вещественное число } q > 0, \text{ что } q \leq g''(x), \text{ если} \\ x \in \left[ a - b + g'^{-1} \left( -\frac{M_1}{c} \right); b - a + g'^{-1} \left( +\frac{M_1}{c} \right) \right] \cap H, \\ \text{кроме того } \frac{M_2}{q} \leq c. \end{cases}$$

Если в некоторой точке  $x_0 \in I$  значение функции  $f(x_0) \neq 0$ , то значение функции  $G(x)$  по формуле (2.2), на пересечении отрезка  $I$  и области определения функции  $G(x)$ ,

- в случае  $f(x_0) > 0$  — не больше,
- в случае  $f(x_0) < 0$  — не меньше значения функции  $f(x)$ .

**Доказательство.** Пусть сначала  $s=1$ . Под действием условий нашей леммы мы можем воспользоваться формулой Тэйлора для функций  $f(x)$  и  $G(x)$ :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2,$$

$$G(x) = G(x_0) + G'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} G''(\eta)(x - x_0)^2,$$

где  $\xi = x_0 + \vartheta_1(x - x_0)$  и  $\eta = x_0 + \vartheta_2(x - x_0)$ ,  $\vartheta_1, \vartheta_2 \in (0, 1)$ . Очевидно, что функция разности

$$D(x) = f(x) - G(x) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)^2 - \frac{1}{2} G''(\eta)(x - x_0)^2 = \\ = \frac{1}{2} \left[ f''(\xi) + c \cdot g'' \left( \eta - x_0 + g'^{-1} \left( -\frac{f'(x_0)}{c} \right) \right) \right] (x - x_0)^2$$

на этой области неотрицательна. Нам теперь достаточно доказать следующее соотношение:

$$-f''(\xi) \leq c \cdot g'' \left( \eta - x_0 + g'^{-1} \left( -\frac{f'(x_0)}{c} \right) \right),$$

которое вытекает из условий леммы, то есть:

$$|f''(\xi)| \leq M_2 \leq M_2 \cdot \frac{g''(\eta')}{q} \leq c \cdot g''(\eta'),$$

где

$$\eta' \doteq \eta - x_0 + g'^{-1} \left( -\frac{f'(x_0)}{c} \right) = g'^{-1} \left( -\frac{f'(x_0)}{c} \right) + \vartheta_2(x - x_0),$$

и отсюда

$$\eta' \in \left[ a - b + g'^{-1} \left( -\frac{M_1}{c} \right), \quad b - a + g'^{-1} \left( \frac{M_1}{c} \right) \right] \cap H.$$

Заметим, что в случае  $s = -1$  доказательство проводится подобным образом.

**Лемма 2.2.** Пусть выполняются условия (1.3) и (2.1), и обозначим верхнюю границу функции  $g(x)$  через  $Q$

$$Q = \begin{cases} \sup_{x \in H} g(x), & \text{если } g(x) \text{ ограничена} \\ \infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Кроме того условимся в том, что  $M/\infty \doteq 0$ . Предполагаем, что

$$(2.4) \quad \frac{M}{Q - g \left( g'^{-1} \left( -\frac{M_1}{c} \right) \right)} < c$$

выполняется. Тогда функция  $G(x)$ , по формуле (2.2) пересекает ось абсциссы в точках:

$$\left. \begin{matrix} x_1 \\ x'_1 \end{matrix} \right\} = x_0 - g'^{-1} \left( -\frac{s}{c} f'(x_0) \right) + g_{\pm}^{-1} \left[ \frac{|f(x_0)|}{c} + g \left( g'^{-1} \left( -\frac{s}{c} f'(x_0) \right) \right) \right],$$

где

$$g(x) = \begin{cases} g_-(x), & \text{если } x \leq 0, \\ g_+(x), & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

**Доказательство.** Пусть например  $s = 1$ . Сначала докажем, что кривая  $y = G(x)$  пересекает ось абсциссы. Это утверждение в случае  $Q = \infty$  очевидно выполняется. Пусть теперь функция  $g(x)$  ограничена. По (2.4) очевидно

$$(2.4*) \quad M + c \cdot g \left( g'^{-1} \left( -\frac{M_1}{c} \right) \right) < c \cdot Q.$$

