

Об оценках числа нулей неприводимых характеров конечной группы

Э. М. ЖМУДЬ (Харьков)

Пусть G -неабелева группа, χ -её нелинейный неприводимый характер*); $T_\chi = \{g \in G | \chi(g) = 0\}$ — множество всех его нулей. Множество T_χ , как показал Бернсайд [1] всегда непусто. Ввиду этого представляют интерес нижние оценки числа $n_\chi = |T_\chi|$ нулей характера χ . Известна следующая, принадлежащая П. Галлахеру [11], оценка для величины n_χ : $n_\chi \geq \chi(1)^2 - 1$. В настоящей работе устанавливаются неравенства существенно другого типа, также оценивающие величину n_χ снизу. В отличие от неравенства Галлахера, нижняя грань для n_χ в них зависит не от степени $\chi(1)$ характера χ , а от порядка $|G|$ группы G . Так например, доказано, что $|G| \leq n_\chi(n_\chi - 1)$, откуда, в частности, вытекает конечность класса K_n групп, обладающих хотя бы одним неприводимым характером с заданным числом n нулей. В основе вывода этой и других полученных в работе оценок для n_χ лежит один общий результат А. И. Вейцблита [5], полученный им с помощью некоторого обобщения неравенства Галлахера. Пусть χ_H -ограничение характера χ на подгруппу H группы G . Если χ_H приводим, то, как доказано в [5], $|H| \leq n_\chi$. В §§ 3—5 настоящей работы, составляющих её ядро, исследуются условия достижения в неравенстве $|H| \leq n_\chi$ знака равенства. В связи с этим, мы вводим понятие χ -максимальной подгруппы группы G . Подгруппу H назовём χ -максимальной, если χ_H приводим и $|H| = n_\chi$ **). Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Если $\langle T_\chi \rangle = G$ и подгруппа H группы G χ -максимальна, то $|G:H| = 2$ и $G \setminus H = T_\chi$. Обратно, если $|G:H| = 2$ и $G \setminus H = T_\chi$, то $\langle T_\chi \rangle = G$ и подгруппа H χ -максимальна.

Теорема 2*).** Если G — разрешимая группа с χ -максимальной подгруппой H , причем χ точен и $\langle T_\chi \rangle = G$, то (i) Центр $Z(G)$ и коммутант G' группы G циклически, $|G'|$ нечетно и $H = Z(G) \times G'$; (ii) $G/Z(G) \cong D_m$, где $m = |G'|$ и D_m -группа диэдра порядка $2m$; (iii) $\chi(1) = 2$.

Доказательство теоремы 2 использует, кроме теоремы 1, результаты из § 2, дающие достаточные условия существования общих нулей системы неприводимых

*) В работе рассматриваются только конечные группы и их $\mathbb{C}$ -характеры.

**) Примеры групп с χ -максимальной подгруппой: D_m (m нечетно) — $\chi(1) = 2$, $n_\chi = m$; S_4 — $\chi(1) = 3$, $n_\chi = 8$; S_5 — $\chi(1) = 5$, $n_\chi = 24$.

***). Автор, совместно с С. И. Островской, получили полное описание групп, удовлетворяющих условиям теоремы 2.

водимых характеров группы. Заключительная часть работы (§ 6) посвящена выводу и исследованию неравенств для n_χ , а также — применениям результатов §§ 3—5 к группам, обладающим неприводимым характером χ , для которого n_χ — степень простого делителя порядка группы.

Основные обозначения

$\subset$ — символ строгого включения; $|M|$ — число элементов конечного множества N ; $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{C}$ соответственно — множества натуральных, целых, рациональных, комплексных чисел; $H \leq G$ — « H -подгруппа группы G »; $O(g)$ — порядок элемента $g \in G$; $g^t = t^{-1}gt$ ($t, g \in G$); если $M \subseteq G$, то $M^t = \{g^t | g \in M\}$, $\text{Cl}(M)$ — класс подмножеств G -сопряженных с M , $g^M = \{g^t | t \in M\}$, в частности, $g^G = \text{Cl}(g)$ — класс сопряженных элементов группы G , порождённый элементом g ; $\langle M \rangle$ — подгруппа, порождённая M , $M^\# = M \setminus \{1\}$, $\bar{M} = M \cup \{1\}$; $C_G(g)$ — централизатор $g \in G$; $\text{Aut}(G)$ — группа автоморфизмов группы G ; $[H_1, H_2]$ — взаимный коммутант подгрупп H_1 и H_2 ; $\pi(G)$ — множество всех простых делителей $|G|$; $\pi(g) = \pi(\langle g \rangle)$; $C(n)$ — циклическая группа n -го порядка; $\text{Char}(G)$ — множество всех характеров группы G ; $\text{Irr}(G) = \{\chi \in \text{Char}(G) | \chi \text{ неприводим}\}$; если $\chi \in \text{Char}(G)$, $\alpha \in \text{Aut}(G)$, то $\chi^\alpha(g) = \chi(\alpha g)$ ($g \in G$); ψ^G — характер группы G индуцированный характером ψ подгруппы $H \leq G$; ψ^t ($t \in G$) — характер подгруппы $N \triangleleft G$ G -сопряженный с $\psi \in \text{Char}(N)$: $\psi^t(g) = \psi(tg t^{-1})$ ($g \in N$); $I_G(\psi) = \{t \in G | \psi^t = \psi\}$ — группа инерции характера $\psi \in \text{Irr}(N)$; $\text{Ker } \chi = \{g \in G | \chi(g) = \chi(1)\}$ — ядро характера $\chi \in \text{Char}(G)$; $Z(\chi) = \{g \in G | |\chi(g)| = \chi(1)\}$; $T_\chi = \{g \in G | \chi(g) = 0\}$; $U_\chi = \{g \in G | \chi(g) = 1\}$; 1_G — главный характер группы G ; $(\theta_1, \theta_2)_G = |G|^{-1} \sum \theta_1(g) \overline{\theta_2(g)}$ — скалярное произведение функций $\theta_i: G \rightarrow \mathbf{C}$ ($i = 1, 2$); (a, b) — наибольший общий делитель целых чисел a, b .

§ 1. Некоторые леммы

В этом пункте G неабелева, $\chi \in \text{Irr}(G)$, $\chi(1) > 1$.

Лемма 1.1. [1] $T_\chi = \emptyset$.

Лемма 1.2 [5]. Если $H < G$, то

$$(1) \quad (\chi_H, \chi_H)_H \leq 1 + |T_\chi \setminus H| \cdot |H|^{-1}.$$

Знак равенства в (1) достигается тогда и только тогда, когда $G \setminus H \subseteq T_\chi \cup U_\chi$.

Доказательство. Пусть $\Delta = G \setminus (H \cup T_\chi)$. Если $\Delta \neq \emptyset$, то $\alpha = \prod_{g \in \Delta} \chi(g)$ — отличное от нуля целое алгебраическое число поля $\mathbf{Q}(\varepsilon)$, где $\varepsilon = e^{2\pi i / |G|}$. Так как α выдерживает все автоморфизмы поля $\mathbf{Q}(\varepsilon)$, то $\alpha \in \mathbf{Z}$, откуда $\alpha^2 = \prod_{g \in \Delta} |\chi(g)|^2 \geq 1$. Применяя неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим, приходим к утверждениям леммы. Случай $\Delta = \emptyset$ тривиален.

Следствие. Если $|T_x \setminus H| < |H|$, то $\chi_H \in \text{Irr}(H)$. В частности, $\chi_H \in \text{Irr}(H)$, если $|H| > |T_x|$.

2. Пусть γ -действие группы $\mathbb{G}$ на n -элементном ($n > 1$) множестве «точек» Ω ; $k \in \mathbb{N}$. Действие γ называется *строго k -транзитивным*, если 1) γ k -транзитивно; 2) пересечение γ -стабилизаторов k различных точек тривиально*). Пусть $\text{St } \omega$ -стабилизатор точки $\omega \in \Omega$; γ_ω -действие подгруппы $\text{St } \omega$ на $\Omega_\omega = \Omega \setminus \{\omega\}$, порождённое действием γ .

Лемма 1.3. Действие γ группы $\mathbb{G}$ на Ω k -транзитивно (строго k -транзитивно) тогда и только тогда, когда 1) γ транзитивно; 2) γ_ω $(k-1)$ -транзитивно (строго $(k-1)$ -транзитивно).

Назовём действие γ группы $\mathbb{G}$ на Ω F -действием, если 1) γ транзитивно, но не регулярно, 2) пересечение стабилизаторов любых двух различных точек тривиально.

Следующее утверждение вытекает из хорошо известных свойств групп Фробениуса.

Лемма 1.4. Если γ — F -действие группы $\mathbb{G}$ на Ω , то 1) действие γ точно (т. е. $\bigcap \text{St } \omega = \{1\}$), 2) $\mathbb{G}$ -группа Фробениуса с ядром порядка $n = |\Omega|$.

Лемма 1.5. Пусть $\mathbb{G}$ -группа Фробениуса с ядром $\mathfrak{N}$ порядка n , γ — транзитивное действие группы $\mathbb{G}$ на n -элементном множестве Ω . Тогда γ — F -действие; если, в частности, $|\mathbb{G}| = n(n-1)$ **), то действие γ строго 2-транзитивно.

Доказательство. $|\mathbb{G} : \text{St } \omega| = n$ для любой точки $\omega \in \Omega$. Так как $n = |\mathfrak{N}|$, то $|\text{St } \omega| = |\mathbb{G} : \mathfrak{N}|$ и, следовательно, $(|\text{St } \omega|, |\mathfrak{N}|) = 1$. Поэтому $\text{St } \omega$ — дополнительный множитель группы Фробениуса $\mathbb{G}$. Следовательно, $N_{\mathbb{G}}(\text{St } \omega) = \text{St } \omega$, откуда $|\text{Cl}(\text{St } \omega)| = |\mathbb{G} : \text{St } \omega| = n$. Поэтому $\text{St } \omega_1 \neq \text{St } \omega_2$, если $\omega_1 \neq \omega_2$; так как различные дополнительные множители группы Фробениуса имеют тривиальное пересечение, то $\text{St } \omega_1 \cap \text{St } \omega_2 = \{1\}$. Так как $|\text{St } \omega| = |\mathbb{G} : \mathfrak{N}| > 1$, то действие γ не регулярно. Следовательно, γ — F -действие. Если $|\mathbb{G}| = n(n-1)$, то, как легко видеть, действие γ_ω подгруппы $\text{St } \omega$ на $\Omega_\omega = \Omega \setminus \{\omega\}$ транзитивно. В силу леммы 1.3 отсюда следует, что действие γ строго 2-транзитивно.

Следующее утверждение легко доказывается при помощи результатов Цассенхауза классифицирующих строго 3-транзитивные группы подстановок.*):

Лемма 1.6. Строго 3-транзитивная группа $\mathbb{G}$ подстановок степени $q+1$ ($q = p^a$, p -простое число) является простой лишь при $p=2$, $a \geq 2$; при этом $\mathbb{G} \cong \text{PSL}(2, q)$.

Лемма 1.7. ([2] теорема 8.28.) Пусть $m > 1$ индекс подгруппы $\mathfrak{H} < \text{PSL}(2, q)$ (q -степень простого числа). Тогда $m \geq q+1$ за исключением следующих случаев: 1) $q=2$, $m=2$; 2) $q=3$, $m=3$; 3) $q=5$, $m=5$; 4) $q=7$, $m=7$; 5) $q=9$, $m=6$; 6) $q=11$, $m=11$.

*) Это определение отлично от определения принятого в [6].

**) В общем случае $|\mathbb{G}| = n \cdot m$, где m делит $n-1$.

*) См. напр., [3] теорема 20.5 и её следствия стр. 263.

