

О вещественных групповых алгебрах групп с бесконечной циклической подгруппой конечного индекса

К. БУЗАШИ (Дебрецен)

Алгеброй типа E над произвольным полем K называем скрещенное произведение A тела T , содержащего в своем центре поле K , с бесконечной циклической группой (a) или с бесконечной группой диэдра D :

$$A = \{T, a\}; \quad \lambda a = a\lambda^\varphi,$$

$$A = \{T, a, b\}; \quad \lambda a = a\lambda^\varphi; \quad \lambda b = b\lambda^\psi; \quad b^{-1}ab = \gamma a^{-1}; \quad b^2 = \mu,$$

где $\lambda, \gamma, \mu \in T$; φ, ψ — автоморфизмы тела T , оставляющие на месте элементы поля K .

В работах [2] и [3] дается описание всех алгебр типа E над полем вещественных чисел.¹⁾ Для однозначности обозначений запишем здесь всех их опять.

Если $\mathbf{R}, \mathbf{C}$ — поля вещественных и комплексных чисел, $\mathbf{Q}$ — тело кватернионов, (a) — бесконечная циклическая группа, D — бесконечная группа диэдра, заданная соотношениями

$$D = (a) \cdot (b); \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = 1,$$

то всех алгебр типа E над $\mathbf{R}$ имеется 15:

$$A_1 = \mathbf{R}(a); \quad A_2 = \mathbf{C}(a); \quad A_3 = \mathbf{Q}(a),$$

которые являются групповыми алгебрами группы (a) ,

$$A_4 = \{\mathbf{C}, a\}; \quad \lambda a = a\bar{\lambda}$$

($\lambda \in \mathbf{C}$, $\bar{\lambda}$ — сопряженная к λ) — скрещенное произведение поля $\mathbf{C}$ с группой (a) ,

$$A_5 = \mathbf{R}D; \quad A_6 = \mathbf{C}D; \quad A_7 = \mathbf{Q}D -$$

групповые алгебры группы D , и

$$A_8 = \{\mathbf{R}, a, b\}; \quad \lambda a = a\lambda; \quad \lambda b = b\lambda; \quad b^{-1}ab = -a^{-1}; \quad b^2 = 1 \quad (\lambda \in \mathbf{R}),$$

$$A_9 = \{\mathbf{R}, a, b\}; \quad \lambda a = a\lambda; \quad \lambda b = b\lambda; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = -1 \quad (\lambda \in \mathbf{R}),$$

¹⁾ В работе [2] из классификации выпущены типы алгебр, которые в этой статье обозначены через A_{12} и A_{15} .

$$\begin{aligned}
A_{10} &= \{C, a, b\}; \quad \lambda a = a\bar{\lambda}; \quad \lambda b = b\lambda; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = 1 \quad (\lambda \in C), \\
A_{11} &= \{C, a, b\}; \quad \lambda a = a\bar{\lambda}; \quad \lambda b = b\lambda; \quad b^{-1}ab = -a^{-1}; \quad b^2 = 1 \quad (\lambda \in C), \\
A_{12} &= \{C, a, b\}; \quad \lambda a = a\lambda; \quad \lambda b = b\bar{\lambda}; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = 1 \quad (\lambda \in C), \\
A_{13} &= \{C, a, b\}; \quad \lambda a = a\lambda; \quad \lambda b = b\bar{\lambda}; \quad b^{-1}ab = -a^{-1}; \quad b^2 = 1 \quad (\lambda \in C), \\
A_{14} &= \{C, a, b\}; \quad \lambda a = a\lambda; \quad \lambda b = b\bar{\lambda}; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = -1 \quad (\lambda \in C), \\
A_{15} &= \{Q, a, b\}; \quad \lambda a = a\lambda; \quad \lambda b = b\lambda; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = -1 \quad (\lambda \in Q) -
\end{aligned}$$

скрещенные произведения полей R , C и тела Q с группой D .

В настоящей работе мы покажем, что все вещественные алгебры типа E реализуются в вещественных групповых алгебрах, то есть для любой фиксированной алгебры A_i ($i=1, \dots, 15$) типа E существует такая группа G_i , что групповая алгебра RG_i группы G_i над полем вещественных чисел R содержит идеал, который как R -алгебра R -изоморфен R -алгебре A_i .