Это значит, что функцию  $g(x)$  вытянем трансформацией так, что её «ось»  $(c \cdot Q)$  была бы длиннее расстояния её сдвига по направлению ординаты. Но расстояние сдвига по ординате может быть ограниченным в том случае, когда кривая прикасается в первом порядке к функции  $f$  в её точке, через которую она переходит с максимальным наклоном  $(M_1)$ , и расстояние которой от оси абсциссы  $(M)$  окажется самым большим. Тогда из следующей системы уравнений

$$\begin{aligned} -c \cdot g(x_0 - \mu) + \lambda^* &= M, \\ -c \cdot g'(x_0 - \mu) &= M_1 \end{aligned}$$

можем вычислить этот максимальный сдвиг с параметром  $\lambda^*$

$$\lambda^* = M + c \cdot g \left( g'^{-1} \left( -\frac{M_1}{c} \right) \right).$$

Отсюда вытекает по (2.4\*), что кривая  $y = G(x)$  пересекает ось абсциссы. Точки пересечения даются решениями уравнения  $G(x) = 0$ . В случае  $s = -1$  доказательство проводится подобным образом.

**Теорема 2.1.** Если выполняются условия (1.3), (2.1), (2.3) и (2.4), тогда

$$\begin{aligned} (2.5) \quad F(x; r) &= x - g'^{-1} \left( -\frac{s}{c} f'(x) \right) + \\ &+ g_r^{-1} \left[ \frac{|f(x)|}{c} + g' \left( g'^{-1} \left( -\frac{s}{c} f'(x) \right) \right) \right] \in A(f; I) \end{aligned}$$

где  $s = \text{sign}(f(x_0))$ .

**Доказательство.** Пусть сначала  $f(x_0) > 0$ . Обозначим корни функции  $G(x)$  через  $x_1$  и  $x'_1$ , и предположим, что  $x'_1 < x_1$ . Согласно лемме (2.1)  $0 \leq G(x) \leq f(x)$ , для любого  $x \in [x'_1, x_1] \cap I$ . Если  $x_1, x'_1 \in I$ , то очевидно

$$\begin{aligned} 0 &= G(x'_1) \leq f(x'_1), \\ 0 &= G(x_1) \leq f(x_1) \end{aligned}$$

выполняются. Если вместо точки  $x_0$  повторим наш метод с точкой  $x_1$ , то получаем точку  $x_2$ , и так продолжая процесс, создаётся последовательность монотонно неубывающих точек итерации:

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \dots$$

Для каждой точки последовательности справедливо

$$f(x_n) \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Сначала рассмотрим случай

$$f(x_n) \neq 0 \quad \text{и} \quad x_n \in I, \quad n = 0, 1, \dots$$

Тогда последовательность строго монотонно возрастает и ограничена, следовательно она сходится:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha \in I.$$

$F(x; r)$  непрерывна, поэтому  $\alpha$  является её неподвижной точкой и так  $f(\alpha)=0$ . Пусть теперь существует индекс  $i>0$  так, что

$$f(x_i) = 0, \quad x_i \in I.$$

Тогда  $x_{i+1}=F(x_i)=x_i$ , следовательно  $x_{i+k}=x_i$  для  $k=1, 2, \dots$ , и можно утверждать следующее:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_i = \alpha \in I, \quad f(\alpha) = 0.$$

Пусть теперь  $f(x_n) \neq 0$ ,  $x_n \in I$  для  $n=0, 1, \dots, i-1$ , и  $x_i \notin I$ . Согласно лемме (2.1) функция  $f$  не исчезает на сегменте  $[x_0, b]$ .

Точно таким же образом можно изучать следующую монотонно невозрастающую последовательность точек

$$x_0, x'_1, x'_2, \dots,$$

только в этом случае областью нашего исследования является сегмент  $[a, x_0]$ . Наконец, если выполняется  $f(x_0) < 0$ , то доказательство проводится таким же путём.