§ 2. Общие нули системы групповых характеров

1. Семейство $S = \{H_1, \dots, H_m\}$ собственных подгрупп группы G назовём *покрытием* длины m этой группы, если $\bigcup H_i = G$. Покрытия минимальной длины назовём *минимальными покрытиями*. Через $\varrho(G)$ обозначим длину минимальных покрытий группы G ($\varrho(G) = \infty$, если группа G не допускает покрытий). Если все подгруппы H_i покрытия S максимальные, будем называть S M -покрытием. Минимальную длину M -покрытий группы G обозначим через $\varrho_M(G)$. ($\varrho_M(G) = \infty$, если группа G не допускает M -покрытий).

Множество $\mathfrak{D}(G)$ всех покрытий группы G естественным образом упорядочивается: если $S = \{H_1, \dots, H_m\}$ и $T = \{K_1, \dots, K_l\}$ — покрытия группы G , то $S \leq T$, если $m = l$ и $H_i \leq K_i$ ($i = 1, \dots, m$). Очевидно, M -покрытия — максимальные элементы множества $\mathfrak{D}(G)$.

Предложение 2.1. $\varrho(G) = \infty$ тогда и только тогда, когда G — циклическая группа.

Доказательство. Если G циклическа, $G = \langle g \rangle$, то ϱ не содержится ни в одной собственной подгруппе группы G . Поэтому $\mathfrak{D}(G) = \emptyset$, откуда $\varrho(G) = \infty$. Если G не циклическа, то множество циклических подгрупп группы G является её покрытием. Поэтому $\varrho(G) < \infty$.

Предложение 2.2. $\varrho(G) = \varrho_M(G)$.

Доказательство. Очевидно, $\varrho_M(G) \geq \varrho(G)$. Допустим, что $\varrho(G) < \infty$ и $S = \{H_1, \dots, H_m\}$ — минимальное покрытие группы G . Пусть $H_i \subseteq M_i$, где M_i — максимальная подгруппа группы G . Тогда $T = \{M_1, \dots, M_m\}$ — M -покрытие. Поэтому $\varrho_M(G) \leq m = \varrho(G)$. Следовательно, $\varrho(G) = \varrho_M(G)$. Если $\varrho(G) = \infty$, то, очевидно, также и $\varrho_M(G) = \infty$.

Предложение 2.3. Если $N \triangleleft G$, то $\varrho(G/N) \geq \varrho(G)$.

Доказательство. Если $\varrho(G/N) = \infty$, утверждение очевидно. Допустим, что $\varrho(G/N) = n < \infty$ и $\{H_1/N, \dots, H_n/N\}$ — минимальное покрытие группы G/N . Тогда $\{H_1, \dots, H_n\}$ — покрытие группы G , откуда следует, что $n \geq \varrho(G)$. Таким образом, $\varrho(G/N) \geq \varrho(G)$.

Предложение 2.4. Если $N \triangleleft G$, $K \triangleleft G$, $N \subseteq K$, то $\varrho(G/N) \leq \varrho(G/K)$.

Доказательство. $\varrho(G/K) = \varrho(G/N/N/K) \geq \varrho(G/N)$ в силу предложения 2.3.

Предложение 2.5. $\varrho(G) = \varrho(G/\Phi(G))$, где $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G .

Доказательство. В силу предложения 2.2 $\varrho(G) = \varrho_M(G)$. Пусть $\{H_1, \dots, H_n\}$ — M -покрытие группы G . Так как $H_i \not\subseteq \Phi(G)$, то $\{H_1/\Phi(G), \dots, H_n/\Phi(G)\}$ — M -покрытие группы $G/\Phi(G)$. Поэтому $n \geq \varrho(G/\Phi(G))$, откуда $\varrho(G) = \varrho_M(G) = \min n \geq \varrho(G/\Phi(G))$. С другой стороны, в силу предложения 2.3 $\varrho(G/\Phi(G)) \geq \varrho(G)$. Поэтому $\varrho(G) = \varrho(G/\Phi(G))$.

Предложение 2.6. Если $N \triangleleft G$, $N \subseteq \Phi(G)$, то $\varrho(G/N) = \varrho(G)$.

Доказательство. В силу предложений 2.4 и 2.5 $\varrho(G/N) \leq \varrho(G/\Phi(N)) =$

$=\varrho(G)$. С другой стороны, $\varrho(G/N) \cong \varrho(G)$ в силу предложения 2.3. Следовательно, $\varrho(G/N) = \varrho(G)$.

Предложение 2.7. Если группа G нильпотентна, то $\varrho(G) = \varrho(G/G')$.

Доказательство. Так как $G' \subseteq \Phi(G)$, то в силу предложения 2.6 $\varrho(G/G') = \varrho(G)$.

Предложение 2.8. Если $G = A \times B$, то $\varrho(G) \cong \min \{\varrho(A), \varrho(B)\}$. При этом $\varrho(G) = \min \{\varrho(A), \varrho(B)\}$, если $(|A|, |B|) = 1$.

Доказательство. Так как $A \cong G/B$, то $\varrho(A) = \varrho(G/B) \cong \varrho(G)$ в силу предложения 2.3. Аналогично $\varrho(B) \cong \varrho(G)$. Таким образом, $\varrho(G) \cong \min \{\varrho(A), \varrho(B)\}$.

Допустим, что $(|A|, |B|) = 1$. Если H — максимальная подгруппа группы G , то, как легко видеть, $H = A_1 \times B_1$, где $A_1 = H \cap A$, $B_1 = H \cap B$. Так как $H \neq G$, то $A_1 \neq A$ или $B_1 \neq B$. Если $A_1 \neq A$, то $H \cdot B = A_1 \times B \neq G$. Отсюда, ввиду максимальности H , вытекает, что $H = A_1 \times B$. Если $B_1 \neq B$, то $H = A \times B_1$.

Пусть $S = \{H_1, \dots, H_n\}$ — минимальное M -покрытие группы G и пусть $H_i = A_i \times B$ ($i = 1, \dots, r$), $H_{r+i} = A \times B_i$ ($i = 1, \dots, \varrho = n - r$). Очевидно, A_i — максимальные подгруппы группы A , B_i — максимальные подгруппы группы B . Пусть $S_A = \{A_1, \dots, A_r\}$, $S_B = \{B_1, \dots, B_\varrho\}$ (не исключено, что $S_A = \emptyset$ или $S_B = \emptyset$). Допустим, что $r > 0$ и $\varrho > 0$. Докажем, что тогда S_A -покрытие A или S_B -покрытие B . Если это не так, то найдутся такие $a \in A$, $b \in B$, что $a \notin \bigcup A_i$, $b \notin \bigcup B_i$. Пусть $g = a \cdot b$. Так как S -покрытие группы G , то существует такое i , что $g \in H_i$. Если $i \leq r$, то $a \in A_i$ — противоречие; если $i > r$, то $b \in B_i$, что также невозможно. Итак, либо S_A -покрытие A , либо S_B -покрытие B . В первом случае $\{H_1, \dots, H_r\}$ -покрытие $A \times B = G$, что, ввиду $r < n$ противоречит минимальности покрытия S . Вторая возможность также приводит к противоречию. Тем самым доказано, что $s = 0$ или $r = 0$. Если, например, $s = 0$, то $H_i = A_i \times B$ ($i = 1, \dots, n$) $H_n = A_n \times B$ и $\{A_1, \dots, A_n\}$ — M -покрытие подгруппы A . Следовательно, $\varrho(A) = \varrho_M(A) \leq n = \varrho(G)$. С другой стороны, в силу доказанного выше $\varrho(A) \cong \varrho(G)$. Поэтому $\varrho(G) = \varrho(A)$. Аналогично, если $r = 0$, то $\varrho(G) = \varrho(B)$. Так как $\varrho(G) \cong \min \{\varrho(A), \varrho(B)\}$, то $\varrho(G) = \min \{\varrho(A), \varrho(B)\}$.

Предложение 2.8. Пусть p — простое число и G — нециклическая p -группа. Тогда $\varrho(G) = p + 1$.

Доказательство. В силу предложения 2.5 $\varrho(G) = \varrho(G/\Phi(G))$. Так как $G/\Phi(G)$ — нециклическая элементарная абелева группа, то достаточно рассмотреть случай, когда G является элементарной абелевой p -группой. В этом случае $|G| = p^n$, где $n \geq 2$. Пусть $D < G$, $|G:D| = p^2$. Очевидно, существует ровно $p + 1$ максимальных подгрупп $M_1, \dots, M_{p+1}$ группы G , содержащих D . Легко видеть, что $\{M_1, \dots, M_{p+1}\}$ -покрытие группы G . Пусть $\{H_1, \dots, H_k\}$ — произвольное M -покрытие Группы G . Так как $\bigcap H_i \neq \emptyset$, то $p^n = |G| = |\bigcup H_i| < \sum_{i=1}^k |H_i| = kp^{n-1}$, откуда вытекает, что $k \geq p + 1$. Таким образом, $\{M_1, \dots, M_{p+1}\}$ — минимальное M -покрытие группы G , откуда следует, что $\varrho(G) = p + 1$.

Для произвольной конечной группы G положим

$$\pi_0(G) = \{p \in \pi(G) \mid \text{силовские } p\text{-подгруппы нециклически}\}.$$

Предложение 2.9. Если G — нециклическая нильпотентная группа, то $\varrho(G) = \min_{p \in \pi_0(G)} (p+1)$.

Доказательство. Пусть $\pi(G) = \{p_1, \dots, p_k\}$ и $G = P_1 \times \dots \times P_k$, где P_i — силовская p_i -подгруппа группы G ($i = 1, \dots, k$). Допустим, что $P_1, \dots, P_r$ нециклически, остальные силовские подгруппы — циклически. Тогда $\pi_0(G) = \{p_1, \dots, p_r\}$. В силу предложений 2.7 и 2.8 $\varrho(G) = \min \{\varrho(P_1), \dots, \varrho(P_k)\} = \min \{p_1+1, \dots, p_r+1, \infty, \dots, \infty\}$, ибо $\varrho(P_k) = \infty$ при $i > r$. Итак, $\varrho(G) = \min \{p_1+1, \dots, p_r+1\} = \min_{p \in \pi_0(G)} (p+1)$.

Пусть G — разрешимая группа и $G \supset G' \supset \dots \supset G^{(l)} = \{1\}$ — её производный ряд. Введём обозначение

$$\varrho_0(G) = \min \{\varrho(G/G'), \varrho(G'/G''), \dots, \varrho(G^{(l-1)})\}.$$

Легко показать, что $\varrho_0(G) = \infty$ тогда и только тогда, когда группа G циклическа либо метациклическа.

Предложение 2.10. Если группа G нильпотентна, то $\varrho_0(G) = \varrho(G)$.

Доказательство. Так как $G^{(i)}$ нильпотентна, то в силу предложения 2.7 $\varrho(G^{(i)}/G^{(i+1)}) = \varrho(G^{(i)})$. Заметим, что, если $H \leq G$, то $\pi_0(H) \subseteq \pi_0(G)$, откуда вытекает в силу предложения 2.9, что $\varrho(H) \geq \varrho(G)$. В частности, $\varrho(G^{(i)}) \geq \varrho(G)$. Таким образом, $\varrho(G^{(i)}/G^{(i+1)}) \geq \varrho(G)$ ($i = 0, 1, \dots, l-1$). Так как $\varrho(G) = \varrho(G/G')$, отсюда следует, что $\varrho_0(G) = \varrho(G/G') = \varrho(G)$.

2. Пусть $X = \{\chi_1, \dots, \chi_n\}$ — система «длины n » неприводимых нелинейных характеров неабелевой группы G . Общие нули характеров χ_i будем называть нулями системы X . Множество всех нулей системы X обозначим через $T_X: T_X = \bigcap T_{\chi_i}$. Если $\bigcap \text{Ker } \chi_i = \{1\}$, будем называть систему X точной. Будем называть систему $X = \{\chi_1, \dots, \chi_n\}$ A -системой, если $\chi_i = \chi_1^{\alpha_i}$, где $\alpha_i \in \text{Aut}(G)$ ($i = 1, \dots, n$).

