

Конечные группы с данным числом классов сопряженных элементов

Я. Г. БЕРКОВИЧ

§ 1. Введение

Пусть G — конечная группа порядка g ; G' — ее коммутант порядка g' ; $r(G)$ — число классов сопряженных элементов группы G (число G -классов); $Irr(G)$ — множество всех неприводимых комплексных характеров группы G . Известно, что $|Irr(G)| = r(G)$, g/g' — число линейных (одномерных) характеров группы G ; поэтому $n(G) = r(G) - g/g'$ — число нелинейных характеров группы G , которые неприводимы.

В работе [1] имеется список конечных групп G с $r(G) \leq 9$. Цель этой статьи — классифицировать группы G с $r(G) \in \{10, 11, 12\}$. Эти результаты мы выводим из данной в статье [2] классификации конечных групп с $n(G) \leq 7$. Кроме того мы пользуемся списком неабелевых простых групп G с $r(G) \leq 12$, имеющимся в статье [3].

Приводим основные обозначения.

p, q — простые числа; m, n, a, b, r, t — натуральные числа; $A[B]$ — полупрямое произведение A и B с инвариантным множителем B (у нас всегда $A[B \neq A \times B]$); $(A, B) = A[B]$ — группа Фробениуса с ядром B ; $C(m)$ — циклическая группа порядка m ; $E(p^a)$ — элементарная абелева группа порядка p^a ; $ES(m, p)$ — экстраспециальная группа порядка p^{1+2m} ; $S(64)$ — специальная группа порядка 64, все инволюции которой лежат в ее центре, равном $E(4)$; $S^0(64)$ — специальная группа порядка 64 с центром, равным $E(4)$, содержащая более трех инволюций; $D(2m)$ — группа диэдра порядка $2m > 4$; $Q(2^m)$ — обобщенная группа кватернионов порядка 2^m ; $SD(2^m)$ — полудиэдральная группа порядка 2^m ; S_n — симметрическая группа степени n ; A_n — знакопеременная группа степени n ; $AGL(m, p) = GL(m, p)[E(p^m)]$; $ASL(m, p) = SL(m, p)[E(p^m)]$; M_g — стабилизатор точки в группе Матье M_{11} степени 11; $Z(G)$ — центр группы G ; $\varphi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G ; $N_G(H)$ — нормализатор подгруппы H в группе G ; $C_G(H)$ — централизатор подмножества H в группе G ; $A * B$ — центральное произведение подгрупп A и B ; для $H \subseteq G$ через $r_G(H)$ обозначим число G -классов, содержащих элементы из $H - \{1\}$; $\hat{S}_n$ — накрывающая S_n с кватернионной силовской 2-подгруппой, $\check{S}_n$ — накрывающая S_n с полудиэдральной силовской 2-подгруппой, $n = 4, 5$; $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G . Если $G' < G$, то через $f(G)$ обозначим число смежных систем $xG' \neq G'$ с $r_G(xG') > 1$. Запись $\bar{h} = \bar{h}(G) = (\dots, h_i^{a_i}, \dots)$ означает, что среди G -классов имеется точно a_i классов длины h_i ; запись $\bar{d} = \bar{d}(G) = (\dots, d_i^{b_i}, \dots)$ означает, что

в $Irr(G)$ имеется точно b_i характеров степени d_i . Если G — p -группа, то $z_i = |\{x \in G \mid |G : C_G(x)| = p^i\}|$.

Во избежание большого числа повторений мы во второй главе более или менее подробно рассматриваем лишь случай $r(G) = 12$. Прочитавший статью без труда восстановит доказательства в случаях $r(G) = 10, 11$.

Благодарю Л. С. Казарина за большую помощь во время длительной работы над этой статьей.

§ 2. Основные результаты

В этом параграфе дан список всех G с $r(G) \in \{10, 11, 12\}$. Группы, записанные в каждой из трех теорем над горизонтальной чертой — это все те группы, удовлетворяющие условиям этих теорем, у которых число нелинейных неприводимых характеров не превосходит 7.

Теорема 1. Если $r(G) = 10$, то G — одна из перечисленных ниже групп:

1—25. $C(10)$; $Q(8) \times C(2)$; $D(8) \times C(2)$; $Q(8) * C(4)$ и $D(8) * C(4)$ порядка 16; минимальная неабелева группа порядка 16; $D(28)$; $C(4)[C(7)]$; $C(8)[C(5)]$ с центром порядка 2; $AGL(1, 5) \times C(2)$; $(C(3), C(7)) \times C(2)$; $C(4)[A_4]$; $S_4 \times C(2)$; $C(6)[C(9)]$ и $C(6)[E(9)]$ с $\bar{h} = (1, 2, 3^2, 6^3, 9^3)$; $C(6)[E(16)]$ и $C(6)[(C(4) \times C(4))]$ с $\bar{h} = (1, 3, 4, 6^2, 12, 16^4)$; $(C(4), C(25))$; $(C(4), E(25))$; $(C(4)[C(3), E(49)])$; $ASL(2, 3)$; $(Q(16), E(49))$; нормализатор силовой 2-подгруппы в простой группе Судзуки $Sz(8)$; $(C(8), C(17))$; $(C(6), E(25))$.

26—34. $D(34)$; $C(2)[ES(1, 3)]$ экспоненты 6, $\bar{h} = (1^3, 6^4, 9^3)$, $\bar{d} = (1^2, 2^4, 3^4)$; $D(6)[E(16)]$, $D(6)[(C(4) \times C(4))]$, $\bar{h} = (1, 3^3, 6, 12^4, 32)$; $A_5 \times C(2)$; $D(10)[E(16)]$, $\bar{h} = (1, 5^3, 20^4, 32^2)$; M_{11} ; $PSL(3, 4)$; $(SL(2, 5), E(121))$.

Теорема 2. Если $r(G) = 11$, то G — одна из перечисленных ниже групп:

1—20. $C(11)$; $ES(1, 3)$; $D(32)$; $Q(32)$; $SD(32)$; $g = 32$, $z_0 = 2$, $z_1 = 6$, $g' = 4$; $E(4)[ES(1, 3)]$, $g/g' = 4$, $\bar{h} = (1, 2, 6^2, 9^3, 12, 18^3)$; $AGL(1, 11)$; $(C(4), C(29))$; $(C(5), C(31))$; $(C(9), C(19))$; $(C(6), C(31))$; $G/E(4) = C(4)[A_4]$ или $S_4 \times C(2)$, $\bar{h} = (1, 3, 4, 12^2, 24^4, 32^2)$; $(C(8), E(25))$; $(C(7), C(29))$; $AGL(1, 5)[E(16)]$, $\bar{h} = (1, 5, 10, 20^2, 40^5, 64)$; $(Q(8), E(49))$; $(Q(8)[C(3), E(49)])$.

21—32. $D(38)$; $(C(3), E(25))$; $C(3)[ES(2, 2)]$, $\bar{h} = (1^2, 6^5, 16^4)$; $SL(2, 7)$; $AGL(2, 3)$; нерасщепляемое расширение $E(8)$ посредством $SL(3, 2)$ и тривиальным центром; S_6 ; $PGL(2, 9)$; $AGL(3, 2)$; $\text{Aut } PSL(2, 8)$; $PSL(2, 17)$; $Sz(8)$.