Лемма 1. Пусть R_1 — любое подполе поля вещественных чисел, $C_1 = R_1(i)$, ($i \in C$, $i^2 = -1$) и (b) — циклическая группа 4-го порядка, $e = 1/2(1 - b^2)$. Тогда идеал $R_1(b)e$ групповой алгебры $R_1(b)$ изоморфен полю C_1 .

Доказательство. Каждый элемент $x \in R_1(b)e$ однозначно представляется в виде

$$x = \sum_{j=0}^3 \lambda_j b^j e = (\lambda_0 - \lambda_2)e + (\lambda_1 - \lambda_3)be = \alpha_0 + \alpha_1 be \quad (\lambda_j, \alpha_k \in R_1),$$

так как $b^2 e = -e$. Отображение

$$\Theta: \alpha_0 e + \alpha_1 be \rightarrow \alpha_0 + \alpha_1 i$$

кольца $R_1(b)e$ на поле C_1 , очевидно, является изоморфизмом. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть R_1 — любое подполе поля вещественных чисел, $Q_1 = R_1(i, j, k)$, где $1, i, j, k$ — базис тела кватернионов Q , и $\mathcal{D}_1$ — группа кватернионов:

$$\mathcal{D}_1 = (b) \cdot (c); \quad b^4 = c^4 = 1; \quad b^{-1}cb = c^{-1}, \quad b^2 = c^2.$$

Пусть $e = 1/2(1 - b^2)$. Тогда идеал $R_1 \mathcal{D}_1 e$ групповой алгебры $R_1 \mathcal{D}_1$ изоморфен телу Q_1 .

Доказательство. Так как

$$(be)^2 = (ce)^2 = (bce)^2 = -e;$$

$$be \cdot ce = bce; \quad ce \cdot bce = be; \quad bce \cdot be = ce;$$

$$ce \cdot be = -bce; \quad bce \cdot ce = -be; \quad be \cdot bce = -ce,$$

и каждый элемент идеала $R_1 \mathcal{D}_1 e$ однозначно представляется в виде

$$x = \alpha_0 e + \alpha_1 (be) + \alpha_2 (ce) + \alpha_3 (bce) \quad (\alpha_{ji} \in R_1),$$

то отображение

$$\Theta: x \rightarrow \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$$

является изоморфизмом идеала $R_1 \mathcal{D}_1 e$ и тела Q_1 . Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть H — произвольная группа, R_1 — любое подполе поля вещественных чисел и поле $C_1 = R_1(i)$ — расширение поля R_1 присоединением комплексного числа i . Тогда групповая алгебра $C_1 H$ как R_1 -алгебра R_1 -изоморфна идеалу некоторой групповой алгебры $R_1 H_1$.

Доказательство. Пусть H_1 — прямое произведение

$$H_1 = (b) \times H$$

циклической группы 4-го порядка (b) с группой H . Рассмотрим идемпотент $e = 1/2(1 - b^2)$ групповой алгебры $R_1 H_1$. Покажем, что идеал $R_1 H_1 e$ как R_1 -алгебра R_1 -изоморфна R_1 -алгебре $C_1 H$. Действительно, каждый элемент идеала $R_1 H_1 e$ представляется в виде

$$x = \sum_j \mu_j h_j b^j e = \sum_j \alpha_j h_j,$$

где $\mu_j \in R_1$, $\mu_j b^j e = \alpha_j \in R_1(b)e$, $h_j \in H$. Согласно лемме 1, идеал $R_1(b)e$ изоморфен полю C_1 . Пусть $\alpha'_j \in C_1$ — образ элемента $\alpha_j \in R_1(b)e$ при этом изоморфизме. Тогда отображение

$$\psi: \sum_j \alpha_j h_j \rightarrow \sum_j \alpha'_j h_j \quad (h_j \in H)$$

очевидно является R_1 -изоморфизмом R_1 -алгебр $R_1 H_1 e$ и $C_1 H$. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть H — произвольная группа, R_1 — любое подполе поля вещественных чисел, $Q_1 = R_1(i, j, k)$, где $1, i, j, k$ базис тела кватернионов. Тогда групповая алгебра $Q_1 H$ как R_1 -алгебра R_1 -изоморфна идеалу некоторой групповой алгебры $R_1 H_2$.

