

Eine Bemerkung über positive Matrizen und Iterationen

Von ZOLTÁN SZABÓ (Debrecen)

Abstract. Let A be an $n \times n$ matrix with strictly positive entries. Then the implications (1) hold only for $n \leq 3$.

Herr Professor B. BARNA hat die folgende Frage über die im gewissen Sinne verallgemeinerte geometrische Reihe aufgeworfen. Wir betrachten die Vektoren $b, x_0 \in \mathbb{R}^n$ und die $n \times n$ -Matrix A mit streng positiven Elementen ($b, x_0 > 0$; $A > 0$). Es wird gefragt, ob die Relationen

$$a_{ii} < 1 \quad (i = 1, \dots, n), \quad \det(I - A) > 0$$

zur Konvergenz der durch die lineare Iteration

$$x_{k+1} = Ax_k + b, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

erzeugten Iterationsfolge $\langle x_n \rangle$ notwendig und hinreichend sind. Die bejahende Antwort hat wahrscheinlich geschienen, da die Vermutung in den Fällen $n=1, 2$ durch B. BARNA bewiesen wurde [1].

Im Hinblick darauf, daß die obige Iteration in der Form

$$x_{k+1} = A^{k+1}x_0 + (I + A + A^2 + \dots + A^k)b, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

umgeschrieben werden kann, kann die Frage als die Implikationen

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} A^k < \infty \Leftrightarrow \begin{cases} a_{ii} < 1; & i = 1, \dots, n \\ \det(I - A) > 0 \end{cases}$$

formuliert werden.

Es werden die Eigenwerte von A mit λ , der maximale Eigenwert mit r (Satz 1.1 in [3], Seiten 1—2) und die Determinante $\det(I - A)$ mit D bezeichnet. Die Implikationen

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k < \infty \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0 \Leftrightarrow r < 1$$

und

$$\lambda \neq r \Rightarrow |\lambda| < r$$

sind im Falle $A > 0$ bekannt [2, 3].

Es kann leicht bewiesen werden, daß

$$(2) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_{ii} < 1; & i = 1, \dots, n \\ \text{und} \\ D > 0. \end{cases}$$

Die Erfüllung der Relationen

$$a_{ii} < 1; \quad i = 1, \dots, n$$

ist evident. Die Ungleichung $D > 0$ kann auf elementare Weise, mit der Induktion nach n gezeigt werden. (Sie folgt übrigens aus dem Satz 2.2 ([3], S. 28) für $s=1$, da $D = \Delta_n$ (1) ist.)

Die Umkehrung von (2) gilt aber nur für $n \leq 3$. Im Falle $n=1$ ist die Behauptung evident.

Mit der Anwendung des Satzes 2.2 [3] erhalten wir für $n=2$ aus $D > 0$ und $1 - a_{11} > 0$ die Relation $r < 1$. In dem Fall $n=3$ setzen wir voraus, daß $1 \leq r$. Auf Grund des Satzes 2.2 [3] gibt es mindestens einen nicht-positiven (oberen) Hauptminor. Da die 1×1 und 3×3 Hauptminoren streng positiv sind, soll

$$\det \begin{pmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{pmatrix}$$

nicht positiv sein.

Läßt sich die Determinante D nach der dritten Spalte entwickeln, so erhält man, daß $D < 0$, was ein Widerspruch ist.

Für $n=4$ wird ein Beispiel gezeigt, wo die Relationen

$$(3) \quad a_{ii} < 1 \ (\forall i), \ D > 0 \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A^k = \infty$$

gleichzeitig erfüllt sind.

Seien nämlich

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{falls der Wert von } i+j \text{ mit 3 oder 7 gleich ist;} \\ \frac{1}{2}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist jetzt $D = \frac{125}{16}$. Da jedes Element von A^{k+1} größer als 2^k ($k \in \mathbb{N}$) ist, gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = \infty$.

(Es können natürlich auch Matrizen von höherer Ordnung mit den Eigenschaften (3) angegeben werden.)

Unsere Bemerkung kann also auf folgende Weise formuliert werden.

Satz. Ist $A = (a_{ij})$ eine beliebige reelle $n \times n$ -Matrix mit streng positiven Elementen, so gelten die Implikationen (1) nur für $n \leq 3$.

Literatur

- [1] B. BARNA, Unveröffentlichte Handschrift (1965).
- [2] F. R. GANTMACHER, Matrizenrechnung I—II. Deutscher Verlag der Wissenschaften, *Berlin*, 1958, 1959.
- [3] E. SENETA, Non-negative Matrices (An Introduction to Theory and Applications), George Allen and Unwin Ltd., *London*, 1973.

ADRESSE DES AUTORS:
ZOLTÁN SZABÓ
MATHEM. INST. DER UNIV.
H—4010 DEBRECEN, UNGARN

(Eingekommen am 22 Juni 1982)