Теорема 3. Если $r(G) = 12$, то G — одна из перечисленных ниже групп:

1—19. $C(12)$; $E(4) \times C(3)$; $C(8)[C(3)]$; $(C(4)[C(3)]) \times C(2)$; $C(4) \times D(6)$; $E(4) \times D(6)$; $C(3) \times D(10)$; $C(9)[E(4)]$ с центром порядка 3; $A_4 \times C(3)$; $C(8)[E(9)]$ с центром порядка 2; $(C(4), E(9)) \times C(2)$; $A_4 \times D(6)$; $AGL(1, 7)[C(3)]$, $\bar{h} = (1, 2, 6^3, 7^2, 14^2, 21^3)$; $G/Z(G) = (Q(8), E(9))$ и $Z(G) = C(2)$ не выделяется в G прямым множителем; $(Q(8), E(9)) \times C(2)$; $AGL(1, 7)[E(4)]$, $\bar{h} = (1, 3, 6^4, 7, 21, 28^4)$; $C(6)[G']$, $G' = S(64)$ или $S^0(64)$, $\bar{h} = (1, 3, 12, 16, 24^4, 64^4)$; $(C(8)[C(5), E(81)])$ с $Z(C(8)[C(5)]) = C(2)$.

20—21. $C(4)[C(9)]$ и $C(4)[E(9)]$ с центром порядка 2.

22—51. $(C(2), E(9)) \times C(2)$; $D(36)$; $D(42)$; $D(16)[C(3)]$ и $SD(16)[C(3)]$ с $C_G(C(3)) = D(8) \times C(3)$; $SD(16)[C(3)]$ и $Q(16)[C(3)]$ с $C_G(C(3)) = Q(8) \times C(3)$; $D(10) \times D(6)$; $(C(3), E(4) \times C(7))$; $SL(2, 3)[E(4), G' = Q(8) \times E(4), \bar{h} = (1^2, 3^2, 6^4, 16^4)$; $C(4)[E(27), g/g' = 4, \bar{h} = (1, 2, 4^6, 9, 18, 27^2)]$; $Q(8)[E(27), \bar{h} = (1, 2, 8^3, 9, 18^4, 54^2)]$; S_5 ; S_5 ; $PSL(2, 7) \times C(2)$; $D(6)[H, H = S(64) \text{ или } S^0(64), \bar{h} = (1, 3, 12^5, 48^4, 128)]$; $A[H, A = C(4)[C(3)] \text{ или } D(12), H = S(64) \text{ или } S^0(64), g/g' = 4, G' \text{ — группа Фробениуса}, \bar{h} = (1, 3, 12, 16, 48^2, 96^4, 128^2)]$; $(Q(16), E(81))$; $(C(4)[C(5), E(81)])$; $G/E(16) = S_5$, $\bar{h} = (1, 15, 40, 60^2, 120^2, 320^2, 240^3, 384)$; $(SL(2, 3), E(121))$; $PSL(2, 19)$; $PSL(3, 3)$; M_{22} ; $(SL(2, 5), E(361))$; $Z(G) = C(2), G/Z(G) = (C(3), C(4) \times C(4))$, G содержит нормальную подгруппу $E(4)$ с $G/E(4) \cong SL(2, 3), \bar{h} = (1^2, 3^2, 6^4, 16^4)$.

§ 3. Известные результаты

В лемме 1 мы не указываем $\bar{h}$, отсылая к [3].

Лемма 1*. Если G неабелева простая с $r(G) \leq 12$, то $G \in \{A_5, PSL(2, 7), A_7, PSL(2, 9), PSL(2, 11), PSL(2, 13), PSL(2, 8), PSL(3, 4), M_{11}, Sz(8), PSL(2, 17), M_{22}, PSL(2, 19), PSL(3, 3)\}$.

Мы предполагаем, что читателю знаком список всех G с $r(G) \leq 9$ из [1].

Лемма 2. Пусть R нормальная в G , $\bar{x} = xR \neq R$, $\bar{G} = G/R$. Если $r_G(xR) = 1$, а $C_G(\bar{x}) = L$, то $R \leq L'$.

Лемма 3. Пусть R — минимальная нормальная p -подгруппа в G , Q/R — нормальная подгруппа порядка q в G/R . Если Q ненильпотентная, она является группой Фробениуса.

Лемма 4. Пусть x — элемент порядка m в G , $|N_G(\langle x \rangle): C_G(x)| = t$. Тогда образующие $\langle x \rangle$ принадлежат точно $\varphi(m)/t$ различным G -классам (здесь φ — функция Эйлера).

Лемма 5. Пусть R — минимальная нормальная p -подгруппа в G ; Q/R — такая нормальная подгруппа в G/R (порядок Q/R равен степени p), что все подгруппы порядка p из Q/R сопряжены в G/R . Если Q неабелева, она специальная и $\exp Q = p$ или $\langle x \in Q | x^p = 1 \rangle = R$. Если $|Q/R| = p^2$ и Q неабелева, то $|R| = p$ и $\exp Q = p$ или $Q = Q(8)$.

Леммы 2—5 см. в [2].

Лемма 6. Неинвариантная силовская подгруппа группы Фробениуса циклическая или обобщенная группа кватернионов, инвариантный множитель нильпотентен.

Лемма 7. (Бернсайд). Пусть H нормальна в G , $|G:H| = p$, $\chi \in \text{Irr}(G)$. Тогда $\chi_H \in \text{Irr}(H)$ или $\chi_H = \varphi_1 + \dots + \varphi_p$, где различные $\varphi_i \in \text{Irr}(H)$.

Лемма 8. Пусть H нормальна в G , $|G:H| = p$, и число всех тех $\varphi \in \text{Irr}(H)$, для которых $\varphi^G \notin \text{Irr}(G)$, равно u . Тогда $r(H) = pr(G) - (p^2 - 1)u$.

Это легко следует из леммы 7 и закона взаимности Фробениуса.

* Неабелевых простых групп G с $r(G) = 13$ нет (сообщение Э. М. Комиссарчика).

Лемма 9 (см. [2]). Пусть H нормальна в G и $|G:H|=p$, $s=r_G(G-H)$, k — число всех тех H -классов, которые являются также G -классами. Тогда $r(G)=s+\frac{1}{p}(r(H)-k)+k$.

Мы часто используем теорему Н. Ито о том, что степень неприводимого характера делит индекс нормальной абелевой подгруппы.

Если $G=A \times B$, то $r(G)=r(A)r(B)$. Поэтому определение групп $G=A \times B$ с $A \neq 1 \neq B$ сводится к определению групп A и B с $r(A), r(B) < r(G)$.

В связи со сказанным можем считать, что

(А) $r(G) \in \{10, 11, 12\}$.

(Б) G непростая.

(В) G не разлагается в нетривиальное прямое произведение.

(Г) $n(G) > 7$.

В связи с большим объемом полного текста статьи мы вначале классифицируем все G с полупростым G' , а затем ограничиваемся лишь теми G , для которых $r(G)=12$. Интересующемуся читателю предлагается самому провести пропущенные доказательства.

Глава 1

Группы с полупростым коммутантом

§ 4. Редукционные леммы

1°. Вначале докажем несколько лемм общего характера, не предполагая, что $r(G) \leq 12$.

Лемма 10. Пусть $M=S_1 \times \dots \times S_k$ — нормальная подгруппа группы G , все S_i неабелевы простые, $k > 1$. Тогда $r_G(M) \geq 3k+3$.

Доказательство. По $\{p, q\}$ -теореме Бернсайда $r_G(S_i) \geq 3$. Пусть x_i, y_i, z_i — элементы различных простых порядков в S_i , $1 \leq i \leq k$. Для любого $x \in G$ имеем $S_i^x \in \{S_1, \dots, S_k\}$. Поэтому следующие $3k+3$ элементов из M попарно не сопряжены в G :

$$x_1, x_1x_2, \dots, x_1x_2 \dots x_k,$$

$$y_1, y_1y_2, \dots, y_1y_2 \dots y_k,$$

$$z_1, z_1z_2, \dots, z_1z_2 \dots z_k,$$

$$x_1y_2, x_1z_2, y_1z_2.$$

Так как все эти элементы неединичные, лемма доказана.