Доказательство. Пусть $H_2 = H \times \mathcal{D}_1$ — прямое произведение группы H и группы кватернионов

$$\mathcal{D}_1 = (b) \cdot (c); \quad b^4 = c^4 = 1; \quad b^{-1}cb = c^{-1}; \quad b^2 = c^2.$$

Рассмотрим идемпотент $e = 1/2(1 - b^2)$. Каждый элемент x идеала $R_1 H_2 e$ групповой алгебры $R_1 H_2$ записывается в виде

$$x = \sum_j \lambda_j h_j d_j e = \sum_j \alpha_j h_j$$

где $\lambda_j \in R_1$, $h_j \in H$, $d_j \in \mathcal{D}_1$, $\alpha_j = \lambda_j d_j e \in R_1 \mathcal{D}_1 e$. Согласно лемме 2, идеал $R_1 \mathcal{D}_1 e$ изоморфен телу Q_1 , поэтому отображение

$$\varphi: \sum_j \alpha_j h_j \rightarrow \sum_j \alpha'_j h_j,$$

где $\alpha'_j \in Q_1$ — образ элемента α_j в изоморфизме $R_1 \mathcal{D}_1 e \cong Q_1$, является R_1 -изоморфизмом R_1 -алгебр $R_1 H_2 e$ и $Q_1 H$. Лемма доказана.

Теорема 1. Для каждой алгебры A_i ($i=1, 2, 3, 5, 6, 7$) существуют вещественные групповые алгебры RG_i , содержащие идеал I_i , $\mathbf{R}$ -изоморфный $\mathbf{R}$ -алгебре A_i .

Доказательство. A_1 сама является вещественной групповой алгеброй. Для алгебры $A_2 = \mathbf{C}(a)$ рассмотрим прямое произведение

$$G_2 = (a) \times (b)$$

бесконечной циклической группы (a) и циклической группы 4-го порядка (b) . Используя лемму 3, получаем, что идеал RG_2e , порожденный идемпотентом $e = 1/2(1 - b^2)$, $\mathbf{R}$ -изоморфен $\mathbf{R}$ -алгебре A_2 .

В случае алгебры $A_3 = \mathbf{Q}(a)$ рассмотрим прямое произведение

$$G_3 = \mathcal{D}_1 \times (a)$$

группы кватернионов $\mathcal{D}_1$ и бесконечной циклической группы (a) . Используя лемму 4, получаем, что идеал RG_3e вещественной групповой алгебры RG_3 , порожденный идемпотентом $e = 1/2(1 - c^2)$, $\mathbf{R}$ -изоморфен $\mathbf{R}$ -алгебре A_3 .

A_5 сама является групповой алгеброй над $\mathbf{R}$.

Для алгебры $A_6 = \mathbf{C}D$ рассмотрим прямое произведение

$$G_6 = \mathcal{D}_1 \times (d)$$

бесконечной группы диэдра $\mathcal{D}_1$ и циклической группы 4-го порядка (d) . Применяя лемму 3, получаем, что идеал RG_6e , порожденный идемпотентом $e = 1/2(1 - d^2)$, как $\mathbf{R}$ -алгебра $\mathbf{R}$ -изоморфен $\mathbf{R}$ -алгебре $\mathbf{C}D$.

В случае алгебры $A_7 = \mathbf{Q}D$ строим прямое произведение

$$G_7 = D \times \mathcal{D}_1$$

бесконечной группы диэдра D и группы кватернионов $\mathcal{D}_1$. Тогда, в силу леммы 4, идеал RG_7e , порожденный идемпотентом $e = 1/2(1 - c^2)$, как $\mathbf{R}$ -алгебра $\mathbf{R}$ -изоморфен $\mathbf{R}$ -алгебре $\mathbf{Q}D$. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $A_4 = \{\mathbf{C}, a\}$ — скрещенная групповая алгебра бесконечной циклической группы (a) над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$, причем $\lambda a = a\bar{\lambda}$ ($\lambda \in \mathbf{C}$). Пусть группа G — полупрямое произведение

$$G = (b) \cdot (a); \quad a^{-1}ba = b^3, \quad b^4 = 1$$

циклической группы 4-го порядка (b) на бесконечную циклическую группу (a) . Тогда идеал RGe , порожденный идемпотентом $e = 1/2(1 - b^2)$, как $\mathbf{R}$ -алгебра $\mathbf{R}$ -изоморфен $\mathbf{R}$ -алгебре A_4 .