Оценка погрешности метода выпуклых функций содержится в следующей теореме:

**Теорема 2.2.** Пусть выполняются условия (1.3), (2.1), (2.3) и (2.4). Если последовательность  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ , которая получается при помощи итерационной функции (2.5), и начальной точкой, которой является точка  $x_0 \in I$ , сходится к однократному корню  $\alpha \in I$  функции  $f$ , и кроме этого выполняются соотношения:

$$(2.6) \quad \begin{cases} 0 < m_1 \leq |f'(x)|, & \text{для } x \in [x_0, \alpha] \subset I \\ g''(x) \leq Q_2, & \text{для} \\ x \in \left[ g^{-1} \left( \frac{M}{c} + g \left( g'^{-1} \left( -\frac{M_1}{c} \right) \right) \right), g^{-1} \left( \frac{M}{c} + g \left( g'^{-1} \left( -\frac{M_1}{c} \right) \right) \right) \right]. \end{cases}$$

Тогда для погрешности  $e_{n+1}$  итерационной точки  $x_{n+1}$  справедливы следующие оценки:

$$1^\circ |e_{n+1}| \leq \frac{\frac{c}{2} Q_2 + M_2}{m_1} |e_n|^2,$$

$$2^\circ |e_{n+1}| \leq \frac{c}{2} \frac{M_2 \cdot Q_2}{m_1^2} |d_n|^3 + \left( \frac{c}{2} \frac{Q_2}{m_1} + \frac{M_1 \cdot M_2}{m_1^2} \right) d_n^2.$$

Доказательство. Пусть сначала  $f(x_0) > 0$  и  $x_0 < \alpha$ . Так как корень  $\alpha$  однократен,

$$f'(x) < 0, \quad \text{если } x \in [x_0, \alpha].$$

Предполагаем, что  $f(x_n) \neq 0$ , для  $n=0, 1, 2, \dots$ . (Если  $f(x_n)=0$  для некоторой « $n$ », то  $x_{n+1}=x_n=\alpha$ , следовательно в этом случае утверждение нашей теоремы справедливо.) Пусть « $n$ » любое неотрицательное целое число. Тогда при данных нам условиях можно применять формулу Тэйлора для функции  $G(x)$  ка-



сающейся в первом порядке функции  $f(x)$  в точке  $(x_n, f(x_n))$ :

$$G(x) = G(x_n) + G'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2} G''(\eta)(x - x_n)^2,$$

где  $\eta \in (x_n, x)$ . Так, как порядок касания равен единице, последнюю формулу можно записать в виде

$$G(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2} G''(\eta)(x - x_n)^2.$$

Обозначим корень из  $[x_n, \alpha]$  функции  $G(x)$  через  $x_{n+1}$ . Тогда имеем

$$f(x_n) = -\frac{1}{2} G''(\eta) d_n^2 - f'(x_n) d_n,$$

где  $\eta \in (x_n, x_{n+1})$ , и так  $\eta$  занимает место между корнями функции  $G(x)$ . Применяя равенство  $G''(\eta) = -c \cdot g''(\eta - \mu)$ , и вводя новый символ  $\eta' \doteq \eta - \mu$ , можно записать:

$$(2.7) \quad f(x_n) = \frac{c}{2} g''(\eta') d_n^2 - f'(x_n) d_n,$$

$$\text{где } \eta' \in \left[ g^{-1} \left( \frac{M}{c} + g \left( g'^{-1} \left( -\frac{M_1}{c} \right) \right) \right), g_+^{-1} \left( \frac{M}{c} + g \left( g'^{-1} \left( -\frac{M_1}{c} \right) \right) \right) \right].$$

Это последнее соотношение для  $\eta'$  выполняется благодаря следующему факту: знаем, что  $\eta$  точка из интервала между корнями функции  $G(x)$ . А функцию  $G(x)$  мы получали из функции  $g(x)$  с помощью трансформации

$$G(x) = -c \cdot g(x - \mu) + \lambda.$$

Тогда  $\eta'$  попадёт в ту часть области определения функции  $g$ , которая определяется сегментом  $\left[ g^{-1} \left( \frac{\lambda}{c} \right), g_+^{-1} \left( \frac{\lambda}{c} \right) \right]$ . Имея в виду выводы доказательства леммы 2.2 выполняется соотношение

$$\lambda \leq \lambda^* = M + c \cdot g \left( g'^{-1} \left( -\frac{M_1}{c} \right) \right).$$

Так, как функция  $g$  монотонна, можно записать

$$\eta' \in \left[ g^{-1} \left( \frac{\lambda}{c} \right), g_+^{-1} \left( \frac{\lambda}{c} \right) \right] \subseteq \left[ g^{-1} \left( \frac{\lambda^*}{c} \right), g_+^{-1} \left( \frac{\lambda^*}{c} \right) \right].$$