Лемма 11. Пусть M — нормальная подгруппа индекса 2 в G , $P \in \text{Syl}_2(G)$. Если $|P| > 4$ и P не максимального класса, то $s=r_G(G-M) \geq 4$.

Доказательство. Если $x \in G - M$, то x имеет четный порядок. Так как $|C_G(x)| > 4$, то $r_G(G - M) \geq 2$.

Пусть $s = 2$. Тогда $G - M$ разбивается на два G -класса длин $g/2m$ и $g/2n$ соответственно, откуда $g/2 = g/2m + g/2n$, $1/m + 1/n = 1$. Это дает $m = n = 2$, что невозможно, так как $|C_G(x)| > 4$ в силу того, что P не максимального класса.

Пусть $s = 3$. Тогда для натуральных m, n, t имеем $g/2 = g/2m + g/2n + g/2t$, откуда $1/m + 1/n + 1/t = 1$. Пусть $m \leq n \leq t$. Тогда последнее уравнение имеет решения $\{m, n, t\} = \{3, 3, 3\}, \{2, 3, 6\}, \{2, 4, 4\}$. Так как $|P| > 4$ и P не максимального класса, любое из чисел m, n, t больше 2 и одно из них кратно 4. Противоречие, доказывающее лемму.

2°. С этого момента и до конца главы предполагается, что

$$(A') F(G') = 1, r(G) \in \{10, 11, 12\}.$$

Лемма 12. $F(G) = 1$.

Доказательство. Пусть $M = F(G) > 1$. Тогда $MG' = M \times G'$, а из $g/g' \leq 4$ и (B) имеем $M = C(2)$, $g/g' = 4$, так что $r(G) = 12$. Но $(G/M)' < G/M$. Поэтому из списка в [1] следует $r(G/M) \geq 7$, а из $\{p, q\}$ -теоремы Бернсайда выводим $r(G/M) \leq 9$. Обращаясь вновь к [1] и перебирая все G/M с $7 \leq r(G/M) \leq 9$ и $(G/M)' < G/M$, легко получим противоречие.

3° Для сокращения некоторых рассуждений удобно воспользоваться таким результатом: Если G — неабелева простая группа, то ее группа внешних автоморфизмов разрешима. Это — гипотеза Шрейера, вытекающая из классификации конечных простых групп.

Лемма 13. $G' < G$.

Доказательство. Пусть $G' = G$, и возьмем в G минимальную нормальную подгруппу M . Если M непростая, то $r_G(M) \geq 9$ по лемме 10. Так как $G' = G$ и $M < G$, то $r(G/M) \geq 5$ (так как G/M неразрешима, то $r(G/M) \geq 5$ по [1]), и поэтому $r(G) > 12$, противоречие. Пусть M простая. Тогда $G/M C_G(M)$ разрешима и $G = M \times C_G(M)$, что противоречит (B).

Лемма 14. G' — простая группа.

Доказательство. Пусть M — минимальная нормальная подгруппа в G . Тогда $M \leq G'$ по лемме 12. По лемме 10 и лемме 11 подгруппа M простая и даже является единственной минимальной нормальной подгруппой в G . Поэтому $C_G(M) = 1$, так что G/M разрешима. Предположим, что $M < G'$. Тогда G/M неабелева. Пусть $P \in \text{Syl}_2(G)$.

Предположим, что $\frac{g}{g'} = 4$. Тогда $P \cap G'$ нециклическая по теореме Бернсайда о сдвиге, и отсюда следует, что P не максимального класса (так как в 2-группе максимального класса все нормальные подгруппы индекса 4 циклические). Пусть $G' < G_1 < G$. Тогда $r_G(G - G_1) \geq 4$ по лемме 11. Очевидно, $r_G(G_1 - G') \geq 2$, так что $r_G(G - G') \geq 6$. А так как $M < G'$, то $r_G(M) \leq 3$ (здесь нужны рассуждения, аналогичные доказательству леммы 11), так что $M = A_5$. Теперь из $C_G(M) = 1$ следует: G изоморфна подгруппе из $\text{Aut } A_5 = S_5$, что противоречит нашим предположениям о G .

Пусть $\frac{g}{g'} = 3$. Тогда легко показать, как и в лемме 11, что $r_G(G - G') \geq 6$.

Благодаря тому, что $Sz(2^{2n+1})$ — единственная неабелева простая группа, порядок которой не делится на 3 [4], можем считать, что 3 делит $|M|$. Так как $r_G(G' - M) \geq 2$, то $r_G(M) \leq 3$, и снова получается противоречие, как и в предыдущем абзаце.

Пусть, наконец, $\frac{g}{g'} = 2$. Так как простые группы с силовской 2-подгруппой максимального класса известны и для них известна группа внешних автоморфизмов, можем считать, что P не максимального класса. Тогда $r_G(G - G') \geq 4$ по лемме 11. Отметим, что G/M неабелева разрешимая, $|G/M : G'/M| = |G/M : (G/M)'| = 2$. Как и выше, $r_G(M) > 3$. Но, если $r_G(M) = 4$, то строение такой M известно по теореме М. Судзуки о группах с нильпотентными централизаторами, в частности, $\text{Out } M$ абелева: тогда $M < G'$ невозможно. Итак, $r_G(M) \geq 5$. Так как $r_G(G') \leq 5$, получаем $M = G'$. Лемма доказана.

Итак, G' простая и $\frac{g}{g'} \leq 4$.

§ 5. $\frac{g}{g'} = 2$

В этом параграфе $P \in \text{Syl}_2(G)$.

Если $P \cap G'$ максимального класса или абелева, то применение известных классификационных результатов дает две группы: $G = PGL(2, 9)$ и $G = S_6$, $r(G) = 11$. Далее считаем, что $P \cap G'$ не максимального класса и неабелева. Тогда $s = r_G(G - G') \geq 4$ по лемме 11. Кроме того, в обозначениях леммы 9 имеем $k \geq 2$.

1°. $r(G) = 10$. Тогда по лемме 9.

$$10 = r(G) = s + \frac{1}{2}(r(G') + k),$$

откуда $r(G') \leq 10$. Перебирая все простые G' с $r(G') \leq 10$ (см. лемму 1), убеждаемся, что $r(G) \neq 10$. При этом используется тот факт, что $G/G' \cong C(2)$ действует как группа перестановок на G -классах одной и той же фиксированной длины, и это соображение позволяет оценить k снизу, что существенно уменьшает проверку.

2°. $r(G) = 11$. Тогда из $r(G) = s + \frac{1}{2}(r(G') + k)$ следует $r(G') \leq 12$. Но $r(G') = 2r(G) - 3u$, где $u \geq 0$ целое (лемма 8). Итак, $r(G') = 22 - 3u$, то есть $r(G') \equiv 1 \pmod{3}$. Поэтому $r(G') \in \{7, 10\}$, и снова, перебирая группы из леммы 1, убеждаемся, что это невозможно.

3°. $r(G) = 12$. Тогда из $r(G) = s + \frac{1}{2}(r(G') + k)$ следует $r(G') \leq 14$. По лемме 8, однако, $r(G') = 2r(G) - 3u = 24 - 3u \equiv 0 \pmod{3}$, откуда $r(G') \in \{6, 9, 12\}$. Пусть, например, $G' = PSL(3, 3)$ с $\bar{h}(G') = (1, 104, 117, 432^4, 984, 702^3, 936)$. Так

как имеется 6 «нечетных» показателей, то $k \geq 6$, и поэтому $r(G) = 12 \geq 4 + \frac{1}{2}(r(G') + 6)$, откуда $r(G') \leq 10 < 12 = r(PSL(3, 3))$, противоречие. Аналогично отбрасываются и другие кандидатуры на роль G' .