Доказательство. Согласно лемме 1 кольцо $\mathbf{R}(b)e$ изоморфно полю комплексных чисел $\mathbf{C}$. Каждый элемент $x \in RGe$ однозначно записывается в виде

$$x = \sum \lambda_j g_j e = \sum a^j \gamma_j e = \sum a^j \alpha_j,$$

где $\lambda_j \in \mathbf{R}$, $g_j \in G$, $\gamma_j \in \mathbf{R}(b)$, $\alpha_j \in \mathbf{R}(b)e$. Рассмотрим отображение

$$\psi: \sum a^j \alpha_j \rightarrow \sum a^j \alpha'_j$$

идеала $\mathbf{R}Ge$ на алгебру A_4 , где α'_j — образ элемента $\alpha_j \in \mathbf{R}(b)e$ в $\mathbf{C}$ при изоморфизме $\mathbf{R}(b)e \cong^\varphi \mathbf{C}$. Очевидно, ψ является взаимно однозначным, выдерживает сложение и умножение на элементы из $\mathbf{R}$. Покажем, что имеет место равенство $a\alpha'_j = \overline{\alpha'_j}a$, где $\overline{\alpha'_j}$ — число, комплексно сопряженное с $\alpha'_j \in \mathbf{C}$. Действительно, каждый элемент $\alpha_j \in \mathbf{R}(b)e$ представляется в виде

$$\alpha_j = \beta e + \beta_1 b e \quad (\beta, \beta_1 \in \mathbf{R}).$$

Тогда

$$a\alpha_j = a(\beta e + \beta_1 b e) = \beta e a + \beta_1 b^{-1} e a = (\beta e + \beta_1 b^{-1} e) a.$$

Но образ элемента $\beta e + \beta_1 b^{-1} e \in \mathbf{R}(b)e$ в поле $\mathbf{C}$ при изоморфизме φ как раз $\overline{\alpha'_j}$. Следовательно, умножение элементов в алгебре $\mathbf{R}Ge$ подчиняется тем же законам, что и в $\mathbf{R}$ -алгебре A_4 . Значит, ψ есть $\mathbf{R}$ -изоморфизм $\mathbf{R}$ -алгебр $\mathbf{R}Ge$ и A_4 . Теорема доказана.

Теорема 3. Для алгебр A_i ($i=8, 9$) существуют такие группы G_i , что A_i как $\mathbf{R}$ -алгебра $\mathbf{R}$ -изоморфна некоторому идеалу групповой алгебры $\mathbf{R}G_i$.

Доказательство. Рассмотрим сначала A_8 —скрещенную групповую алгебру бесконечной группы диэдра D над полем вещественных чисел с определяющими соотношениями

$$(1) \quad \lambda a = a\lambda; \quad \lambda b = b\lambda; \quad b^{-1}ab = -a^{-1}; \quad b^2 = 1 \quad (\lambda \in \mathbf{R}).$$

Пусть H —прямое произведение

$$H = (a) \times (c)$$

бесконечной циклической группы (a) и циклической группы 2-го порядка (c) , а группа G_8 —полупрямое произведение

$$G_8 = H \cdot (b); \quad bc = cb; \quad b^{-1}ab = a^{-1}c; \quad b^2 = c^2 = 1$$

группы H на циклическую группу 2-го порядка (b) . Покажем, что идеал $\mathbf{R}G_8e$, порожденный идемпотентом $e = 1/2(1 - c)$, как $\mathbf{R}$ -алгебра $\mathbf{R}$ -изоморфна $\mathbf{R}$ -алгебре A_8 . Действительно, каждый элемент идеала $\mathbf{R}G_8e$ представляется в виде

$$x = \sum \lambda_j a^j b^{\delta_j} e = \sum \lambda_j d_j e \quad (\lambda_j \in \mathbf{R}; \quad 0 \leq \delta_j < 2; \quad d_j \in D),$$