Примечание. Группа $\text{Aut}(G)$ естественным образом действует на множестве $\text{Irr}(G)$. Если $\chi \in \text{Irr}(G)$, то $\chi^{\text{Aut}(G)}$ — орбита характера χ . A -система является частью такой орбиты.

Предложение 2.11. Пусть G — неабелева нильпотентная группа и $X = \{\chi_1, \dots, \chi_n\}$ — система её неприводимых нелинейных характеров, причем $n < \varrho(G)$. Тогда $T_X \neq \emptyset$.

Доказательство. Характер χ_i индуцируется из некоторой максимальной подгруппы H_i группы G ($i = 1, \dots, n$). Так как $H_i \triangleleft G$, то $G \setminus H_i \subseteq T_{\chi_i}$ ($i = 1, \dots, n$). Если $T_X = \emptyset$, то $\bigcup H_i = G$. Следовательно, $\{H_1, \dots, H_n\}$ — M -покрытие группы G . Отсюда вытекает, что $n \geq \varrho_M(G) = \varrho(G)$ — противоречие. Таким образом, $T_X \neq \emptyset$.

Предложение 2.12. Пусть $X = \{\chi_1, \dots, \chi_n\}$ — точная A -система разрешимой неабелевой группы G , причем $n < \varrho_0(G)$. Тогда $T_X \neq \emptyset$. В частности, $T_X \neq \emptyset$, если G метациклическа.

Доказательство. Допустим, что $T_X = \emptyset$. Положим $\chi_1 = \chi$, $\chi_i = \chi^{\alpha_i}$, где $\alpha_i \in \text{Aut}(G)$. Рассмотрим характер $\chi_{G'}$. Допустим сначала, что $\chi_{G'}$ не изотипи-

чен, т. е., что $\chi_{G'} = e(\psi^{(1)} + \dots + \psi^{(l)})$, $l > 1$, $\psi^{(i)} \in \text{Irr}(G')$ ($i = 1, \dots, l$). Положим $\psi^{(1)} = \psi$. Так как $l > 1$, то χ индуцируется из подгруппы $H = I_G(\psi)$. Эта подгруппа собственная, так как $|G:H| = l > 1$. Так как $H \supseteq G'$, то $H \triangleleft G$, и следовательно, $G \setminus H \subseteq T_{\chi}^*$. Положим $H_i = \alpha_i^{-1}(H)$. Так как $\alpha_i^{-1}(T_{\chi}) = T_{\chi_i}$, то $G \setminus H_i \subseteq T_{\chi_i}$ ($i = 1, \dots, n$). Так как $\bigcap T_{\chi_i} = T_{\chi} = \emptyset$, то $\bigcup H_i = G$, т. е. $\{H_1, \dots, H_n\}$ -покрытие группы G . Очевидно $H_i \supseteq G'$ ($i = 1, \dots, n$) и $\{H_1/G', \dots, H_n/G'\}$ -покрытие группы G/G' . Поэтому $n \geq \rho(G/G')$, что невозможно, так как по условию $n < \rho_0(G) = \min \{\rho(G/G'), \dots, \rho(G^{(l)})\}$. Таким образом, $\chi_{G'}$ изотипичен, т. е. $\chi_G = e\psi$, где $\psi \in \text{Irr}(G')$. Вместе с тем $(\chi_i)_{G'} = (\chi^{a_i})_{G'} = e\psi^{a_i}$, где $a_i = \alpha_i|_{G'} \in \text{Aut}(G')$. Отсюда вытекает в случае, если $\psi(1) = 1$, что $G' \subseteq Z(\chi_i)$ и, следовательно, $[G, G'] \subseteq \text{Ker } \chi_i$ ($i = 1, \dots, n$). Таким образом, $[G, G'] \subseteq \bigcap \text{Ker } \chi_i = \{1\}$, откуда следует, что группа G нильпотентна. Так как в силу предложения 2.10 $n < \rho_0(G) = \rho(G)$, то на основании предложения 2.11 $T_{\chi} \neq \emptyset$ — противоречие. Таким образом, $\psi(1) > 1$. Положим $\psi_i = \psi^{a_i}$. Так как $\text{Ker } \psi_i = \text{Ker } \chi_i \cap G'$, то $\bigcap \text{Ker } \psi_i = \{1\}$. Поэтому $X_1 = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ — точная A -система группы G' . Так как $T_{\psi_i} = T_{\chi_i} \cap G'$, то $T_{X_1} = \bigcap T_{\psi_i} = \emptyset$. При этом $n < \rho_0(G')$, так как $n < \rho_0(G) = \min \{\rho(G/G'), \dots, \rho(G^{(l-1)})\} \leq \min \{\rho(G'/G''), \dots, \rho(G^{(l-1)})\} = \rho_0(G')$.

Итак, если группа G обладает точной A -системой X длины $n < \rho_0(G)$ и $T_X = \emptyset$, то $n < \rho_0(G')$ и G' обладает точной A -системой X_1 длины n , для которой $T_{X_1} = \emptyset$. В частности, подгруппа G' — неабелева. Многократное повторение вышеизложенного рассуждения приводит к заключению, что при любом $i \leq l-1$ подгруппа $G^{(i)}$ неабелева и обладает точной A -системой X_i длины $n < \rho_0(G^{(i)})$. В частности, подгруппа $G^{(l-1)}$ оказывается неабелевой, что невозможно, так как $(G^{(l-1)})' = G^{(l)} = \{1\}$. Тем самым доказано, что $T_X \neq \emptyset$. Если группа G метациклическая, то $\rho_0(G) = \infty$ и поэтому $T_X \neq \emptyset$ какова бы ни была длина n точной A -системы X .

Предложение 2.13. Пусть G — неабелева конечная группа; N — такой неабелев разрешимый нормальный делитель группы G , что $|G:N| < \rho_0(N)$; χ — точный неприводимый характер группы G . Тогда $T_{\chi} \cap N \neq \emptyset$.

Доказательство. В силу теоремы Клиффорда $\chi_N = e(\psi_1 + \dots + \psi_n)$, где ψ ($i = 1, \dots, n$), — неприводимые характеры подгруппы NG -сопряженные с $\psi = \psi_1$. Так как χ точен и N неабелев, то $\psi(1) > 1$. Поэтому $X = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ — A -система подгруппы N . Так как $n = |G:I_G(\psi)| \leq |G:N| < \rho_0(N)$, то в силу предложения 2.12 $T_X \neq \emptyset$. Если $g \in T_X$, то $\psi_i(g) = 0$ ($i = 1, \dots, n$) и, следовательно, $\chi(g) = 0$. Таким образом, $T_X \cap N \neq \emptyset$.

Следствие 1. Пусть G — неабелева конечная группа, N — её разрешимый неабелев нормальный делитель. Точный неприводимый характер χ группы G имеет в N по крайней мере один нуль, если выполнено одно из следующих условий:

(I) N — Z -группа.*)

(II) N не является Z -группой и $|G:N| \leq \min_{p \in \pi_0(N)} p$.

*) Это легко вытекает из явной формулы для индуцированного характера.

*) Z -группой называется группа с циклическими силовскими подгруппами. Как известно ([10] теорема 9.4.3), всякая нециклическая Z -группа метациклическа.

Доказательство. Если N — Z -группа, то N имеет производный ряд $N \supset N' \supset N'' = \{1\}$ с циклическими факторами. Так как $\varrho(N/N') = \varrho(N') = \infty$, то $\varrho_0(N) = \min\{\varrho(N/N'), \varrho(N')\} = \infty$, откуда вытекает в силу предложения 2.13, что $T_\chi \cap N \neq \emptyset$. Если N не является Z -группой и $|G:N| \leq \min_{p \in \pi_0(N)} p$, то $|G:N| < \varrho_0(N)$. Действительно, очевидно $\pi_0(N^{(i)}/N^{(i+1)}) \subseteq \pi_0(N)$. Так как в силу предложения 2.9 $\varrho(N^{(i)}/N^{(i+1)}) = \min_{p \in \pi_0(N^{(i)}/N^{(i+1)})} (p+1)$ или ∞ , то $\varrho(N^{(i)}/N^{(i+1)}) \geq \min_{p \in \pi_0(N)} (p+1)$. Поэтому $\varrho_0(N) = \min\{\varrho(N/N'), \dots\} \geq \min_{p \in \pi_0(N)} (p+1)$, откуда и следует, что $|G:N| < \varrho_0(N)$. Итак, $|G:N| < \varrho_0(N)$ и, следовательно, в силу предложения 2.13 $T_\chi \cap N \neq \emptyset$.

Следствие 2. Пусть N разрешимый нормальный делитель неабелевой группы G , χ — её точный неприводимый характер, $T_\chi \cap N = \emptyset$, $|G:N| \leq \min_{p \in \pi(N)} p$. Тогда N абелев. В частности, N абелев, если $|G:N| = 2$.

Доказательство. Допустим, что N неабелев. В силу следствия 1 предложения 2.13 N не является Z -группой и $|G:N| > \min_{p \in \pi_0(N)} p \geq \min_{p \in \pi(N)} p$ — противоречие. Таким образом, подгруппа N абелева.

§ 3. χ -Максимальные подгруппы

Как и в § 1, G — неабелева группа, χ — её нелинейный неприводимый характер. Если X — конечная группа, то $(\theta_1, \theta_2)_X$ будет обозначать скалярное произведение $|X|^{-1} \sum_{x \in X} \theta_1(x) \overline{\theta_2(x)}$ функций $\theta_i: X \rightarrow \mathbb{C}$ ($i=1, 2$).

Предложение 3.1. Подгруппа $H < G$ χ -максимальна тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия: (i) $H \cap T_\chi = \emptyset$; (ii) $(\chi_H, \chi_H)_H = 2$; (iii) $G \setminus H \subseteq T_\chi \cup U_\chi$.

Доказательство. 1. Допустим, что H χ -максимальна. Если $H \cap T_\chi \neq \emptyset$, то $|T_\chi \setminus H| < |T_\chi| = |H|$, откуда в силу следствия леммы 1.2 $\chi_H \in \text{Irr}(H)$ — противоречие. Таким образом, $H \cap T_\chi = \emptyset$. Поэтому $|T_\chi \setminus H| = |T_\chi| = |H|$, $1 + |T_\chi \setminus H| \cdot |H|^{-1} = 2$, откуда в силу (1) $(\chi_H, \chi_H)_H \equiv 2$. Так как $\chi_H \notin \text{Irr}(H)$, то $(\chi_H, \chi_H)_H = 2$. Поэтому $(\chi_H, \chi_H)_H = 1 + |T_\chi \setminus H| \cdot |H|^{-1} (= 2)$, откуда следует, ввиду леммы 1.2, что $G \setminus H \subseteq T_\chi \cup U_\chi$. Таким образом все условия (i)–(iii) выполнены.

2. Допустим, что выполнены условия (i)–(iii). Из (ii) следует, что $\chi_H \notin \text{Irr}(H)$: В силу (iii) и леммы 1.2 $(\chi_H, \chi_H)_H = 1 + |T_\chi \setminus H| \cdot |H|^{-1}$, откуда, ввиду (i) и (ii), $2 = (\chi_H, \chi_H)_H = 1 + |T_\chi| \cdot |H|^{-1}$. Поэтому $|H| = |T_\chi|$, т. е. подгруппа H χ -максимальна.

Предложение 3.2. Если $\langle T_\chi \rangle = G$, то χ -максимальные подгруппы группы G максимальны.