§ 6. $\frac{g}{g'} = 3$

Так как все неабелевы простые 3'-группы известны [4], можем считать, что 3 делит g' . Так как $r(G) = n(G) + \frac{g}{g'} \geq 8 + \frac{g}{g'}$, то $r(G) \geq 11$. Так как $r_G(G - G') \geq 6$, то $r_G(G') \leq r(G) - 7$. Если $r(G) = 11$, то $r_G(G') \leq 4$, так что $G' \in \{A_5, PSL(2, 7), PSL(2, 8), PSL(2, 9)\}$. Проверка дает $G = \text{Aut } PSL(2, 8)$. Далее пусть $r(G) = 12$. Тогда $r_G(G') \leq 5$. В обозначениях леммы 9 имеем

$$12 = r(G) = s + \frac{1}{3}(r(G') - k) + k = s + \frac{1}{3}(r(G') + 2k).$$

Так как из $3/g'$ следует $k \geq 2$, то $r(G') \leq 14$. По лемме 8 имеем

$$r(G') = 3r(G) - (3^2 - 1)u = 36 - 8u,$$

где $u \geq 0$ целое. Это влечет $r(G') = 12$. Из леммы 1 следует, что $r_G(G') \leq 5$ лишь для $G' = PSL(2, 19)$. Тогда $|P \cap G'| = 4$, а этот случай уже рассмотрен.

§ 7. $\frac{g}{g'} = 4$

Тогда $r(G) = n(G) + \frac{g}{g'} \geq 8 + 4 = 12$, то есть $r(G) = 12$. Так как $P \cap G'$ нециклическая, P не максимального класса. Мы знаем, что $r_G(G - G') \geq 6$, так что $r_G(G') \leq 5$. Как и выше, $r_G(G') > 4$, так что $r_G(G') = 5$. Если G_1 -подгруппа индекса 2 в G , то $s = r_G(G_1 - G') \geq 4$ по лемме 11, а $k \geq 2$ (см. обозначения в лемме 9), кроме того, $12 = r(G) = s + \frac{1}{2}(r(G_1) + 2)$, откуда $r(G_1) \leq 14$. По лемме 8 имеем $r(G_1) = 2r(G) - 3u = 24 - 3u \equiv 0 \pmod{3}$. Так как $|G_1 : G'_1| = 2$, по доказанному выше это невозможно.

Итак, все G с $r(G) \in \{10, 11, 12\}$ и $F(G') = 1$ найдены.

Глава 2

Группы с неполупростым коммутантом

Как уже было сказано, в этой главе мы ограничиваемся случаем $r(G)=12$. Итак, все G с $r(G) \leq 11$ считаются известными (см. [1] и теоремы 1, 2). Во всей этой главе используются такие обозначения: R — неединичная абелева G -допустимая подгруппа наименьшего порядка в G' ; $|R|=p^a$; $\bar{G}=G/R$, $\bar{G}'=G'/R$, $|\bar{G}'|=\bar{g}'$, $|\bar{G}|=\bar{g}$. Очевидно, $r(\bar{G}) < r(G)$, так что строение $\bar{G}$ известно. Далее, полагаем $Irr(G) - Irr(\bar{G}) = \{\chi^{r(\bar{G})+1}, \dots, \chi^{r(G)}\}$ (считаем, что $Irr(\bar{G})$ состоит из тех $\chi \in Irr(G)$, для которых $R \leq \ker \chi$). Введем обозначение

$$\Sigma(G, R) = \chi^{r(\bar{G})+1}(1)^2 + \dots + \chi^{r(G)}(1)^2.$$

Очевидно, $\Sigma(G, R) = g - \bar{g}$. По известной теореме Н. Ито, $\chi^i(1) | \bar{g}$. Кроме того, в силу выбора R , $\chi^i(1) > 1$ для $1 + r(\bar{G}) \leq i \leq r(G)$.

§ 8. Группа G нильпотентная

Так как предположено, что G не распадается в нетривиальное прямое произведение, то G — p -группа. Так как $\frac{g}{g'} \leq 4$, то G — 2-группа, а так как G неабелева, она — 2-группа максимального класса. Но у таких G число классов нечетно. Далее G предполагается ненильпотентной.

§ 9. $r(\bar{G})=2$

Тогда $\bar{G} = C(2)$ (здесь мы пользуемся списком в [1]; аналогично и во всех оставшихся случаях). Так как G ненильпотентная, то $G = (C(2), E(p^a))$ по лемме 3. В этом случае $12 = r(G) = 2 + \frac{1}{2}(p^a - 1)$, $p^a = 21$, противоречие.

§ 10. $r(\bar{G})=3$

Тогда $\bar{G} \in \{C(3), D(6)\}$ по [1].

1°. $\bar{G} = C(3)$. Тогда $G = (C(3), E(p^a))$ по лемме 3, и $12 = r(G) = 3 + \frac{1}{3}(p^a - 1)$, $p^a = 28$, противоречие.

2°. $\bar{G} = D(6)$. Если G' нильпотентная, то $p^a = 3$ по выбору R , и тогда $r(G) < 12$. Так как G' ненильпотентная, она является группой Фробениуса по лемме 3, $f(G) = 1$ по лемме 6. Поэтому $r_G(R) \leq r(G) - 4 = 8$, $p^a \leq 1 + 3 + 7 \cdot 6 = 46$.

Так как $C_G(R) = R$, то $a > 1$, так что $p^a \in \{4, 16, 25\}$. Кроме того, $G = N_G(Q)[R]$ с $Q \in \text{Syl}_3(G)$. Если $p^a = 4$, то $G = S_4$ и $r(G) < 12$. Если $p^a = 16$, то $\Sigma(G, R) = 90$, а это число нельзя представить в виде суммы 9 квадратов чисел, больших 1 и делящих 6. По той же причине $p^a \neq 25$.

§ 11. $r(\bar{G}) = 4$

Тогда $\bar{G} \in \{C(4), E(4), A_4, D(10)\}$.

1°. $G = C(4)$ или $E(4)$.

Так как G ненильпотентная, $p > 2$. Если $P \in \text{Syl}_2(G)$ и $P = E(4)$, то $Z(G) = C(2)$ выделяется в G прямым множителем, вопреки (В). Итак, $P = C(4)$. Если $G = (P, R)$, то $12 = r(G) = 4 + \frac{1}{4}(p^a - 1)$, $p^a = 33$, противоречие. Итак, G — не группа Фробениуса. Тогда $Z(G) = C(2)$, $a = 1$, $r(G/Z(G)) = 6$, $p^a = 1 + 2 \cdot 4 = 9$, $a > 1$, противоречие.

2°. $\bar{G} = D(10)$.

Как и выше, G' ненильпотентная, и поэтому является группой Фробениуса по лемме 3. Так как $C_G(R) = R$, то $a > 1$. Далее, $f(G) = 1$ по лемме 6, $p^a \equiv 1 + 5 + 6 \cdot 10 = 66$, откуда, с учетом теоремы Силова, $p^a = 16$. Но $g - \bar{g} = 150 = \Sigma(G, R) \equiv 2 \pmod{3}$ (так как $\Sigma(G, R)$ — сумма восьми квадратов чисел, делящих 10), противоречие.

3°. $\bar{G} = A_4$.