так как $ce = -e$. Отображение

$$\psi: \sum \lambda_j d_j e \rightarrow \sum \lambda_j d_j$$

идеала $\mathbf{R}G_8e$ на алгебру A_8 является $\mathbf{R}$ -изоморфизмом $\mathbf{R}$ -алгебр $\mathbf{R}G_8e$ и A_8 , так как $\psi(ae) = a$; $\psi(be) = b$; $\psi(ce) = c$; $\psi(e) = 1$ и выполняются равенства (1):

$$(be)^{-1}(ae)(be) = b^{-1}abe = a^{-1}ce = -a^{-1}e = -(ae)^{-1},$$

$$(be)^2 = b^2e = e.$$

Рассмотрим алгебру $A_9 = \{\mathbf{R}, a, b\}$ —скрещенную групповую алгебру бесконечной группы диэдра D над полем $\mathbf{R}$ с определяющими соотношениями

$$(2) \quad \lambda a = a\lambda, \quad \lambda b = b\lambda, \quad b^{-1}ab = a^{-1}, \quad b^2 = -1 \quad (\lambda \in \mathbf{R}).$$

Пусть группа G_9 — полупрямое произведение

$$G_9 = (a) \cdot (b), \quad b^4 = 1, \quad b^{-1}ab = a^{-1}$$

бесконечной циклической группы (a) на циклическую группу 4-го порядка (b) . Каждый элемент x идеала RG_9e , порожденного идемпотентом $e = 1/2(1 - b^2)$, представляется в виде

$$x = \sum \lambda_j d_j e,$$

где $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $d_j \in D$, так как $b^2e = -e$. Тогда отображение

$$\varphi: \sum \lambda_j d_j e \rightarrow \sum \lambda_j d_j$$

идеала RG_9e на A_9 является взаимно однозначным. Ясно, что $\varphi(ae) = a$; $\varphi(be) = b$, $\varphi(e) = 1$. Так как

$$(be)^{-1}(ae)(be) = (ae)^{-1}; \quad (be)^2 = b^2e = -e,$$

то есть в RG_9e выполняются равенства (2), то отображение φ является $\mathbb{R}$ -изоморфизмом $\mathbb{R}$ -алгебр RG_9e и A_9 . Теорема доказана.

Теорема 4. Для алгебр A_i ($i=10, 11$) существуют такие группы G_i , что $\mathbb{R}$ -алгебра A_i $\mathbb{R}$ -изоморфна некоторому идеалу вещественной групповой алгебры RG_i .

Доказательство. Алгебры A_{10} и A_{11} заданы определяющими соотношениями

$$(3) \quad \lambda a = a\bar{\lambda}; \quad \lambda b = b\lambda; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = 1 \quad (\lambda \in \mathbb{C}),$$

$$(4) \quad \lambda a = a\bar{\lambda}; \quad \lambda b = b\lambda; \quad b^{-1}ab = -a^{-1}; \quad b^2 = 1 \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Пусть группа H — полупрямое произведение

$$H = (c) \cdot (a); \quad a^{-1}ca = c^{-1}; \quad c^4 = 1$$

циклической группы 4-го порядка (c) на бесконечную циклическую группу (a) . Рассмотрим полупрямые произведения

$$(5) \quad G_{10} = H \cdot (b); \quad b^2 = 1; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad bc = cb,$$

$$(6) \quad G_{11} = H \cdot (b); \quad b^2 = 1; \quad b^{-1}ab = a^{-1}c^2; \quad bc = cb$$

группы H на циклическую группу 2-го порядка (b) с определяющими соотношениями (5) и (6).

Согласно лемме 1, идеал $\mathbb{R}(c)e$, порожденный идемпотентом $e = 1/2(1 - c^2)$, изоморфен полю комплексных чисел $\mathbb{C}$:

$$\varphi: \mathbb{R}(c)e \cong \mathbb{C}.$$

Нетрудно заметить, что каждый элемент идеалов $RG_{10}e$ и $RG_{11}e$ однозначно представляется в виде

$$x = \sum \lambda_j a^j c^{\delta_j} b^{\gamma_j} e = \sum d_j \alpha_j,$$

где $\alpha_j \in \mathbf{R}$; $\alpha_j \in \mathbf{R}(c)e$; $d_j \in D$; $0 \leq \delta_j < 4$; $0 \leq \gamma_j < 2$, так как $c^2e = -e$. Покажем, что отображение