Доказательство. Пусть $H < G$ χ -максимальна, $H < K \leq G$. Так $|K| > |H| = |T_\chi|$, то ввиду следствия леммы 1.2 $\chi_K \in \text{Irr}(K)$, откуда $(\chi_K, \chi_K)_K = 1$. Так как $G \setminus K \subseteq G \setminus H \subseteq T_\chi \cup U_\chi$, то ввиду леммы 1.2 $(\chi_K, \chi_K)_K = 1 + |T_\chi \setminus K| \cdot |K|^{-1}$.

Поэтому $|T_x \setminus K| = 0$, откуда $K \supset T_x$. Так как $\langle T_x \rangle = G$, то $K = G$. Таким образом, подгруппа H максимальна.

Предложение 3.3. Если $\langle T_x \rangle = G$ и подгруппа $H \triangleleft G$ χ -максимальна, то $|G:H| = 2$.

Доказательство. По теореме Клиффорда $\chi_H = e(\psi_1 + \dots + \psi_l)$, где $e \in \mathbb{N}$ и $\psi_i \in \text{Irr}(H)$, $\psi_i \neq \psi_j$ при $i \neq j$. В силу предложения 3.1 $e^2 l = (\chi_H, \chi_H)_H = 2$, откуда $e = 1$, $l = 2$. Так как $|G:I_G(\psi_1)| = l > 1$ и $I_G(\psi_1) \supseteq H$, то ввиду предложения 3.2 $I_G(\psi_1) = H$ и $|G:H| = 2$.

Пусть $H < G$ и $D = \bigcap_{t \in G} H^t$.

Предложение 3.4. Если подгруппа H χ -максимальна, то (i) $G \setminus D \subseteq T_x \cup U_x$; (ii) $Z(\chi) \subseteq D$.

Доказательство. Если $g \in G \setminus D$, то $g \in G \setminus H^t = (G \setminus H)^t$ для некоторого $t \in G$. Так как подмножества T_x и U_x нормальны, то в силу предложения 3.1 $g \in (T_x \cup U_x)^t = T_x \cup U_x$. Таким образом, $G \setminus D \subseteq T_x \cup U_x$. Если $g \in Z(\chi)$, то $|\chi(g)| = \chi(1) > 1$, откуда $g \notin T_x \cup U_x$. Следовательно, $Z(\chi) \subseteq D$. Таким образом, $Z(\chi) \subseteq D$.

§ 4. Доказательство Теоремы 1.

Пусть $\chi \in \text{Irr}(G)$, $\chi(1) > 1$, $\langle T_x \rangle = G$ и H — χ -максимальная подгруппа группы G . Допустим, что $|G:H| > 2$. Тогда $H \triangleleft G$ в силу предложения 3.3. Отсюда в силу предложения 3.4 вытекает, что $Z(\chi) \subseteq D \subset H$. В связи с этим, рассмотрим два случая: (1) $Z(\chi) \neq D$; (2) $Z(\chi) = D$.

Случай 1. $Z(\chi) \neq D$.

Ввиду предложения 3.4 и леммы 1.2 $(\chi_D, \chi_D)_D = 1 + |T_x \setminus D| \cdot |D|^{-1} = 1 + |T_x| \cdot |D|^{-1} = 1 + |H| \cdot |D|^{-1} = 1 + |H:D|$. Таким образом,

$$(2) \quad (\chi_D, \chi_D)_D = 1 + |H:D|$$

Пусть

$$(3) \quad \chi_D = e(\varphi_1 + \dots + \varphi_l)$$

— клиффордовское разложение характера χ_D : $\varphi_i \in \text{Irr}(D)$ G -сопряжены и различны, $e \in \mathbb{N}$, $l = |G:I_G(\varphi)|$, где $\varphi = \varphi_1$.

Если $l = 1$, то $\chi_D = e\varphi$; так как $D \subset H$, то $T_\varphi = D \cap T_x = \emptyset$. Поэтому в силу леммы 1.1 $\varphi(1) = 1$, откуда следует, что $D \subseteq Z(\chi)$ — противоречие. Итак, $l > 1$ и, следовательно, $K = I_G(\varphi) \neq G$. В силу (3) $\chi = \eta^G$, где $\eta \in \text{Irr}(K)$. Поэтому $\chi_K \notin \text{Irr}(K)$,*) откуда в силу леммы 1.2 $|K| \leq |T_x| = |H|$. В силу (2) и (3) имеем

$$(4) \quad e^2 l = 1 + |H:D|.$$

Так как $l = |G:I_G(\varphi)| = |G:K|$, то, ввиду (4) $(|G:K|, |H:D|) = 1$. Так как $|G:H| \cdot |H:D| = |G:K| \cdot |K:D|$, откуда вытекает, что $|G:K|$ делит $|G:H|$, а

*) Это легко доказывается при помощи теоремы взаимности Фробениуса.

потому $|H|$ делит $|K|$. Следовательно, $|H| \leq |K|$. Таким образом,

$$(5) \quad |K| = |H|$$

и, следовательно,

$$(6) \quad l = |G:H| = |G:K|.$$

Так как e — степени некоторого неприводимого проективного представления группы K/D , то e делит $|K:D|$ (*). Ввиду $|K:D| = |H:D|$ с помощью (4) получаем $e = 1$. Учитывая это и (6), представим (3) и (4) в виде

$$(7) \quad |G:K| = 1 + |K:D|;$$

$$(8) \quad \chi_D = \varphi_1 + \dots + \varphi_l.$$

Так как $\chi_K \notin \text{Irr}(K)$ и $|K| = |T_x|$, то подгруппа K χ -максимальна. Так как $K = I_G(\varphi)$, то $D \leq K < G$. Если $K \triangleleft G$, то в силу предложения 3.3 и равенства (5) будем иметь $|G:H| = |G:K| = 2$ — противоречие. Таким образом, $K \not\triangleleft G$. В силу предложения 3.1 $K \cap T_x = \emptyset$, откуда $K^G \cap T_x = \emptyset$, где $K^G = \bigcup K^t$. Так как χ индуцируется из K , то $G \setminus K^G \subseteq T_x$, откуда ввиду $K^G \cap T_x = \emptyset$, получаем:

$$(9) \quad G \setminus K^G = T_x.$$

Из (9) и равенства $|T_x| = |K|$ вытекает

$$(10) \quad |K^G| = |G| - |K|.$$

Вычислим теперь $|K^G|$ другим способом. Так как $K \triangleleft G$ и так как в силу предложения 3.2 подгруппа K максимальна, то $N_G(K) = K$. Поэтому $|\text{Cl}(K)| = |G:N_G(K)| = |G:K| = l$. Пусть $\text{Cl}(K) = \{K_1 = K, \dots, K_l\}$. Очевидно $K_i \supset D$ ($i = 1, \dots, l$). В силу (7) и (10) имеем: $|K^G| = |\bigcup K_i| = |D \cup \{\bigcup_i (K_i \setminus D)\}| \leq |D| + \sum |K_i \setminus D| = |D| + l(|K| - |D|) = |G| - |K| = |K^G|$. Отсюда следует, что

$$|D \cup \{\bigcup_i (K_i \setminus D)\}| = |D| + \sum_i |K_i \setminus D|.$$

Поэтому подмножества $\Delta_i = K_i \setminus D$ попарно не пересекаются. Рассмотрим транзитивное действие γ группы $\mathfrak{G} = G/D$ на множестве $\Omega = \text{Cl}(K)$ порождённое действием группы G на Ω сопряжениями. Так как γ -стабилизатор $\text{St } K_i$ «точки» K_i совпадает с $N_G(K_i)/D = K_i/D$ и $K_i \neq D$, то действие γ не регулярно. Если $i \neq j$, то $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$, откуда следует, что $K_i \cap K_j = D$. Поэтому $\text{St } K_i \cap \text{St } K_j = \{1\}$. Таким образом, γ — F -действие. В силу леммы 1.4 $\mathfrak{G}$ -группа Фробениуса с ядром $\mathfrak{N}$ порядка $|\Omega| = l = |G:K|$. Пусть $\mathfrak{K} = K/D$. Так как $|\mathfrak{G}:\mathfrak{K}| = |G:K| = |\mathfrak{N}|$, то $\mathfrak{K}$ — дополнительный множитель в $\mathfrak{G}$. Пусть $D \subseteq N < G$, $\mathfrak{N} = N/D$. Так как в силу (9) $T_x = G \setminus K^G$ и $D \subset K^t$ при любом $t \in G$, то, обозначив через $\bar{M}$ канонический образ подмножества $M \subseteq G$ в группе $\mathfrak{G} = G/D$, будем иметь $\bar{T}_x = \bar{G} \setminus \bar{K}^G = \mathfrak{G} \setminus \mathfrak{K}^{\mathfrak{G}} = \mathfrak{N}^{\#}$. Поэтому $T_x \subset N$, откуда $G = \langle T_x \rangle \subseteq N$, что невозможно, так как $N/D = \mathfrak{N} \neq \mathfrak{G}$. Таким образом, рассматриваемый случай невозможен.

*) См. напр. [2] Satz 17.5.

Случай 2. $Z(\chi) = D$.

Так как $(T_\chi \cup U_\chi) \cap Z(\chi) = \emptyset$, то в силу предложения 3.4 $G \setminus Z(\chi) = T_\chi \cup U_\chi$. Пусть $\theta_0 = \chi\bar{\chi}$, где $\bar{\chi}$ — характер комплексно сопряженный с χ . Обозначив через $\bar{g}$ канонический образ элемента $g \in G$ в $\mathbb{G} = G/Z(\chi)$, определим характер θ группы $\mathbb{G}$, полагая $\theta(\bar{g}) = \theta_0(g) = |\chi(g)|^2$. Это определение корректно, так $\text{Ker } \theta_0 = Z(\chi)$. Пусть $A = T_\theta$, $B = \{\bar{g} \in \mathbb{G} | \theta(\bar{g}) = 1\} = U_\theta$. Легко видеть, что $\mathbb{G}^* = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ и

$$(11) \quad A = \bar{T}_\chi, \quad B = \bar{U}_\chi.$$

В частности, $A \neq \emptyset \neq B$. В силу леммы 1.16 статьи [6] $\mathbb{G}$ — несвязная группа с нормальным C -разбиением $\{A, B\}$. Так как $\langle T_\chi \rangle = G$, то ввиду (11) $\langle A \rangle = \mathbb{G}$. Пусть $\mathfrak{H} = H/Z(\chi)$. Так как $|\mathfrak{H}| = |H| \cdot |Z(\chi)|^{-1} = |T_\chi| \cdot |Z(\chi)|^{-1}$ и $T_\chi Z(\chi) = T_\chi$, то T_χ разбивается на $|T_\chi| \cdot |Z(\chi)|^{-1}$ смежных классов по $Z(\chi)$. Поэтому

$$|T_\chi| \cdot |Z(\chi)|^{-1} = |\bar{T}_\chi| = |A|.$$

Таким образом,

$$(12) \quad |\mathfrak{H}| = |A|$$

Заметим, кроме того, что $H \setminus Z(\chi) \subset G \setminus Z(\chi) = T_\chi \cup U_\chi$; так как $H \cup T_\chi = \emptyset$, то $H \setminus Z(\chi) \subseteq U_\chi$. Отсюда следует, что $\mathfrak{H}^* \subseteq \bar{U}_\chi = B$. Так как централизаторы элементов из A содержатся в $\hat{A} = A \cup \{1\}$, то действие сопряжениями подгруппы $\mathfrak{H}$ на A полурегулярно. Пусть $\bar{g} \in A$. Тогда $\bar{g}^{\mathfrak{H}} \subseteq A$ и $|\bar{g}^{\mathfrak{H}}| = |\mathfrak{H}|$, откуда в силу (12) $\bar{g}^{\mathfrak{H}} = A$. Следовательно, $A = \text{Cl}(\bar{g})$. Таким образом, A — класс сопряженных элементов группы $\mathbb{G}$. Так как подмножество A замкнуто*), то в A существуют элементы простого порядка p . Так как A — класс сопряженных элементов группы $\mathbb{G}$, то все элементы из A имеют порядок p . В силу леммы 1.16 статьи [6] элементы подмножества B являются p' -элементами. Так как $\mathfrak{H} \subseteq \bar{B}$, отсюда следует, что $\mathfrak{H}$ — p' -подгруппа. Пусть $\bar{g} \in A$. Тогда $|A| = |\text{Cl}(\bar{g})| = |\mathbb{G} : C_{\mathbb{G}}(\bar{g})|$. Так как $|A| = |\mathfrak{H}|$ и $\mathfrak{H}$ — p' -подгруппа, то $|\mathbb{G} : C_{\mathbb{G}}(\bar{g})|$ не делится на p . С другой стороны, так как A замкнуто, то $C_{\mathbb{G}}(\bar{g}) \subseteq \hat{A}$, откуда следует, что $C_{\mathbb{G}}(\bar{g})$ — p -подгруппа. Это показывает, что $C_{\mathbb{G}}(\bar{g}) \in \text{Syl}_p(\mathbb{G})$. Таким образом, централизатор каждого нетривиального p -элемента группы $\mathbb{G}$ является силовой p -подгруппой последней. Как известно ([4], теорема С) при этой ситуации силовые p -подгруппы группы $\mathbb{G}$ являются элементарными абелевыми CC -подгруппами**).