$Z(G) = 1$, так как накрывающая A_4 имеет 7 классов. Если $p = 2$, то $a = 2$, G' абелева по лемме 5, $r(G) = 8 < 12$. Итак, $p > 2$. Если $p^a = 3$, $Q \in \text{Syl}_2(G)$, то G/Q абелева, противоречие. Итак, $p^a > 3$. G' ненильпотентна по выбору R . Тогда $f(G) = 2$ по лемме 6, и по этой же лемме G' содержит элемент порядка $2p$. Поэтому $p^a \equiv 1 + 4 + 3 + 5 \cdot 12 = 68$. Так как $\bar{G}$ изоморфна подгруппе из $\text{Aut } R$, возможно лишь $p^a = 27$. Мы имеем $G = N_G(Q)[R]$, где $Q \in \text{Syl}_2(G')$. Если x — элемент порядка 3 в $N_G(Q)$, то $r_G(xG') \equiv 3$, $r_G(x^2G') \equiv 3$. Так как $r_G(R) \equiv 4$, $r(G) > 12$.

§ 12. $r(\bar{G}) = 5$

1°. $\bar{G} = D(8)$ или $Q(8)$.

Легко проверить, что G не является группой Фробениуса. Так как G' ненильпотентна по выбору R , то G' — группа Фробениуса по лемме 3. Поэтому $\bar{G} = D(8)$, $f(G) \equiv 2$, $r_G(R) \equiv 5$, $p^a \equiv 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 8 = 33$. Далее, $C_G(R) = R$, $a > 1$, $4 | (p^a - 1)$, откуда $p^a \in \{9, 25\}$. В первом случае $r(G) = 9 < 12$. Во втором случае $192 = g - \bar{g} = \Sigma(G, R) \equiv 1 \pmod{3}$,* противоречие.

2°. $\bar{G} = C(5)$. Тогда $G = (C(5), E(p^a))$, $p^a = 1 + 5 \cdot 7 = 36$, противоречие.

3°. $\bar{G} = D(14)$.

Если G' нильпотентная, то $g' \equiv 1 + 2(r(G) - 2) = 21$. Так как $g' = 7p^a$, то возможно лишь $p^a = 3$, и $G = (C(2), C(21)) = D(42)$.

* т.к. $\Sigma(G, R)$ — сумма 7 квадратов чисел, делящих $\bar{g} = 8$.

Если G' ненильпотентная, она — группа Фробениуса, $f(G)=1$, $a>1$, $p^a \leq 1+7+14 \cdot 5=78$, так что $p^a \in \{8, 64\}$. Так как $\text{Aut } R$ содержит подгруппу, изоморфную $D(14)$, $p^a \neq 8$. Если $p^a=64$, то $r(G')=16=2r(G)-3u \equiv 0 \pmod{3}$ по лемме 8, противоречие.

4°. $\bar{G}=(C(3), C(7))$.

Если G' нильпотентная, то $p^a>3$, $7p^a-1 \leq 3 \cdot 9$, откуда возможно $p^a=4$, и получается $G=(C(3), E(4) \times C(7))$. Пусть G' ненильпотентная. Тогда она — группа Фробениуса по лемме 3, $a>1$, $f(G)=2$, $p^a \leq 1+7+4 \cdot 21=92$, откуда $p^a \in \{8, 64\}$. Противоречие теперь следует из леммы 8.

5°. $\bar{G}=AGL(1, 5)$.

Легко проверяется, что G' ненильпотентная. Тогда G' — группа Фробениуса по лемме 3, $a>1$, $p^a \leq 1+10+5 \cdot 20=111$, $p^a \in \{16, 81\}$. В первом случае $300=g-\bar{g}=\Sigma(G, R) \equiv r(G)-r(\bar{G}) \equiv 1 \pmod{3}$, противоречие. Пусть $p^a=81$. Тогда $\bar{d}=(1^4, 4, 10^4, 20^3)$, так что число инволюций в G , $t(G) < 4 \cdot 1+4+4 \cdot 10+3 \cdot 20=108$ по формуле Фробениуса—Шура для числа инволюций. Если x — инволюция в G , то $|G:C_G(x)|=t(G) < 108$, так что $|G:C_G(x)|$ делит 45. Так как $r_G(xG') \equiv 5$, то $r(G)>12$.

6°. $\bar{G}=S_4$.

Так как накрывающая S_4 имеет 8 классов, $Z(G)=1$. Пусть $\bar{L}=L/R$ — нормальная подгруппа порядка 4 в $\bar{G}$.

(5а) $p>3$. Тогда L ненильпотентная по выбору R , $C_G(R)=R$, $a>1$, $r_G(R) \leq 4$, так что $p^a \leq 1+6+8+2 \cdot 24=63$. Так как $\text{Aut } R$ содержит подгруппу, изоморфную S_4 , $p^a>63$.

(5б) $p=3$. Пусть L нильпотентная. Тогда $p^a=3$ по выбору R . Легко проверить, что в этом случае $r(G)=9<12$. Итак, L ненильпотентная. Тогда $C_G(R)=R$, $a>1$. Так как $r_G(G'-L) \geq 3$, то $r_G(R) \leq 3$ и $3^a \leq 1+6+8+24=39$. Так как $\text{Aut } R$ содержит S_4 , то $3^a=27$. Если $Q \in \text{Syl}_2(L)$, то $G=N_G(Q)[R=S_4[E(27)]$. Имеем $r_G(R)=3$, $R-\{1\}$ разбивается на три G -класса длин 6, 8 и 12 соответственно, и тогда G содержит не менее трех G -классов элементов, порядок которых делится на 6. Так как $G-R$ содержит не менее трех G -классов 3-элементов, $r(G)>12$.

(5в) $p=2$. Тогда из $a>1$ следует, что L абелева, а из $r_G(L) \leq 6$ следует $a \leq 3$. Если $a=2$, то из $72=g-\bar{g}=\Sigma(G, R)$ следует $r(G) \neq 12$. Если $a=3$, то $r_G(R) \geq 3$, $r_G(L) \geq 7$, $r_G(G-G') \geq 4$ по лемме 11, $r_G(G'-L) \geq 2$, $r(G)>12$.

7°. $\bar{G}=A_5$.

Тогда $Z(G)=1$, так как накрывающая A_5 имеет 9 классов. Так как $C_G(R)=R$, то $a>2$. Отсюда сразу же следует $p<7$. Если $p=5$, то $a=3$, и число G -классов, на которые разбиваются 5-элементы из $G-R$, не меньше 10, откуда $r(G)>12$. Итак, p не превосходит 3. Пусть $p=3$. Тогда $a=4$ и $r(G)>12$ по той же причине, что и в случае, когда $p=5$.

Итак, $p=2$. Снова $a \geq 4$. Так как $r_G(R) < 7$ по лемме 2, то $a \leq 8$. Так как 2-элементы из $G-R$ распадаются не менее чем на четыре G -класса, то $r_G(R) \leq 4$, так что $a \leq 7$. Если a нечетно, то G содержит элемент порядка 6 и два G -класса элементов порядка 10, откуда $r_G(R)=1$, 2^a-1 делит 15, про-

тиворечие при $a \geq 5$. Итак, $a \in \{4, 6\}$. Если $a = 6$, то $r_G(R) \leq 2$, что невозможно, так как число неединичных элементов в R не равно сумме двух чисел, одно из которых делит 12 и больше 4, а другое делит 60. Итак, $a = 4$, а в этом случае $r(G) = 9 < 12$ по [1].

§ 13. $r(\bar{G}) = 6$

1°. $\bar{G} = D(12)$ или $C(4)[C(3)]$.