$$\psi: \Sigma \alpha_j d_j \rightarrow \Sigma \alpha'_j d_j,$$

где $\alpha'_j = \varphi(\alpha_j) \in \mathbf{C}$, является $\mathbf{R}$ -изоморфизмом $\mathbf{R}$ -алгебр $\mathbf{R}G_{10}e \cong A_{10}$ и $\mathbf{R}G_{11}e \cong A_{11}$. Действительно, ψ очевидно является взаимно однозначным отображением на всю алгебру A_{10} (также на A_{11}) и выдерживает сложение и умножение на элементы из $\mathbf{R}$. Значит достаточно показать, что в $\mathbf{R}$ -алгебре $\mathbf{R}G_{10}e$ ($\mathbf{R}G_{11}e$) выполняются условия (3) (соответственно (4)). В случае обеих алгебр $\psi(e) = 1$; $\psi(ce) = i$; $\psi(ae) = a$; $\psi(be) = b$ и каждый элемент $\alpha_j \in \mathbf{R}(c)e$ представляется в виде

$$\alpha_j = \beta_0 e + \beta_1 ce \quad (\beta_0, \beta_1 \in \mathbf{R}).$$

Поэтому, используя соотношения (5), в алгебре $\mathbf{R}G_{10}e$ имеют место равенства

$$\alpha_j b = b \alpha_j$$

$$a \alpha_j = a(\beta_0 e + \beta_1 ce) = \beta_0 ea + \beta_1 c^{-1}ea = (\beta_0 e + \beta_1 c^{-1}e)a.$$

Однако

$$\varphi(\beta_0 e + \beta_1 c^{-1}e) = \overline{\alpha'_j},$$

то есть

$$a \alpha'_j = \overline{\alpha'_j} a.$$

Кроме того

$$(be)^{-1}(ae)(be) = b^{-1}abe = a^{-1}e = (ae)^{-1},$$

$$(be)^2 = b^2e = e,$$

значит в $\mathbf{R}G_{10}e$ условия (3) выполняются.

Точно так же можно показать, что в алгебре $\mathbf{R}G_{11}e$

$$b \alpha_j = \alpha_j b \quad (\alpha_j \in \mathbf{R}(c)e),$$

$$a \alpha'_j = \overline{\alpha'_j} a \quad (\alpha'_j = \varphi(\alpha_j) \in \mathbf{C}),$$

кроме того

$$(be)^{-1}(ae)(be) = b^{-1}abe = a^{-1}c^2e = -a^{-1}e = -(ae)^{-1},$$

$$(be)^2 = b^2e = e,$$

то есть в $\mathbf{R}G_{11}e$ условия (4) выполняются. Теорема доказана.

Теорема 5. Для каждой алгебры A_i ($i=12, 13, 14$) существует такая группа G_i , что $\mathbf{R}$ -алгебра A_i $\mathbf{R}$ -изоморфна некоторому идеалу вещественной групповой алгебры $\mathbf{R}G_i$.

Доказательство. Алгебры A_{12}, A_{13}, A_{14} задаются определяющими соотношениями

$$(7) \quad A_{12} = \{\mathbf{C}, a, b\}; \quad \lambda a = a\lambda; \quad \lambda b = b\bar{\lambda}; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = 1 \quad (\lambda \in \mathbf{C}),$$

$$(8) \quad A_{13} = \{\mathbf{C}, a, b\}; \quad \lambda a = a\lambda; \quad \lambda b = b\bar{\lambda}; \quad b^{-1}ab = -a^{-1}; \quad b^2 = 1 \quad (\lambda \in \mathbf{C}),$$

$$(9) \quad A_{14} = \{\mathbf{C}, a, b\}; \quad \lambda a = a\lambda; \quad \lambda b = b\bar{\lambda}; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = -1 \quad (\lambda \in \mathbf{C}).$$