Пусть $\mathfrak{P} \in \text{Syl}_p(\mathbb{G})$. Тогда $\hat{A} = \mathfrak{P}^{\mathbb{G}}$ — объединение всех силовских p -подгрупп группы $\mathbb{G}$. Так как $\mathfrak{P}$ — централизатор некоторого элемента $\bar{g} \in A$, то $|\mathfrak{H}| = |A| = |\mathbb{G} : \mathfrak{P}|$. Поэтому имеет место факторизация $\mathbb{G} = \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{H}$. В частности, $|\mathbb{G}| = q \cdot |\mathfrak{H}|$, где $q = p^r = |\mathfrak{P}|$ — p -часть числа $|\mathbb{G}|$.

Пусть $\text{Syl}_p(\mathbb{G}) = \{\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_r\}$. Так как $\mathfrak{P}_i$ — абелевы CC -подгруппы, то $\mathfrak{P}_i \cap \mathfrak{P}_j = \{1\}$ при $i \neq j$. Ввиду $\hat{A} = \bigcup \mathfrak{P}_i$, отсюда следует, что

$$(13) \quad |A| = r |\mathfrak{P}^*| = r(q-1).$$

Так как $|A| = |\mathfrak{H}|$, $r = |\mathbb{G} : N_{\mathbb{G}}(\mathfrak{P})|$, $|\mathbb{G}| = |\mathfrak{H}| \cdot |\mathfrak{P}|$, то $|N_{\mathbb{G}}(\mathfrak{P}) : \mathfrak{P}| = q-1$. Так как $q = |\mathbb{G} : \mathfrak{H}| = |G : H| > 2$, то $N_{\mathbb{G}}(\mathfrak{P}) \neq \mathfrak{P}$. Так как $\mathfrak{P}$ — CC -подгруппа, отсюда

*) Определение замкнутости подмножества конечной группы см. в [6].

**) Подгруппа $\mathfrak{P} \leq \mathbb{G}$ называется CC -подгруппой, если $\bar{g} \in \mathfrak{P}^*$ влечет $C_{\mathbb{G}}(\bar{g}) \subseteq \mathfrak{P}$.

следует, что $N_{\mathbb{G}}(\mathbb{P})$ -группа Фробениуса с ядром $\mathbb{P}$. Ввиду $|N_{\mathbb{G}}(\mathbb{P}):\mathbb{P}| = q-1 = |\mathbb{P}|-1$, $N_{\mathbb{G}}(\mathbb{P})$ изоморфна строго 2-транзитивной группе подстановок степени q .

Докажем, что

$$(14) \quad r = qk+1, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \geq 0.$$

Заметим, что $\hat{A} = \{\bar{x} \in \mathbb{G} | \bar{x}^q = \bar{1}\}$. Поэтому в силу теоремы Фробениуса об уравнениях в группах $|\hat{A}| \equiv 0 \pmod{q}$, откуда вытекает, что $|A| \equiv -1 \pmod{q}$. Отсюда и из (13) следует, что $r \equiv 1 \pmod{q}$. Таким образом, (14) доказано. В силу (13) и (14) имеем

$$(15) \quad |A| = (qk+1)(q-1).$$

Так как $\sum_{\bar{g} \in \mathbb{G}} \theta(\bar{g}) = \theta(\bar{1}) + \sum_{\bar{g} \in A} \theta(\bar{g}) + \sum_{\bar{g} \in B} \theta(\bar{g}) = \chi(1)^2 + |B|$ и, с другой стороны, $\sum_{\bar{g} \in \mathbb{G}} \theta(\bar{g}) = |Z(\chi)|^{-1} \sum_{g \in G} |\chi(g)|^2 = |Z(\chi)|^{-1} |G| = |\mathbb{G}|$, то $|\mathbb{G}| = \chi(1)^2 + |B|$. Отсюда вытекает, ввиду равенства $|\mathbb{G}| = 1 + |A| + |B|$, что

$$(16) \quad |A| = \chi(1)^2 - 1.$$

Следовательно, $(\chi(1), |\mathbb{H}|) = (\chi(1), |A|) = 1$. Так как $\mathbb{G} = G/Z(\chi)$, то $\chi(1)$ делит $|\mathbb{G}| = p^a |\mathbb{H}|$, откуда, учитывая последнее замечание, заключаем, что $\chi(1)$ делит p^a . Полагая $\chi(1) = p^\lambda$ ($\lambda \leq a$), получаем в силу (16):

$$(17) \quad |A| = p^{2\lambda} - 1 \leq p^{2a} - 1.$$

Из (17) и (15) вытекает, что $k \leq 1$. Если $k=0$, то, ввиду (14), $r=1$ и, следовательно, $\mathbb{P} \triangleleft \mathbb{G}$, откуда $\hat{A} = \mathbb{P}^{\mathbb{G}} = \mathbb{P}$; поэтому $\langle A \rangle = \mathbb{P} \neq \mathbb{G}$ — противоречие. Итак, $k=1$, $r=q+1$ и, следовательно, $\text{Cl}(\mathbb{P}) = \{\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_q\}$, $\mathbb{P}_0 = \mathbb{P}$.

Рассмотрим действие γ группы $\mathbb{G}$ сопряжениями на $\Omega = \text{Cl}(\mathbb{P})$. Подгруппа $\mathfrak{N}_i = N_{\mathbb{G}}(\mathbb{P}_i)$ является γ -стабилизатором «точки» $\mathbb{P}_i$. Пусть γ_0 — действие подгруппы $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_0$ на множестве $\Omega_0 = \{\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_q\}$ порождённое действием γ . Так как γ_0 -стабилизатор «точки» $\mathbb{P}_1 \in \Omega_0$ совпадает с $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}_1$, то длина s γ_0 -орбиты точки $\mathbb{P}_1$ равна $|\mathfrak{N}:\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}_1|$, откуда $s \cdot |\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}_1| = |\mathfrak{N}| = q(q-1)$, ибо $\mathfrak{N} = N_{\mathbb{G}}(\mathbb{P})$ и, как было доказано выше, $|N_{\mathbb{G}}(\mathbb{P}):\mathbb{P}| = q-1$. Так как $\mathbb{P} \cap \mathbb{P}_1 = \{1\}$, то $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}_1$ — p' -подгруппа. Из равенства $s \cdot |\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}_1| = q(q-1)$ поэтому вытекает, что $|\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}_1|$ делит $q-1$. Полагая $q-1 = |\mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}_1| t$ ($t \in \mathbb{N}$), получаем $s = qt \equiv q = |\Omega_0|$. Поэтому γ_0 -орбита точки $\mathbb{P}_1$ совпадает с Ω_0 . Таким образом, действие γ_0 транзитивно. Так как $\mathfrak{N}$ -группа Фробениуса с ядром $\mathbb{P}$, имеющая порядок $q = |\Omega_0|$ и так как $|\mathfrak{N}| = q(q-1)$, то на основании леммы 1.5 ($\mathbb{G}$ и $\mathfrak{N}$ в формулировке леммы заменяются соответственно на $\mathfrak{N}$ и $\mathbb{P}$; $n=q$) действие γ_0 строго 2-транзитивно. Ввиду транзитивности действия γ , отсюда в силу леммы 1.3 следует, что действие γ строго 3-транзитивно. В частности, γ точно. Можно поэтому считать, что $\mathbb{G}$ — строго 3-транзитивная группа подстановок степени $q+1$. Докажем, что группа $\mathbb{G}$ простая. Прежде всего, заметим, что, ввиду максимальности подгруппы H (см. предложение 3.2), подгруппа $\mathbb{H}$ максимальна в $\mathbb{G}$. Далее, так как $\bigcap_{i \in \mathbb{G}} H^i = D = Z(\chi)$, то $\bigcap_{i \in \mathbb{G}} \mathbb{H}^i = \{\bar{1}\}$. Допустим, что $\{\bar{1}\} \neq \mathfrak{A} \triangleleft \mathbb{G}$. Тогда $\mathfrak{A} \not\subseteq \mathbb{H}$, откуда, ввиду максимальности $\mathbb{H}$, вытекает, что $\mathfrak{A} \cdot \mathbb{H} = \mathbb{G}$. Поэтому $\mathbb{G}/\mathfrak{A} \cong \mathbb{H}/\mathfrak{A} \cap \mathbb{H}$ — p' -подгруппа, откуда следует, что $\mathfrak{A}$ содержит все силовские

p -подгруппы группы $\mathfrak{G}$. Так как $\hat{A} = \mathfrak{P}^{\mathfrak{G}}$ — объединение всех силовских p -подгрупп группы $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{A} \supseteq \hat{A}$, откуда следует, что $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}$, так как $\langle \hat{A} \rangle = \mathfrak{G}$. Тем самым, простота группы $\mathfrak{G}$ доказана. Ввиду несвязности, она не является циклической.

В силу леммы 1.6 $p=2$ и $\mathfrak{G} \cong PSL(2, q)$. Так как $|\mathfrak{G}:\mathfrak{H}|=q$ чётно, то на основании леммы 1.7 $q=2$ и, следовательно, $\mathfrak{G} \cong PSL(2, 2)$, что противоречит простоте группы $\mathfrak{G}$.

Таким образом, случай, когда $Z(\chi)=D$ также невозможен. Мы видим, что допущение $|G:H|>2$ во всех случаях приводит к противоречию. Тем самым, доказано, что $|G:H|=2$. Так как $H \cap T_{\chi} = \emptyset$ то $T_{\chi} \subseteq G \setminus H$. Из $|G:H|=2$ следует, что $|T_{\chi}|=|H|=|G \setminus H|$. Поэтому $T_{\chi} = G \setminus H$. Итак, основное утверждение теоремы доказано.

Обратное утверждение очевидно. Пусть $|G:H|=2$ и $G \setminus H = T_{\chi}$. Тогда, очевидно, $\langle T_{\chi} \rangle = \langle G \setminus H \rangle = G$. Так как $H \cap T_{\chi} = \emptyset$, то χ_H приводим. Так как, кроме того, $|H|=|G \setminus H|=|T_{\chi}|$, то подгруппа H χ -максимальна.

§ 5. Доказательство Теоремы 2.