Пусть G' нильпотентная. Тогда $p^a > 2$ (так как число классов у накрывающей $\bar{G}$ не равно 12). Если $p = 3$, то $Q \in \text{Syl}_3(G)$ абелева, откуда $a \leq 2$. Если $a = 1$, то $G = C(4)[C(9)]$ или $G = C(4)[E(9)]$, $Z(G) = C(2)$. Пусть $a = 2$. Тогда $g - \bar{g} = 108 = \Sigma(G, R)$. Так как $\chi^i(1) \nmid 4$, то $\Sigma(G, R) \leq 6 \cdot 4^2 = 96$, противоречие. Если $p \neq 3$, то G' ненильпотентна по выбору R , и тогда G' — группа Фробениуса по лемме 3. Имеем $G = N_G(Q)[R]$ с $Q \in \text{Syl}_3(G)$. В частности, $Z(G) = Z(N_G(Q)) \cong C(2)$, если $p > 2$, и в этом случае, благодаря (B), должно быть $\bar{G} = C(4)[C(3)]$. Из $C_G(R) = R$ следует $a > 1$. Если $\bar{G} = D(12)$, то $p > 2$, $f(G) = 3$ (по лемме 6), так что $r_G(R) \leq 4$, $p^a \leq 1 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 12 = 37$, $p^a = 25$ и $g - \bar{g} = 288 = \Sigma(G, R)$, $r(G) - r(\bar{G}) = 6$, а это невозможно (так как все $\chi^i(1)$ делят 12). Пусть $\bar{G} = C(4)[C(3)]$. Легко проверить, что тогда p нечетно, и тогда G' — группа Фробениуса, $p^a \leq 1 + 6 + 4 \cdot 12 = 55$, так что $p^a \in \{25, 49\}$. Рассмотрение равенства $\Sigma(G, R) = g - \bar{g}$ приводит к противоречию.

2°. $\bar{G} = D(18)$ или $(C(2), E(9))$.

Если G' нильпотентна, то $p^a = 3$ по выбору R . В этом случае $G' = ES(1, 3)$, $r(G) = 10 < 12$.

Пусть G' ненильпотентная. Тогда $p^a > 3$, $C_G(R) = R$, откуда $p^a > 4$, $a > 1$. Если $Q \in \text{Syl}_3(G)$ и $Q = E(9)$; x — элемент порядка 3 из Q , централизующий элемент из $R - \{1\}$, то $1 < Z(\langle x, R \rangle) < R$, противоречие с минимальностью R . Итак, $\bar{G} = D(18)$. Тогда, как и выше, G' — группа Фробениуса, $f(G) = 1$ (по лемме 6), $C_G(R) = R$, $a > 1$, $p^a \leq 1 + 9 + 4 \cdot 18 = 82$, $9 \mid (p^a - 1)$, так что $p^a = 64$. Тогда $r(G') = 16$, и по лемме 8 имеем $16 = r(G') = 2r(G) - 3u = 24 - 3u \equiv 0 \pmod{3}$, противоречие.

3°. $\bar{G} = (C(4), E(9))$.

Пусть G' нильпотентная. Тогда $p^a > 2$ (если $p^a = 2$ и $Q \in \text{Syl}_3(G)$, то G/Q абелева, противоречие, так как Q — собственная подгруппа коммутанта). Ясно, что $p > 2$. Далее, $p^a \leq 9$ по выбору R . Если $p^a = 9$, то G' абелева и $r_G(G') > 12$, противоречие. Итак, $p^a \in \{3, 5, 7\}$. Если G' неабелева, то $p^a = 3$ и R совпадает с центром группы G по результату Л. С. Казарина, касающемуся именно этой группы, и теперь ясно, что $r(G) > 12$. Итак, G' абелева. Тогда $p^a = 3$ (так как $r_G(R) \leq 8$) и $G = C(4)[E(27)]$, $\bar{h} = (1, 2, 4^6, 9, 18, 27^2)$, $\bar{d} = (1^4, 2^2, 4^6)$. Если G' ненильпотентная, то, как и в 2°, $r(G) > 12$.

4°. $\bar{G} = (Q(8), E(9))$.

Так как собственный эпиморфный образ 2-группы максимального класса не равен $Q(8)$, $p^a > 2$. Если $p = 3$, то $P \in \text{Syl}_3(G)$ абелева по результату Л. С. Казарина из 3°, $a = 1$, $P = E(27)$, $G = Q(8)[E(27)]$, $\bar{h} = (1, 2, 8^3, 9, 18^4, 54^3)$, $\bar{d} = (1^4, 2^5, 8^3)$. Пусть G' нильпотентная. Тогда $p^a < 9$ по выбору R , и $p = 5, 7$

не подходят. Далее G' ненильпотентная. Если $p=2$, то $r(G) > 12$ по лемме 2. Итак, $p > 3$. Имеем $G = N_G(Q)[R]$ с $Q \in \text{Syl}_3(G)$. Если x —элемент порядка $3p$ в G , то образующие $\langle x \rangle$ лежат по крайней мере в $\varphi(3p)/2 = p-1$ различных G -классах по лемме 4. Так как $C_G(R) = R$, $a > 1$. Но G содержит элемент порядка $2p$ по лемме 6, и поэтому $r_G(R) = 1$, $p^a - 1 \nmid 12$, противоречие.

5°. $\bar{G} = \text{PSL}(2, 7)$.

В этом случае можно показать, что групп G с $r(G) = 12$ не получается (довольно длинное доказательство этого мы пропускаем).

§ 14. $r(\bar{G}) = 7$

1°. $G \in \{Q(16), D(16), SD(16)\}$.

Легко показать, что в этом случае $G = (Q(16), E(81))$.

2°. $G = D(22)$.

Тогда G' ненильпотентная, и поэтому является группой Фробениуса, $a > 1$, $f(G) = 1$, $p^a \leq 1 + 11 + 3 \cdot 22 = 78$, 11 делит $p^a - 1$, противоречие.

3°. $\bar{G} = \text{SL}(2, 3)$.

Если G —группа Фробениуса, то $G = (\text{SL}(2, 3), E(121))$. Далее пусть G не является группой Фробениуса. Тогда $p > 2$ по лемме 2. В этом случае $C_G(R) = R$ по выбору R , $a > 1$. По лемме Фраттини $G = N_G(Q)[R]$ с $Q \in \text{Syl}_2(G)$, и даже $G = C_G(x)[R]$ для инволюции $x \in G$. Очевидно, $p \neq 3$. Тогда G содержит элемент порядка $3p$, и теперь ясно, что $r(G) > 12$.

4°. $\bar{G} = (C(3), C(13))$. //

Знак // мы ставим в том случае, если, как и в 4°, доказательство пропущено ввиду того, что оно похоже на одно из предыдущих, и при этом не получается новых групп G с $r(G) = 12$.

5°. $\bar{G} = (C(4), C(13))$.

Тогда $G = (C(4), C(13))[E(27) = C(4)[(C(13), E(27))]$. Но среди подгрупп $\text{Aut } R$ нет изоморфных G , противоречие.

6°. $\bar{G} = S_5$.

Если $R = Z(G)$, то $G = \hat{S}_5$ или $G = \check{S}_5$. Далее $Z(G) = 1$.

Как и при рассмотрении случая $\bar{G} = A_5$ получаем $p^a = 16$, $R = E(16)$, $G/E(16) = S_5$, $\bar{h} = (1, 15, 40, 60^2, 120^2, 240^2, 320^2, 384)$, $\bar{d} = (1^2, 4^2, 5^2, 6, 15^4, 30)$.

7°. $\bar{G} = A_6$. //

§ 15. $r(\bar{G}) = 8$

1°. $\bar{G} = \text{AGL}(1, 5)$ или $\bar{G} = C(4)[C(5)]$ с $Z(G) = C(2)$, или $D(20)$.