Отсюда по (2.6) получаем

$$(2.8) \quad g''(\eta') \leq Q_2.$$

$$0 \neq -f(x_n) = f(\alpha) - f(x_n) = f'(\xi) e_n, \quad \xi \in (x_n, \alpha),$$

поэтому

$$e_{n+1} = e_n - d_n = -\frac{f(x_n)}{f'(\xi)} - d_n.$$



Отсюда по (2.7) и (2.8)

$$\begin{aligned}
 |e_{n+1}| &= \left| -\frac{c}{2} \frac{g''(\eta')}{f'(\xi)} d_n^2 + \frac{f'(x_n)}{f'(\xi)} d_n - d_n \right| \leq \\
 &\leq \frac{c}{2} \frac{g''(\eta')}{|f'(\xi)|} d_n^2 + \frac{|f'(\xi) - f'(x_n)|}{|f'(\xi)|} |d_n| = \\
 &= \frac{c}{2} \frac{g''(\eta')}{|f'(\xi)|} d_n^2 + \frac{|f''(\tau)| \cdot |\xi - x_n|}{|f'(\xi)|} |d_n| \leq \\
 &\leq \frac{c}{2} \frac{Q_2}{m_1} d_n^2 + \frac{M_2}{m_1} |\xi - x_n| \cdot |d_n|,
 \end{aligned}$$

где  $\tau \in (x_n, \xi)$ . Применяя соотношения  $|d_n| \leq |e_n|$  и  $|\xi - x_n| < |e_n|$  получаем:

$$|e_{n+1}| \leq \frac{c}{2} \frac{Q_2}{m_1} |e_n|^2 + \frac{M_2}{m_1} |e_n|^2 = \frac{\frac{c}{2} Q_2 + M_2}{m_1} |e_n|^2.$$

Наконец, при помощи соотношения

$$\begin{aligned}
 |\xi - x_n| < |e_n| &= \frac{1}{|f'(\xi)|} \left( \frac{c}{2} g''(\eta') d_n^2 + |f'(x_n)| \cdot |d_n| \right) \leq \\
 &\leq \frac{c}{2} \frac{Q_2}{m_1} d_n^2 + \frac{M_1}{m_1} |d_n|
 \end{aligned}$$

получается оценка погрешности

$$\begin{aligned}
 |e_{n+1}| &\leq \frac{c}{2} \frac{Q_2}{m_1} d_n^2 + \frac{M_2}{m_1} \frac{c}{2} \frac{Q_2}{m_1} d_n^2 |d_n| + \frac{M_2}{m_1} \cdot \frac{M_1}{m_1} \cdot |d_n| |d_n| = \\
 &= \frac{c}{2} \frac{M_2 Q_2}{m_1^2} |d_n|^3 + \left( \frac{c}{2} \frac{Q_2}{m_1} + \frac{M_1 M_2}{m_1^2} \right) d_n^2.
 \end{aligned}$$

Доказательство теоремы в остальных трёх случаях, которые соответствуют комбинациям знаков величин  $\alpha - x_0$  и  $f(x_0)$ , проводится точно таким же путём.

**Теорема 2.3.** *Метод выуклых функций, в случае однократного корня, является оптимальным и методом второго порядка.*

**Доказательство.** Имея в виду, что в случае однократного корня оценка погрешности нашего итерационного метода имеет форму согласно теореме 2.2

$$|e_{n+1}| \leq \zeta |e_n|^2, \quad \text{где } \zeta < \infty,$$

можно утверждать, что порядок сходимости итерации  $p \geq 2$ . С другой стороны наш метод основан на одной точке и стационарен, поэтому согласно

утверждению 1° теоремы 1.1 для его итерационной эффективности справедливо следующее соотношение:

$$EFF = \frac{p}{q} \leq 1.$$

То есть  $p$  не может быть больше числа новых значений функций  $f^{(j)}(x_i)$ , которые вычисляются в одном итерационном шаге. Это число у нас 2. И так

$$p \leq q = 2,$$

следовательно  $p=2$  и  $EFF=1$ .

### 3. Частные случаи

В этом разделе рассматриваются несколько функций, которые обладают свойствами (2.1). Посмотрим, какие итерации они генерируют.