1. Пусть G — неабелева разрешимая группа, обладающая χ -максимальной подгруппой H , где χ — точный неприводимый характер группы G удовлетворяющий условию $\langle T_{\chi} \rangle = G$. В силу теоремы 1 $|G:H|=2$ и $G \setminus H = T_{\chi}$. Ввиду следствия 2 предложения 2.13, отсюда вытекает, что подгруппа H абелева. Так как $\chi(1)>1$, то в силу теоремы Ито $\chi(1)=2$. Из точности характера χ следует, что центр $Z(G)$ группы G циклический. Так как характер χ исчезает вне H то $Z(G) \subseteq H$. При этом, $Z(G) \neq H$, так как в противном случае группа G была бы абелевой. Докажем, что $|H:Z(G)|$ нечётно. Если $|H:Z(G)|$ чётно, то $g^2 \in Z(G)$ для некоторого элемента $g \in H \setminus Z(G)$. Пусть Γ — неприводимое представление группы G , порождающее характер χ . Так как $\chi(1)=2$, то $\Gamma(g)$ — матрица 2-го порядка. Мы можем считать её диагональной: $\Gamma(g) = \text{diag} \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \}$. Так как $g^2 \in Z(G)$, то матрица $\Gamma(g^2) = \text{diag} \{ \varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2 \}$ скалярна. Поэтому $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2$ откуда следует, что $\varepsilon_1 = \pm \varepsilon_2$. Если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, то $\Gamma(g)$ скалярна, откуда вытекает, ввиду точности Γ , что $g \in Z(G)$ — противоречие. Если $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, то $\chi(g)=0$, что также невозможно, так как $T_{\chi} \cap H = \emptyset$. Тем самым, нечётность числа $|H:Z(G)|$ доказана.

2. Пусть $g \in G \setminus H$. Докажем, что тогда (i) $|C_G(g)| = |G:G'|$; (ii) $\text{Cl}(g) = gG'$; (iii) $C_G(g) \cap H = Z(G)$; (iv) $|C_G(g):Z(G)| = 2$. Прежде всего заметим, что, ввиду абелевости H , характер θ_H приводим, если $\theta \in \text{Irr}(G)$, $\theta(1)>1$. Так как $G/H \cong C(2)$, то θ_H неизотипичен и, следовательно, ввиду максимальной H , θ индуцируется из H . Так как $H \triangleleft G$, то $T_{\chi} = G \setminus H \subseteq T_{\theta}$. Поэтому, если $g \in T_{\chi}$, то $|C_G(g)| = \sum_{\theta \in \text{Irr}(G), \theta(1)=1} |\theta(g)|^2 + \sum_{\theta \in \text{Irr}(G), \theta(1)>1} |\theta(g)|^2 = \sum_{\theta \in \text{Irr}(G), \theta(1)=1} |\theta(g)|^2 = |G/G'|$. Тем самым, доказано (i). Далее, так как $g^t = g[t, g]$ для любого $t \in G$, то $\text{Cl}(g) \subseteq gG'$. С другой стороны, в силу (1) $|\text{Cl}(g)| = |G:C_G(g)| = |G'| = |gG'|$. Поэтому $\text{Cl}(g) = gG'$. Тем самым, доказано (ii). Пусть, далее, $h \in C_G(g) \cap H$. Так как H абелева, то h перестановочен со всеми элементами из $H \cup Hg = G$. Поэтому $h \in Z(G)$. Таким образом, $C_G(g) \cap H \subseteq Z(G)$. Обратное включение

вытекает из результатов п. I. Таким образом, $C_G(g) \cap H = Z(G)$. Этим доказано утверждение (iii). Для доказательства (iv) заметим, что, ввиду максимальной H , $G = H \cdot C_G(g)$, откуда в силу (III) $G/H \cong C_G(g)/C_G(g) \cap H = C_G(g)/Z(G)$. Следовательно, $|C_G(g):Z(G)| = |G:H| = 2$. Итак, (iv) доказано.

3. Пусть $S \in \text{Syl}_2(G)$ и P — силовская 2-подгруппа подгруппы H . Так как $P \triangleleft G$, то $P \subset S$. Из $|G:H| = 2$ следует, что $|S:Z| = 2$. Легко видеть, что подгруппа S абелева. Действительно, так как $|H:Z(G)|$ нечетно, то $P \subseteq Z(G)$, откуда вытекает, ввиду $S/P \cong C(2)$, что S абелева. Обозначив через Q нечетную компоненту $O(H)$ подгруппы H , будем, очевидно, иметь

$$(18) \quad H = P \times Q, \quad G = Q \cdot S.$$

4. Докажем, что G' — циклическая подгруппа нечетного порядка, причем $H = Z(G) \times G'$. Прежде всего, заметим, что в силу (18) и результатов п. 3 группа $G/Q \cong S$ абелева. Поэтому $G' \subseteq Q$, откуда вытекает нечетность $|G'|$. Пусть $g \in S \setminus P$. Докажем, что $G' \cap C_G(g) = \{1\}$ и $G = G' \cdot C_G(g)$. Заметим, что $g \in G \setminus H$ и, следовательно, в силу результатов п. 2 $\text{Cl}(g) = gG'$. Пусть $x \in C_G(g) \cap G'$. Так как $|G'|$ нечетно, то $O(x)$ нечетно и, следовательно, $(O(x), O(g)) = 1$. Ввиду $xg = gx$ отсюда следует, что $O(gx) = O(g) \cdot O(x)$. Так как, с другой стороны, $gx \in gG' = \text{Cl}(g)$, то $O(gx) = O(g)$. Поэтому $O(x) = 1$ и, следовательно, $x \notin G'$. Таким образом, $G' \cap C_G(g) = \{1\}$. Отсюда следует в силу п. 2, что $G = G' \cdot C_G(g)$. Так как $Z(G) \subseteq C_G(g)$, отсюда вытекает, что $Z(G) \cap G' = \{1\}$. Для доказательства разложения $H = Z(G) \times G'$ заметим, что $G' \subseteq H$ так как $G/H \cong C(2)$ и $Z(G) \subset H$ в силу п. 1. Поэтому $L = Z(G) \times G' \subseteq H$. Пусть $g \in S \setminus P$.

Тогда на основании доказанного выше и утверждения (IV) из п. 2 будем иметь $|G:L| = |G' \cdot C_G(g):L| = |C_G(g):Z(G)| = 2$, откуда вытекает, что $L = H$. Таким образом, $Z(G) \times G' = H$. Для доказательства циклическости G' рассмотрим естественный гомоморфизм $g \mapsto \bar{g}$ группы G на $\bar{G} = G/Z(G)$. Так как $H = Z(G) \times G'$, то $\bar{H} = \bar{G}' = \bar{G}'$. Если $\bar{g} \in \bar{G} \setminus \bar{H}$, то $g \in G \setminus H$ и в силу п. 2 $\text{Cl}(\bar{g}) = \bar{g}\bar{G}'$. Поэтому $|\bar{G}:C_{\bar{G}}(\bar{g})| = |\text{Cl}(\bar{g})| = |\bar{G}'| = |\bar{H}|$, откуда $|C_{\bar{G}}(\bar{g})| = |\bar{G}:\bar{H}| = |G:H| = 2$. Таким образом, $C_{\bar{G}}(\bar{g}) = \langle \bar{1}, \bar{g} \rangle$ и, следовательно, $C_{\bar{G}}(\bar{g}) \cap \bar{H} = \langle \bar{1} \rangle$. Отсюда вытекает, что $C_{\bar{G}}(\bar{x}) = \bar{H}$, если $\bar{x} \in \bar{H}^\#$. Поэтому $\bar{G}$ -группа Фробениуса с ядром $\bar{H} = \bar{G}'$ и с дополнительным множителем $\langle \bar{g} \rangle \cong C(2)$. Так как $O(\bar{g}) = 2$, то элементы из ядра $\bar{G}'$ группы Фробениуса $\bar{G}$ инвертируются элементом $\bar{g}$. Отсюда следует, что для любого $x \in G'$ имеет место $x^g = x^{-1}z$, где $z \in Z(G)$. Так как $z = xx^g \in Z(G) \cap G'$, то $z = 1$ и, следовательно, $x^g = x^{-1}$. Таким образом, элементы из G' инвертируются элементами из $G \setminus H$. Так как $G' \subseteq H$ и H абелева, то все подгруппы группы G' нормальны в G . Так как $\chi(1) = 2$, $\text{Ker } \chi = \{1\}$ и $G' \not\subseteq Z(G)$, то $\chi_{G'} = \varphi + \varphi'$, где φ и φ' — сопряженные различные линейные характеры подгруппы G' удовлетворяющие условию $\text{Ker } \varphi \cap \text{Ker } \varphi' = \{1\}$. Пусть $\varphi' = \varphi^g$, где $g \in G$. Ввиду нормальности всех подгрупп группы G , входящих в G' , $\text{Ker } \varphi' = (\text{Ker } \varphi)^g = \text{Ker } \varphi$. Поэтому $\text{Ker } \varphi = \{1\}$. Таким образом, абелева группа G' обладает точным линейным характером φ , откуда вытекает циклическость G' .

5. Докажем, что $G/Z(G) \cong D_m$ (m нечетно). В силу п. 4 G' циклическая и $|G'| = m$ нечетно. Пусть $G' = \langle a \rangle$, $b \in G \setminus H$. Так как $G' \cap Z(G) = \{1\}$, то в обозначениях п. 4 $\langle \bar{a} \rangle = \bar{G}' \cong G'$ и, следовательно, $O(\bar{a}) = m$. Так как в силу п. 4 $\bar{G} = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$, $O(\bar{b}) = 2$ и, $\bar{a}^{\bar{b}} = \bar{a}^{-1}$, то $\bar{G} \cong D_m$. Все утверждения теоремы таким образом доказаны.

§ 6. Некоторые применения

В этом параграфе G — неабелева группа, $\chi \in \text{Irr}(G)$, $\chi(1) > 0$, $\langle T_\chi \rangle = N_\chi$, $|T_\chi| = n_\chi$.

Лемма 6.1 (Галлахер [10]). (I) $\chi_{N_\chi} \in \text{Irr}(N_\chi)$ (В частности, N_χ неабелева); (II) $G \setminus N_\chi \subseteq U_\chi$; (III) $|Z(\chi)|$ делит n_χ и $\frac{n_\chi}{|Z(\chi)|} \cong \chi(1)^2 - 1$. Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $G \setminus Z(\chi) \subseteq T_\chi \cup U_\chi$.

Доказательство.* Пусть $N_\chi = H$. Так как $T_\chi \setminus H = \emptyset$ и $(\chi_H, \chi_H)_H \cong 1$, то в силу (I) $(\chi_H, \chi_H)_H = 1$, т. е. $\chi_H \in \text{Irr}(H)$ и неравенство (I) превращается в равенство $1 = 1$. В силу леммы 1.2 $G \setminus H \subseteq T_\chi \cup U_\chi$. Так как $T_\chi \subset H$, то $G \setminus H \subseteq U_\chi$. Положим, далее, $Z(\chi) = K$. Если $g \in K$, то $|\chi(g)| = \chi(1)$. Поэтому $(\chi_K, \chi_K)_K = \chi(1)^2$ и (I) даёт $\frac{n_\chi}{|K|} \cong \chi(1)^2 - 1$. В силу леммы 1.2 знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $G \setminus K = T_\chi \cup U_\chi$. То, что $|Z(\chi)|$ делит n_χ уже было отмечено при доказательстве теоремы 1.

Лемма 6.2 [7]. Если $g \in T_\chi$, то $C_G(g) \subset N_\chi$.

Доказательство. В [7] было доказано, что $C_G(g) \subseteq N_\chi$. Если $C_G(g) = N_\chi$, то $g \in Z(N_\chi)$, что невозможно, так как $Z(N_\chi) \subseteq Z(\chi)$ и $T_\chi \cap Z(\chi) = \emptyset$. Таким образом, $C_G(g) \subset N_\chi$.