В этом случае получаются такие группы: $G = E(4)[C(15)]$,

$$\bar{h} = (1, 2^3, 3, 4^2, 5, 6^2, 10, 15), \quad \bar{d} = (1^4, 2^6, 4^2),$$

и $G = (C(4)[C(5), E(81))$.

$$2^\circ. \bar{G} = D(26).//$$

$$3^\circ. \bar{G} = (C(3), E(16)) \text{ или } \bar{G} = (C(3), C(4) \times C(4)).$$

В этом случае получаются такие группы: $\bar{G} = SL(2, 3)[E(4), \bar{h} = (1^3, 3^2, 6^4, 16^4)$, $\bar{d} = (1^3, 2^3, 3^5, 6)$, и $G = C(3)[G', G' \text{ минимальная неабелева с } Z(G') = E(8), \bar{h}$ и $\bar{d}$ такие же, как и у предыдущей группы.

$$4^\circ. \bar{G} = GL(2, 3) \text{ или } \bar{S}_4.//$$

$$5^\circ. \bar{G} = (C(4), C(17)).//$$

$$6^\circ. \bar{G} = (C(3), C(7))[E(8) = C(3)[AGL(1, 8)].$$

По теореме Томпсона о нильпотентности групп с регулярным автоморфизмом простого порядка имеем $p \in \{2, 3, 7\}$. Легко проверить, что при $p=3$ или $p=7$ имеем $r(G) > 12$. Итак, $p=2$. Предположим, что G содержит элемент порядка 14. Тогда G не содержит элемента x порядка 6 с $x^3 \in R$, и поэтому число a четное. Так как $r_G(R) \leq 2$, то $a=2$. Если H — минимальная ненильпотентная подгруппа порядка 56 в G , то $H \cap R = 1$ и $HR = H \times R$ (так как минимальная нормальная подгруппа лежит в центре подгруппы Фиттинга группы G). В частности, $P \in \text{Syl}_2(G)$ абелева. Поэтому $\chi^i(1) \nmid 21$ для любого $\chi^i \in \text{Irr}(G)$, и равенство $g - \bar{g} = 504 = \Sigma(G, R)$ невозможно. Таким образом, G не содержит элемента порядка 14. Тогда G содержит элемент x порядка 6 с $x^3 \in R$, так что $r_G(R) \leq 2$, и теперь ясно, что $a=3$. По лемме 5 и известной характеристизации 2-групп Судзуки, принадлежащей Хигману, G' изоморфна нормализатору силовской 2-подгруппы простой группы Судзуки $Sz(8)$, $r(G') = 10$, и применение леммы 8 приводит к противоречию.

$$7^\circ. \bar{G} = (Q(8), E(25)).//$$

$$8^\circ. \bar{G} = (C(4)[C(3), E(25)].//$$

$$9^\circ. \bar{G} = (SL(2, 3), E(25)).//$$

$$10^\circ. \bar{G} = PSL(2, 11).//$$

$$11^\circ. \bar{G} = M_9.//$$

§ 16. $r(\bar{G}) = 9$

$$1^\circ. \bar{G} = D(8)[C(3) \text{ или } Q(8)[C(3)].$$

Если G' ненильпотентная, то легко проверить, что $r(G) \neq 12$. Если G' нильпотентная, то получаются такие четыре группы: $G = Q(16)[C(3)]$ и $G = SD(16)[C(3)]$ с $C_G(C(3)) = Q(8) \times C(3)$, $G = D(16)[C(3)]$ и $G = SD(16)[C(3)]$ с $C_G(C(3)) = D(8)[C(3)]$.

$$2^\circ. \bar{G} = S_3 \times S_3.//$$

$$3^\circ. \bar{G} = (C(3), C(19)).//$$

$$4^\circ. \bar{G} = D(30).//$$

$$5^\circ. \bar{G} = C(4)[C(15)].$$

Так как $F(G)$ централизует минимальный нормальный делитель группы G , $p \neq 3, 5$. Понятно, что $p \neq 2$. Тогда $C_G(R) = R$, $a > 1$, $\bar{G}$ изоморфна подгруппе из $\text{Aut } R$, $r_G(R) \leq 2$, откуда $p^a \leq 1 + 30 + 60 = 91$, и теперь ясно, что $r(G) > 12$.

$$6^\circ. \bar{G} = D(8)[E(9)].//$$

$$7^\circ. \bar{G} = D(18)[E(4)].//$$

$$8^\circ. \bar{G} = (C(2), E(9))[E(4)].$$

Легко видеть, что $p = 3$, $a \leq 2$. Несложная проверка показывает, что нужно рассмотреть лишь возможность $a = 2$. Тогда $C_G(R) = R$. Но $\text{Aut } R = GL(2, 3)$ не содержит нормальной подгруппы $E(4)$.

$$9^\circ. \bar{G} = SL(2, 5).$$

Если G — группа Фробениуса, то $G = (SL(2, 5), E(361))$. В остальных случаях $r(G) > 12$.

$$10^\circ. \bar{G} = (C(3), S(64)) \text{ или } \bar{G} = (C(3), S^0(64)).//$$

$$11^\circ. \bar{G} = SD(16)[E(9)].//$$

$$12^\circ. \bar{G} = PSL(2, 9)].//$$

$$13^\circ. \bar{G} = PSL(2, 8).$$

Тогда $p = 2$ по лемме 2, $C_G(R) = R$, $a \geq 4$ и $a \equiv 0 \pmod{3}$ (так как G не содержит элемента порядка 14), и поэтому $a \geq 6$. Если $a = 9$, то G содержит элемент порядка 6, $r_G(R) \leq 2$ и $|R| - 1$ не равно сумме двух индексов подгрупп из $\bar{G}$, противоречие. Если $a = 6$, подсчет числа G -классов, состоящих из 2-элементов в $G - R$, дает $r(G) > 12$.

$$14^\circ. \bar{G}/E(16) = A_5.$$

Пусть $p = 2$. Тогда $C_G(R) = F(G)$, так что $a \geq 4$. Так как G не содержит элемента порядка 10, то $a \equiv 0 \pmod{4}$. Пусть $L/F(G)$ — подгруппа порядка 12 в $G/F(G)$. Тогда L — группа Фробениуса порядка $3 \cdot 2^{6+a}$, откуда класс нильпотентности $P \in \text{Syl}_2(L)$ по известному результату Бернсайда ≤ 2 . Из $C_G(R) = F(G)$ следует $Z(P) \leq F(G)$. Если $F(G)$ абелева, то $r_G(F(G)) \geq 5$, и поэтому $r(G) > 12$. Итак, $F(G)$ неабелева, и поэтому она специальная по лемме 5, при этом $R = Z(F(G))$. Пусть $P \in \text{Syl}_2(L)$. Имеем $Z(P) \leq Z(F(G)) = R$, а из $\text{cl } P = 2$ следует, что P/R абелева. Тогда $C_{G/R}(F(G)/R) = G/R$, что противоречит строению $\bar{G}$.

Пусть $p > 2$. Тогда $C_G(R) = R$, $a > 1$. Мы имеем $r_G(R) \leq 2$, и поэтому $p^a \leq 1 + 480 + 960 = 1441$, и ввиду $C_G(R) = R$, при $p > 5$ следует рассмотреть случай $p^a = 11^3$. Но $|R| - 1 = 11^3 - 1 = 1330$ не равно сумме одного или двух делителей числа $\bar{g} = 960$, противоречие. Из леммы 2 следует $p \neq 5$. Остается $p = 3$. Тогда из лемм 6, 2 следует $r_G(R) = 1$, так что $3^a - 1 \mid 960$. Так как G не содержит элемента порядка 15 (в противном случае $r(G) > 12$), то $3^a = 81$. Так как 3-элементы из $G - R$ распадаются не менее, чем на три G -класса, то $r(G) > 12$.

$$15^\circ. \bar{G} = PSL(2, 13)].//$$

16°. $\bar{G} = (\bar{S}_4, E(49))$ или $\bar{G} = (SL(2, 3), E(49))$.