Сначала рассмотрим функцию

$$(3.1) \quad g(x) = x^2, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Тогда  $Q=\infty$ ,  $Q_1^*=\infty$  и  $q_2=2$ . Если  $c \geq M_2/2$ , то выполняются условия (2.1), (2.3) и (2.4). Так как

$$g_{\pm}^{-1}(y) = \pm \sqrt{y},$$

$$g'^{-1}(y) = \frac{1}{2} y,$$

то, если полагаем  $c = M_2/2$ , функция (3.1) порождает итерационную функцию

$$(3.2) \quad F(x; r) = x + \operatorname{sign}(f(x_0)) \frac{f'(x)}{M_2} + r \sqrt{2 \frac{|f(x)|}{M_2} + \frac{f'^2(x)}{M_2^2}} \in A(f; I).$$

А теперь рассмотрим выпуклую функцию

$$(3.3) \quad g(x) = \sqrt{1+x^2} - 1, \quad x \in \mathbf{R}.$$

В этом случае  $Q=\infty$  и  $Q_1^*=1$ . Если  $c > M_1$ , тогда нижней границей для второй производной функции  $g(x)$

$$g''(x) = + \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}, \quad x \in \mathbf{R}$$

на сегменте

$$\left[ -d + g'^{-1}\left(-\frac{M_1}{c}\right), \quad d + g'^{-1}\left(+\frac{M_1}{c}\right) \right] = \left[ -d - \frac{M_1}{\sqrt{c^2 - M_1^2}}, \quad d + \frac{M_1}{\sqrt{c^2 - M_1^2}} \right]$$

$(d \doteq b-a)$  является выражение

$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \left(d + \frac{M_1}{\sqrt{c^2 - M_1^2}}\right)^2\right]^3}}.$$

И так, для выполнения условий леммы 2.1 достаточно потребовать соотношения

$$c \equiv \max \{ \sqrt{2} M_1, \sqrt{(d^2 + 2d + 2)^2 M_2} \}.$$

То есть, если «с» удовлетворяет это неравенство, то выполняются условия (2.1), (2.3) и (2.4). Так как

$$g_{\pm}^{-1}(y) = \pm \sqrt{y(y+2)},$$

$$g'^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}},$$

получаем итерационную функцию:

$$(3.4) \quad F(x; r) = x + \operatorname{sign}(f(x_0)) \frac{f'(x)}{\sqrt{c^2 - f'^2(x)}} + r \sqrt{\left[ \frac{|f(x)|}{c} + \frac{c}{\sqrt{c^2 - f'^2(x)}} \right]^2 - 1} \in A(f; I).$$

Наконец рассмотрим выпуклую функцию

$$(3.5) \quad g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in (-1, 1).$$

Теперь  $Q_1^* = \infty$ ,  $q_2 = 1$  и  $Q = 1$ . Если неравенства

$$c \equiv M_2$$

и

$$c > \sqrt{\frac{M^2 + \sqrt{M^4 + 4M^2 M_1^2}}{2}}$$

выполняются одновременно, то выполняются и условия (2.1), (2.3) и (2.4). Пусть

$$c = \max \left\{ M_2, \sqrt{\frac{M^2 + \sqrt{M^4 + 4M^2 M_1^2} + 1}{2}} \right\}.$$

Так как

$$g_{\pm}^{-1}(y) = \pm \sqrt{1 - (1 - y)^2},$$

$$g'^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1 + y^2}},$$

функция (3.5) порождает итерационную функцию

$$(3.6) \quad F(x; r) = x + \operatorname{sign}(f(x_0)) \frac{f'(x)}{\sqrt{c^2 + f'^2(x)}} + r \sqrt{1 - \left[ \frac{|f(x)|}{c} - \frac{c}{\sqrt{c^2 + f'^2(x)}} \right]^2} \in A(f; I)$$

Итерационные функции (3.2), (3.4) и (3.6) являются итерационными функциями методов параболы, гиперболы и эллипса, которые опубликованы З. Сабо [1].

### Литература

- [1] Z. SZABÓ, Über gleichungslösende Iterationen ohne Divergenzpunkt I—II—III., *Publ. Math. (Debrecen)* **20** (1973), 223—233; **21** (1974), 285—293; **27** (1980), 185—200.
- [2] J. F. TRAUB, Iterative methods for the solution of equations, *Prentice Hall, Englewood Cliffs N. J.* 1964.