Лемма 6.3 $|G:N_\chi|$ строго делит n_χ .

Доказательство. Пусть $C_1, \dots, C_{k_\chi}$ — классы сопряженных нулей характера χ , $|C_i| = h_i$, $g_i \in C_i$. В силу леммы 6.2 $|N_\chi| = |C_G(g_i)|m_i$, где $m_i \in \mathbb{N}$, $m_i > 1$. Поэтому $h_i = |G:N_\chi|m_i$, откуда после сложения получаем $n_\chi = |G:N_\chi|m$, где $m = \sum m_i \cong 2K_\chi > 1$.

Лемма 6.4 [7]. $(\chi(1), |G:N_\chi|) = 1$.

Доказательство. Пусть p -простой делитель $\chi(1)$ и $P \in \text{Syl}_p(G)$. Если $P \not\subseteq N_\chi$, то найдется $g \in P \cap \Delta_\chi$, где $\Delta_\chi = G \setminus N_\chi$. В силу леммы 6.1 $g \in U_\chi$ и, следовательно, $\chi(g)$ — корень из единицы. С другой стороны, $\chi(g) = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{\chi(1)}$, где ε_i — корни из 1 степени $p^2 = |P|$ (p -простое число). Пусть ε — первообразный корень из 1 степени p^2 и $\lambda = 1 - \varepsilon$. Тогда $\varepsilon_i \equiv 1 \pmod{\lambda}$ ($i = 1, \dots, \chi(1)$) и, следовательно, $\chi(g) \equiv \chi(1) \pmod{\lambda}$. Так как $\chi(g) \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$ и $\chi(g)$ — корень из 1, то, как известно, $\chi(g) = \pm \varepsilon^v$ ($v \in \mathbb{Z}$). Поэтому $\chi(g) \equiv \pm 1 \pmod{\lambda}$. Таким образом, $\chi(1) \equiv \pm 1 \pmod{\lambda}$, откуда следует, ввиду необратимости λ в кольце целых элементов поля $\mathbb{Q}(\varepsilon)$, что $\chi(1) \equiv \pm 1 \pmod{p}$. Таким образом, $(\chi(1), p) = 1$ — противоречие. Итак, $P \subseteq N_\chi$ и, следовательно, $(|G:N_\chi|, p) = 1$. Так как p — любой простой делитель $\chi(1)$, то $(|G:N_\chi|, \chi(1)) = 1$.

Лемма 6.5 Если n_χ нечетно, то T_χ содержит инволюцию.

*) Доказательство заимствовано из [5].

Доказательство. Если $g \in T_x$, то и $g^{-1} \in T_x$, так как $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)} = 0$. Если бы T_x не содержало инволюций, то T_x разбивалось бы на пары $\{g, g^{-1}\}$ и число n_x было бы четным. Таким образом, T_x содержит инволюцию.

Предложение 6.1. Пусть $H \leq G$ и $Z(H) \setminus Z(\chi) \neq \emptyset$. Тогда $\chi_H \notin \text{Irr}(H)$ и $|H| \leq n_x$.

Доказательство. Если $\chi_H \in \text{Irr}(H)$, то $Z(H) \subseteq Z(\chi)$ — противоречие. Таким образом, $\chi_H \notin \text{Irr}(H)$, откуда следует, ввиду леммы 1.2, что $|H| \leq n_x$.

Следствие. Если $g \in G \setminus Z(\chi)$, то $|C_G(g)| \leq n_x$.

Доказательство. Так как $g \in Z(H)$, где $H = C_G(g)$, то $Z(H) \setminus Z(\chi) \neq \emptyset$. Поэтому в силу предложения 6.1 $|H| \leq n_x$.

Положим для подгруппы $H \leq G$: $\tau_x(H) = |H \cap T_x|$. Так как $\tau_x(H) + |T_x \setminus H| = n_x$, то следствие леммы 1.2 равносильно утверждению: если $\chi_H \notin \text{Irr}(H)$, то $|H| \leq n_x - \tau_x(H)$.

Предложение 6.2. Если $g \in T_x$, то $|C_G(g)| \leq n_x - 1$. Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $G \cong S_3$.

Доказательство. Пусть $H = C_G(g)$. Так как $\tau_x(H) \geq 1$, то в силу следствия леммы 1.2 $|H| \leq n_x - 1$. Допустим, что $|H| = n_x - 1$. Тогда $\tau_x(H) = 1$ и, следовательно, $T_x \cap H = \{g\}$. Далее, так как $|H| = |T_x \setminus H|$, то в силу (1) $(\chi_H, \chi_H)_H \leq 2$. С другой стороны, $(\chi_H, \chi_H)_H \geq 2$, так как в силу предложения 6.1 $\chi_H \notin \text{Irr}(H)$. Таким образом, $(\chi_H, \chi_H)_H = 2$ и в (1) имеет место знак равенства. Поэтому на основании леммы 1.2 $G \setminus H \subseteq T_x \cup U_x$. Следовательно, полагая $D = \bigcap_{t \in G} H^t$, будем иметь

$$G \setminus D \subseteq T_x \cup U_x.$$

Пусть $x \in D \cap T_x$. Тогда $x \in H \cap T_x = \{g\}$, откуда $x = g$. Таким образом, $D \cap T_x = \{g\}$. Так как $D \triangleleft G$ и T_x нормально, то $g \in Z(G)$, что невозможно, так как $T_x \cap Z(G) = \emptyset$. Таким образом, $D \cap T_x = \emptyset$. В силу леммы 1.2 имеем $(\chi_D, \chi_D)_D = 1 + |T_x \setminus D| \cdot |D|^{-1}$. Так как $|T_x \setminus D| = |T_x| = n_x$, то $n_x = |D|[(\chi_D, \chi_D)_D - 1]$, откуда следует, что $|D|$ делит n_x . Так как, с другой стороны, $D \leq H$, то $|D|$ делит $|H| = n_x - 1$. Следовательно, $|D| = 1$. Отсюда следует, что $G^\# = T_x \cup U_x$. Так как $(\chi_D, \chi_D) = \chi(1)^2$, то

$$(19) \quad n_x = x(1)^2 - 1.$$

Следовательно, по терминологии статьи [9] G — VZ-группа. Она несвязна и $\{T_x, U_x\}$ — её нормальное C-разбиение. Так как $g \in T_x$ и подмножество T_x замкнуто, то $H = C_G(g) \subseteq \hat{T}_x$. Поэтому ([6], лемма 3.7) $n_x - 1 = |H|$ делит $\chi(1)$. С другой стороны, в силу (19) $\chi(1)$ делит $n_x + 1$. Поэтому $n_x - 1$ делит $n_x + 1$, откуда вытекает, что $n_x \equiv 3$. Ввиду (19) случай $n_x \equiv 2$ невозможен. Поэтому $n_x = 3$ и $\chi(1) = 2$. Таким образом, $T_x = \{g_1, g_2, g_3\}$. Так как $T_x \cap Z(G) = \emptyset$, то действие группы G сопряжениями на T_x транзитивно. Ядро этого действия поэтому совпадает с $\bigcap_{i=1}^3 C(g_i) = \bigcap_{t \in G} H^t = D = \{1\}$. Поэтому группа G изоморфна

некоторой подгруппе группы S_3 . Так как G неабелева, то $G \cong S_3$. Легко проверить, что группа S_3 удовлетворяет условиям предложения.

Предложение 6.3. *Имеет место неравенство*

$$(20) \quad |G| \leq \frac{n_\chi(n_\chi - 1)}{k_\chi},$$

где K_χ — число классов сопряженных нулей характера χ . Знак равенства в (20) достигается тогда и только тогда, когда $G \cong S_3$.

Доказательство. Пусть $C_1, \dots, C_{k_\chi}$ — классы нулей характера χ ; $h_i = |C_i|$; $g_i \in C_i$ ($i = 1, \dots, k_\chi$). В силу предложения 6.2 $|C_G(g_i)| \leq n_\chi - 1$. Поэтому $|G| \leq h_i(n_\chi - 1)$ ($i = 1, \dots, k_\chi$). Складывая эти неравенства и замечая, что $\sum h_i = n_\chi$, получаем (20). Если $|G| = \frac{n_\chi(n_\chi - 1)}{k_\chi}$, то, как видно из доказательства неравенства (20), должны выполняться равенства $|C_G(g_i)| = n_\chi - 1$ для всех $i \in \{1, \dots, k_\chi\}$. В силу предложения 6.2 $G \cong S_3$ и $k_\chi = 1$.

Следствие 1. $n_\chi > \sqrt{|G|}$.

Следствие 2. *Класс K_n ($n \in \mathbb{N}$) групп, обладающих неприводимым характером с n нулями, конечен.*

Примечание. Классы K_n описаны для $n \leq 8$: $K_1 = K_2 = K_4 = \emptyset$, $K_p = \{D_p\}$, где $p \in \{3, 5, 7\}$, $K_6 = \{D_4, Q_8, D_6, \langle 2, 2, 3 \rangle, SL(2, 3)\}$, где Q_8 — группа кватернионов, $\langle 2, 2, 3 \rangle$ — ZS-метацyclicкая группа 12-го порядка (терминология книги [12]); $K_8 = \{A_4, S_4\}$.

Предложение 6.4. $K_1 = K_2 = K_4 = \emptyset$. Если $n > 4$, то $K_n \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть $G \in K_n$, $n \in \{1, 2, 4\}$. В силу предложения 6.3 $|G| \leq n(n-1)$, откуда сразу вытекает, что $K_1 = K_2 = \emptyset$. Допустим, что $n = 4$, $\chi \in \text{Irr}(G)$, $n_\chi = 4$. В силу леммы 6.1 $\frac{4}{|Z(\chi)|} \geq \chi(1)^2 - 1$, откуда $|Z(\chi)| = 1$. Рассмотрим действие γ группы G сопряжениями на $T_\chi = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$. Если $N_\chi = G$, то $\text{Ker } \gamma = Z(G) = \{1\}$. Так как $T_\chi \cap Z(G) = \emptyset$, то T_χ разбивается на две γ -орбиты длины 2, либо γ транзитивно. В первом случае $\exp G = 2$ и, следовательно, G абелева. Таким образом, γ транзитивно, откуда следует, что $|G|$ делится на 4. Пусть $H < G$, $|H| = 4$. Тогда $|H| = n_\chi$ и, так как H абелева, то $\chi_H \notin \text{Irr}(H)$. Поэтому $H \chi$ — максимальна. Так как $N_\chi = G$, то в силу теоремы 1 $|G:H| = 2$. Поэтому $|G| = 8$ и, следовательно, $G \cong D_4$, либо $G \cong Q_8$. В обоих случаях $n_\chi = 6$. Таким образом, при $N_\chi = G$ группы с $n_\chi = 4$ не существуют. Если $N_\chi \neq G$, то, полагая $\chi_1 = \chi_{N_\chi}$, в силу леммы 6.1 будем иметь $\chi_1 \in \text{Irr}(N_\chi)$, $N_{\chi_1} = N_\chi$, $n_{\chi_1} = n_\chi = 4$. В силу доказанного выше этот случай также невозможен. Таким образом, $K_4 = \emptyset$.

Пусть $n > 4$. Если n нечетно, то, очевидно, $D_n \in K_n$. Если $n = 2^k m$, где $k \geq 1$ и m нечетно, то, как легко видеть, $H \times D_m \in K_n$, где H — любая группа порядка 2^k . Таким образом, $K_n \neq \emptyset$.

Оценка $n_\chi > \sqrt{|G|}$ может быть в некоторых случаях улучшена. Пусть $Sc(G)$ — цоколь группы G . Тогда $Sc(G) = Sc_z(G) \times Sc_N(G)$, где $Sc_z(G)$ — произведение всех минимальных нормальных делителей группы G , входящих в $Z(G)$, а $Sc_N(G)$ — произведение всех остальных минимальных нормальных делителей. Пусть $Sc_N(G) = F_1 \times \dots \times F_k$, где F_i — минимальные нормальные делители группы G .