Пусть группа H — прямое произведение

$$H = (a) \times (c)$$

бесконечной циклической группы (a) и циклической группы 4-го порядка (c) . Рассмотрим полупрямые произведения группы H на циклическую группу (b) с определяющими соотношениями

$$(10) \quad G_{12} = H \cdot (b); \quad b^2 = 1; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^{-1}cb = c^{-1}; \quad c^4 = 1,$$

$$(11) \quad G_{13} = H \cdot (b); \quad b^2 = 1; \quad b^{-1}ab = a^{-1}c^2; \quad b^{-1}cb = c^{-1}; \quad c^4 = 1,$$

$$(12) \quad G_{14} = H \cdot (b); \quad b^4 = 1; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^{-1}cb = c^{-1}; \quad c^4 = 1.$$

Определим идемпотент $e_1 = 1/2(1 - c^2)$ в вещественных групповых алгебрах $\mathbf{R}G_{12}$ и $\mathbf{R}G_{13}$, и идемпотент $e_2 = 1/4(1 - c^2)(1 - b^2)$ в групповой алгебре $\mathbf{R}G_{14}$. Согласно лемме 1, все идеалы $\mathbf{R}(c)e_1$, $\mathbf{R}(c)e_2$ изоморфны полю комплексных чисел $\mathbf{C}$. Обозначим эти изоморфизмы через общий символ φ . Так как $c^2e_1 = -e_1$; $c^2e_2 = b^2e_2 = -e_2$, то элементы во всех трех идеалах представляются в виде

$$\sum d_j \alpha_j$$

где $\alpha_j \in \mathbf{R}(c)e_i$ ($i=1, 2$), $d_j \in D$. Рассмотрим отображение

$$\psi: \sum d_j \alpha_j \rightarrow \sum d_j \alpha'_j,$$

где $\alpha'_j = \varphi(\alpha_j) \in \mathbf{C}$. Покажем, что отображение ψ является $\mathbf{R}$ -изоморфизмом $\psi: \mathbf{R}G_i e \rightarrow A_i$ ($i=12, 13, 14$), где e — соответствующий идемпотент e_1 или e_2 . Действительно, ψ — взаимно однозначно на всю алгебру A_i для всех $i=12, 13, 14$, выдерживает сложение и умножение на элементы из $\mathbf{R}$. Покажем, что в алгебре $\mathbf{R}G_{12}e_1$ ($\mathbf{R}G_{13}e_1$ или $\mathbf{R}G_{14}e_2$) выполняются соотношения (7) ((8) или (9) соответственно). Действительно, учитывая

$$\psi(ae) = a; \quad \psi(be) = b, \quad \psi(e) = 1,$$

и что каждый элемент из $\mathbf{R}(c)e$ представляется в виде

$$\alpha = \beta_0 e + \beta_1 c e \quad (\beta_0, \beta_1 \in \mathbf{R}),$$

в алгебре $\mathbf{R}G_{12}e_1$ имеем (используя соотношения (10))

$$a\alpha = \alpha a \quad (\alpha \in \mathbf{R}(c)e_1)$$

$$b\alpha = b(\beta_0 e_1 + \beta_1 c e_1) = (\beta_0 e_1 + \beta_1 c^{-1} e_1) b,$$

что равносильно равенству

$$b\alpha' = \overline{\alpha'} b \quad (\alpha' = \varphi(\alpha) \in \mathbf{C}).$$

Кроме того

$$(be)^{-1}(ae)(be) = b^{-1}abe = a^{-1}e = (ae)^{-1},$$

$$(be)^2 = b^2e = e.$$

Значит, в алгебре $\mathbf{R}G_{12}e$ выполняются условия (7).

В алгебре $\mathbf{R}G_{13}e_1$ с использованием соотношений (11) имеют место равенства

$$\begin{aligned} a\alpha &= \alpha a; \quad b\alpha' = \overline{\alpha'}b; \\ (be)^{-1}(ae)(be) &= b^{-1}abe = a^{-1}c^2e = -a^{-1}e = -(ae)^{-1} \\ (be)^2 &= b^2e = e, \end{aligned}$$

то есть выполняются все условия (8).

Наконец, используя соотношения (12), в алгебре $\mathbf{R}G_{14}e_2$ получаем

$$\begin{aligned} \alpha a &= a\alpha \quad (\alpha \in \mathbf{R}(c)e_2), \\ b\alpha &= b(\beta_0 e_2 + \beta_1 c e_2) = (\beta_0 e_2 + \beta_1 c^{-1} e_2)b, \\ (be_2)^{-1}(ae_2)(be_2) &= b^{-1}abe_2 = a^{-1}e_2 = (ae_2)^{-1}, \\ (be_2)^2 &= b^2e_2 = -e_2. \end{aligned}$$

Следовательно, ψ выдерживает умножение. Теорема доказана.