Тогда из лемм 2 и 6 следует $p = 7$. Как и в аналогичных ситуациях выше, показывается, что $r(G) > 12$.

17°. $\bar{G} = A_7$. //

§ 17. $r(\bar{G}) = 10$

В этом параграфе все $\bar{G}$ взяты из заключения теоремы 1.

1°. $\bar{G} = D(28)$ или $\bar{G} = C(4)[C(7)]$. //

2°. $\bar{G} = C(4)[A_4]$ или $\bar{G} = S_4 \times C(2)$.

Легко видеть, что $p \leq 3$. Если $p = 2$, то $|G:C_G(R)|$ делит 6 и в $R - \{1\}$ имеется G -класс длины, делящей 3; поэтому $a \leq 2$. Вычисления с равенством $g - \bar{g} = \Sigma(G, R)$ дают $r(G) > 12$. Пусть $p = 3$. Тогда $r_G(R) = 1$, $g - \bar{g}$ — не сумма квадратов двух делителей $\bar{g}$ (по теоретико-числовой теореме Ферма), так что $r(G) > 12$. (В этом случае $C_G(R) = R$ и $a = 2$, так что $g - \bar{g} = 384$.)

3°. $\bar{G} = D(34)$. //

4°. $\bar{G} = C(2)[ES(1, 3)]$.

Если $p = 3$, то $a = 1$ и $g - \bar{g}$ — не квадрат и не сумма двух квадратов чисел, делящих 18, $r(G) > 12$. Легко проверить, что $r(G) > 12$, если $p \neq 3$.

5°. $\bar{G} = D(6)[E(16)]$ или $D(6)[(C(4) \times C(4))]$.

Тогда $p = 2$, $R \leq Z(P)$, где $P \in \text{Syl}_2(G')$, и отсюда следует $a \leq 2$. Так как $g - \bar{g}$ — сумма двух квадратов, $a = 2$. Так как P' циклическая, если $P/R = C(4) \times C(4)$, то $\bar{G} = D(6)[E(16)]$. Тогда G' — группа Фробениуса, и $R = Z(P) = P'$, так что P специальная. Отсюда $P = S(64)$ или $S^0(64)$, $G = D(6)[S(64)]$ или $G = D(6)[S^0(64)]$, $\bar{h} = (1, 3, 12^5, 48^4, 128)$, $\bar{d} = (1^2, 2, 3^3, 6, 12^2)$.

6°. $\bar{G} = (C(4), E(25))$ или $(C(4), C(25))$. //

7°. $\bar{G} = A_5 \times C(2)$. //

8°. $\bar{G} = D(10)[E(16)]$.

Понятно, что $p = 2$, и G не содержит элемента порядка 10. Отсюда следует, что $a \equiv 0 \pmod{4}$, и теперь ясно, что $a = 4$. Но тогда $15 \cdot 160 = g - \bar{g}$ — не сумма двух квадратов, $r(G) \neq 12$.

9°. $\bar{G} = ASL(2, 3)$.

Применение леммы 2 дает $p \neq 2$. Из леммы 6 следует $p = 3$, и теперь ясно, что $a \leq 2$. Тогда $g - \bar{g}$ — не сумма двух квадратов, $r(G) \neq 12$.

10°. $\bar{G} = (C(4)[C(3), E(49)])$. //

11°. $\bar{G} = (Q(16), E(49))$. //

12°. $\bar{G} = M_{11}$.

Тогда $p > 2$ по лемме 2. Из леммы 6 следует $p = 3$, $r_G(R) = 1$. Далее, $C_G(R) = R$, $a \equiv 0 \pmod{4}$, и теперь ясно, что $r_G(R) > 1$, противоречие.

$$13^\circ. G = (SL(2, 5), E(121)). //$$

$$14^\circ. \bar{G} = PSL(3, 3). //$$

§ 18. $r(\bar{G}) = 11$

В этом параграфе $g - \bar{g}$ — квадрат. Если $q \neq p$ — простой делитель $\bar{g}$, то силовская q -подгруппа Q группы G циклическая или обобщенная группа кватернионов по лемме 6 (так как QR -группа Фробениуса). Эти замечания позволяют значительно сократить число рассматриваемых случаев.

$$1^\circ. \bar{G} = Q(32). //$$

$$2^\circ. \bar{G} = D(38). //$$

$$3^\circ. \bar{G}/E(4) = C(4)[A_4 \text{ или } S_4 \times C(2)].$$

Тогда $p = 2$, $a \leq 2$. Так как $g - \bar{g}$ — квадрат, $a = 2$, и получаются такие четыре группы: $G = (C(4)[C(3)][P \text{ или } D(12)[P, P = S(64) \text{ или } S^0(64), \bar{h} = (1, 3, 12, 16^3, 48^2, 96^2, 128^2)]$.

$$4^\circ. \bar{G} = C(3)[ES(2, 2)]. //$$

$$5^\circ. \bar{G} = (C(3), E(25)). //$$

$$6^\circ. \bar{G} = (C(4), C(29)). //$$

$$7^\circ. \bar{G} = AGL(1, 5)[E(16)]. //$$

$$8^\circ. \bar{G} = SL(2, 7). //$$

$$9^\circ. \bar{G} = (Q(8), E(49)). //$$

$$10^\circ. \bar{G} = (Q(8)[C(3), E(49)]). //$$

$$11^\circ. \bar{G} = PSL(2, 17). //$$

$$12^\circ. \bar{G} = \hat{S}_5 \text{ или } \check{S}_5.$$

Тогда $p > 2$ по лемме 2, $\bar{G} = \hat{S}_5$ по лемме 6. Очевидно, G — не группа Фробениуса, и поэтому $p \in \{3, 5\}$. Так как $C_G(R) = R$, то $a > 1$. Если $p = 3$, то $a = 4$ и $g - \bar{g}$ — не квадрат. Если $p = 5$, то $5^a - 1$ делит 48, откуда $a = 2$. Но в этом случае $g - \bar{g}$ — не квадрат.

$$13^\circ. \bar{G} = Sz(8). //$$

Тем самым доказательство теоремы 3 завершено.

Внимательный читатель заметит, что к приведенному в этой главе доказательству надо добавить совсем немного для того, чтобы получить доказательства теорем 2 и 1.

Э. Ландау показал, что если $r(G) \leq k$, то порядок группы G ограничен сверху в терминах k . Однако до сих пор не получено хорошей верхней границы для порядка группы. Чтобы стимулировать активность в этой области, выскажем такую гипотезу: $r(G) \leq \lambda(G)$, где $\lambda(G)$ — число простых множителей $|G|$. Для $r(G) \leq 12$ эта гипотеза верна. Для разрешимых групп гипотеза довольно правдоподобна.

Литература

- [1] В. А. Одинцов, А. И. Старостин, Конечные группы с 9 классами сопряженных элементов, *Матем. зап. Уральского университета*, 1976, с. 114—134.
- [2] J. G. BERKOVIC, The class-number of a finite group (*to appear*).
- [3] Э. А. Комиссарчик, Конечные простые группы с числом классов сопряженности меньшим тринадцати, *ДАН СССР* 237 (1977), 1269—1272.
- [4] G. GLAUBERMAN, Factorizations in local subgroups of finite groups, *CBMS 33* (Regional Conference Series in Mathematics, Amer. Math. Soc.) *Providence, RJ*. 1977.

344006, РОСТОВ-НА-ДОНУ, ЭНГЕЛЬСА 111, КВ. 18 БЕРКОВИЧ ЯКОВ ГИЛЬЕВИЧ

(Поступило 4. VII. 1984 г.)