Теорема 6. Для алгебры A_{15} существует такая группа G , что $\mathbf{R}$ -алгебра A_{15} $\mathbf{R}$ -изоморфна некоторому идеалу вещественной групповой алгебры $\mathbf{R}G$.

Доказательство. Алгебра A_{15} задается соотношениями

$$(13) \quad A_{15} = \{Q, a, b\}; \quad \lambda a = a\lambda; \quad \lambda b = b\lambda; \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad b^2 = -1 \quad (\lambda \in Q).$$

Пусть группа H —прямое произведение

$$H = \mathcal{D}_1 \times (a)$$

группы кватернионов $\mathcal{D}_1$:

$$\mathcal{D}_1 = (c) \cdot (d); \quad c^4 = d^4 = 1; \quad d^{-1}cd = c^3; \quad c^2 = d^2,$$

и бесконечной циклической группы (a) , а группа G —полупрямое произведение

$$G = H \cdot (b); \quad b^{-1}ab = a^{-1}; \quad bc = cb; \quad bd = db; \quad b^2 = c^2; \quad b^4 = 1$$

группы H на циклическую группу 4-го порядка (b) .

Рассмотрим идеал $\mathbf{R}Ge$, порожденный идемпотентом $e = 1/2(1 - c^2)$. Согласно лемме 4 идеал $\mathbf{R}D_1e$ изоморфен телу кватернионов Q . Так как $b^2e = -e$, элементы идеала $\mathbf{R}Ge$ могут быть записаны в виде

$$\Sigma a^\nu b^{\gamma_\nu} \alpha_\nu = \Sigma d_\nu \alpha_\nu \quad (d_\nu \in \mathbf{R}\mathcal{D}_1e; \quad 0 \leq \gamma_\nu < 2; \quad d_\nu \in D).$$

Покажем, что отображение

$$\psi: \Sigma d_\nu \alpha_\nu \rightarrow \Sigma d_\nu \alpha'_\nu$$

$\mathbf{R}$ -алгебр $\mathbf{R}Ge$ и A_{15} является $\mathbf{R}$ -изоморфизмом, где $\alpha'_\nu \in Q$ —образ элемента $\alpha_\nu \in \mathbf{R}\mathcal{D}_1e$ при изоморфизме $\mathbf{R}\mathcal{D}_1e \cong Q$. Для этого достаточно показать, что в алгебре $\mathbf{R}Ge$ выполняются условия (13), ибо отсюда уже легко получаются все свойства $\mathbf{R}$ -изоморфизма. Учитывая, что элементы $\alpha_\nu \in \mathbf{R}\mathcal{D}_1e$ имеют вид

$$\alpha_\nu = \beta_0 e + \beta_1 c e + \beta_2 d e + \beta_3 c d e \quad (\beta_i \in \mathbf{R}),$$

имеем

$$a\alpha_v = \alpha_v a; \quad b\alpha_v = \alpha_v b,$$

так как элементы a и b перестановочны с c и d . Кроме того

$$(be)^{-1}(ae)(be) = b^{-1}abe = a^{-1}e = (ae)^{-1},$$

$$(be)^2 = b^2e = -e.$$

Теорема доказана.

Литература

- [1] С. Д. Берман—К. Бузаши, О представлениях группы, содержащей бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса. *Publ. Math. (Debrecen)* **29** (1982), 163—170.
- [2] С. Д. Берман—К. Бузаши, О Модулях над групповыми алгебрами групп, содержащих бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса. *Studia Sci. Math. Hungarica* **16** (1981), 455—470.
- [3] С. Д. Берман—К. Бузаши, Описание всех конечномерных вещественных представлений групп, содержащих бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса. *Publ. Math. (Debrecen)* **31** (1984), 133—144.
- [4] Ч. Кэртис—И. Райнер, Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. Изд. Наука, 1969.
- [5] N. JACOBSON, The theory of rings. *Amer. Math. Soc.* New York, 1943.

(Поступило 29. VII. 1983)