Предложение 6.5. Если $\text{Ker } \chi = \{1\}$, то $n_\chi > |G|^{1-(1/k)}$.

Доказательство. Можно ограничиться случаем $k \geq 2$. Если $f_i \in F_i^\#$, то очевидно $S_i = F_1 \times \dots \times F_{i-1} \times F_{i+1} \times \dots \times F_k \subseteq C_G(f_i)$. Так как $F_i \cap Z(G) = \{1\}$ и, ввиду точности χ , $Z(\chi) = Z(G)$, то $f_i \in G \setminus Z(\chi)$. Отсюда вытекает, ввиду следствия предложения 6.1, что $|C_G(f_i)| \leq n_\chi$. Следовательно, $|G|/|F_i| = |S_i| \leq \leq n_\chi$ ($i = 1, \dots, k$). Перемножая эти неравенства, получаем $\frac{|G|^k}{|Sc_N(G)|} \leq n_\chi^k$. Так как $|Sc_N(G)| \leq |G|$, то $n_\chi^k \geq |G|^{k-1}$, откуда $n_\chi \geq |G|^{1-(1/k)}$.

Предложение 6.6. Пусть G разрешима и $\chi(1) = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ — каноническое разложение $\chi(1)$ на простые множители. Тогда $n_\chi > |G|^{1-(1/r)}$.

Доказательство. Пусть $|G| = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r} p_{r+1}^{\alpha_{r+1}} \dots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа $|G|$. Положим $m_i = \frac{|G|}{p_i^{\alpha_i}}$ ($i = 1, \dots, r$). Пользуясь теоремой Ф. Холла, для каждого $i \leq r$ найдём подгруппу M_i порядка m_i . Если $m_i > n_\chi$, то в силу следствия леммы 1.2 $\chi_{M_i} \in \text{Irr}(M_i)$, откуда вытекает, что $\chi(1)$ делит m_i и, следовательно, $\chi(1)$ не делится на p_i — противоречие. Таким образом, $m_i \leq n_\chi$ для всех $i \in \{1, \dots, r\}$. Перемножая эти неравенства, получим $|G|^r / p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r} \leq n_\chi^r$, откуда, ввиду $p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r} \leq |G|$ вытекает, что $n_\chi \geq |G|^{1-(1/r)}$. Нетрудно показать, что $n_\chi > |G|^{1-(1/r)}$.

Примечание. Если G нильпотентна, то $n_\chi \geq \frac{1}{2} |G|$. Заметим, что в классе всех конечных групп отношение $\frac{n_\chi}{|G|}$ может принимать сколь угодно малые значения. Так, например, группа $G \cong PSL(2, q)$ при нечетном q обладает неприводимым характером χ степени q , для которого $\frac{n_\chi}{|G|} = \frac{2}{q}$. В связи с этим замечанием уместно отметить доказанное Дж. Томпсоном неравенство $\frac{|T_\chi \cup U_\chi|}{|G|} \geq \frac{1}{3}$.*)

В заключение, в качестве ещё одного приложения полученных выше результатов, мы рассмотрим вопрос о группах, обладающих неприводимым характером χ , для которого $n_\chi = p^\lambda$ (p -простой делитель порядка группы). Как показывают примеры, такие группы существуют (A_4 , S_4 , где $\chi(1) = 3$, $n_\chi = 8$; D_{p^2} с $p \neq 2$: $\chi(1) = 2$, $n_\chi = p^2$).

*) Если характер χ рациональнозначен, то $|T_\chi \cup U_\chi| \geq \frac{3}{4} |G|$.

Предложение 6.7. Пусть $|G| = p^\alpha m$, $(m, p) = 1$, $n_\chi = p^\lambda$. Тогда $\lambda \leq \alpha$.

Доказательство. Предположим сначала, что $\text{Ker } \chi = \{1\}$. Допустим, что $\lambda < \alpha$. Если $P \in \text{Syl}_p(G)$, то $|P| = p^\alpha > p^\lambda = n_\chi$. Поэтому в силу следствия леммы 1.2 $\theta = \chi_P \in \text{Irr}(P)$. В силу теоремы Блехфельдта характер θ индуцируется из некоторой максимальной подгруппы M группы P . Так как $M \triangleleft P$, то $P \setminus M \subseteq T_\theta \subseteq T_\chi$. Поэтому $p^\lambda = n_\chi \leq |P \setminus M| = p^{\alpha-1}(p-1) \leq p^\lambda(p-1) = n_\chi(p-1)$. Отсюда вытекает, что $p = 2$ и $\lambda = \alpha - 1$. Следовательно, $|M| = |P \setminus M| = 2^{\alpha-1} = n_\chi$. Так как $P \setminus M \subseteq T_\chi$, то $P \setminus M = T_\chi$, откуда следует, что $M \cap T_\chi = \emptyset$. Поэтому $\chi_M \notin \text{Irr}(M)$. Итак, M χ -максимальная подгруппа группы G . Так как $\chi_P \in \text{Irr}(P)$ и $p = 2$, то $\chi(1) = 2^\beta$, $\beta \leq \alpha$. С другой стороны, в силу леммы 6.3 $(\chi(1), |G:N_\chi|) = 1$. Поэтому $|G:N_\chi|$ нечетно. Так как по лемме 6.2 $|G:N_\chi|$ делит n_χ , то $|G:N_\chi| = 1$, т. е. $N_\chi = G$. Отсюда следует, в силу теоремы 1, что $|G:M| = 2$, т. е. $|G| = 2|M| = 2 \cdot 2^{\alpha-1} = 2^\alpha$. Так как $\text{Ker } \chi = \{1\}$ и G абелева и разрешима, то в силу теоремы 2 $G/Z(G) \cong D_k$, где k нечетно. Таким образом $|G| = 2^\alpha$ делится на нечетное число $k > 1$ — противоречие. Поэтому $\lambda \leq \alpha$. Справедливость утверждения при $\text{Ker } \chi \neq \{1\}$ доказывается посредством перехода к $G/\text{Ker } \chi$.

Предложение 6.8. Пусть $|G| = p^\alpha m$, $m > 1$, $(m, p) = 1$, $\text{Ker } \chi = \{1\}$, $N_\chi = G$, $n_\chi = p^\alpha$, $H \in \text{Syl}_p(G)$. Тогда (i) Условия $p = 2$ и $\chi_H \in \text{Irr}(H)$ равносильны; (ii) Если $p \neq 2$, то $G = A \times D$, где A — циклическая p -группа, $D \cong D_{p^\sigma}$, $1 \leq \sigma \leq \alpha$.

Доказательство. Допустим, что $p = 2$ и $\chi \notin \text{Irr}(H)$. Так как $|H| = 2^\alpha = n_\chi$, то H χ -максимальна. Так как $N_\chi = G$, то по теореме 1 $m = |G:H| = 2$ и $G \setminus H = T_\chi$. Так как $|G| = 2p^\alpha$, то G разрешима и, ввиду $\text{Ker } \chi = \{1\}$, применима теорема 2, в силу которой $G/Z(G) \cong D_k$ ($k > 1$ и нечетно) и $H = Z(G) \times G'$, $|G'| = k$. Так как $|H|$ нечетно и $H \triangleleft G$, то $G = H \cdot L$, где $L < G$, $|L| = 2$. Поэтому $G = A \times D$, где $A = Z(G)$ циклическа, ввиду $\text{Ker } \chi = \{1\}$; $D = G' \cdot L \cong D_k$, причем $k = p^\sigma$, $1 \leq \sigma \leq \alpha$, так как $k = |G'|$ и $G' \leq H$.

Допустим, что $p \neq 2$. Тогда в силу (i) $\chi_H \in \text{Irr}(H)$. Подгруппа H , как было отмечено выше, в этом случае χ -максимальна. Так как $N_\chi = G$, то по теореме 1 $m = |G:H| = 2$ и $G \setminus H = T_\chi$. Так как $|G| = 2p^\alpha$, то G разрешима и, ввиду $\text{Ker } \chi = \{1\}$, применима теорема 2, в силу которой $G/Z(G) \cong D_k$ ($k > 1$ и нечетно) и $H = Z(G) \times G'$, $|G'| = k$. Так как $|H|$ нечетно и $H \triangleleft G$, то $G = H \cdot L$, где $L < G$, $|L| = 2$. Поэтому $G = A \times D$, где $A = Z(G)$ циклическа, ввиду $\text{Ker } \chi = \{1\}$; $D = G' \cdot L \cong D_k$, причем $k = p^\sigma$, $1 \leq \sigma \leq \alpha$, так как $k = |G'|$ и $G' \leq H$.

Предложение 6.9. Пусть $|G| = p^\alpha m$, $m > 1$, $(m, p) = 1$, $\text{Ker } \chi = \{1\}$, $N_\chi \neq G$, $n_\chi = p^\alpha$, $H \in \text{Syl}_p(G)$, $D = \bigcap_{t \in G} H^t$. Тогда (i) D — абелева p -группа; (ii) $m = q^\beta$, где q — простое число $\neq p$, причем $q = 2$, если $p \neq 2$; (iii) $G/D \cong \Phi_m$, где Φ_m — 2-транзитивная подстановочная группа Фробениуса степени m ; ядро Фробениуса группы G/D совпадает с N_χ/D , а дополнительный множитель — с H/D ; (iv) $N_\chi = D \cdot M$, где M — элементарная абелева группа порядка m ; при этом, $N_\chi \setminus D = T_\chi$, $\chi(1) = m$.

Доказательство. Если $\chi_H \in \text{Irr}(H)$, то $\chi(1) = p^\lambda$, $1 \leq \lambda \leq \alpha$. Так как по лемме 6.3 $|G:N_\chi|$ делит $n_\chi = p^\alpha$, то $|G:N_\chi| = p^\nu$, $1 \leq \nu \leq \alpha$. С другой стороны, по лемме 6.4 $(\chi(1), |G:N_\chi|) = 1$. Поэтому $|G:N_\chi| = 1$ — противоречие. Итак, $\chi_H \notin \text{Irr}(H)$. Поэтому H χ — максимальна. Заметим, что $(|G:N_\chi H|, p) = 1$, так

как $H \in \text{Syl}_p(G)$. С другой стороны, $|G:N_x H|$ делит p^v . Следовательно, $G = N_x H$. Пусть $H < K \leq G$. Тогда в силу предложения 3.1 $G \setminus K \subset G \setminus H \subseteq T_x \cup U_x$. В силу леммы 1.2 отсюда следует, что $(\chi_K, \chi_K)_K = 1 + |T_x \setminus K| \cdot |K|^{-1}$. Так как $|K| > |H| = n_x$, то в силу леммы 1.2 $\chi_K \in \text{Irr}(K)$, т. е. $(\chi_K, \chi_K)_K = 1$. Таким образом, $T_x \setminus K = \emptyset$, т. е. $K \supset T_x$, откуда $K \supseteq N_x$. Так как $K \supset H$, то $K \supseteq N_x H = G$. Таким образом, H — максимальная подгруппа группы G . Так как $(\chi(1), |G:N_x|) = 1$ и $|G:N_x| = p^v$, то $(\chi(1), p) = 1$, откуда следует, что $\chi(1)$ делит m .

Пусть $\chi_D = e(\varphi_1 + \dots + \varphi_l)$, $\varphi_i \in \text{Irr}(D)$ — клиффордовское разложение характера χ_D . Так как $\varphi_1(1) = \dots = \varphi_l(1)$, то $\chi(1) = e \varphi(1)$, где $\varphi = \varphi_1$. Так как $\varphi \in \text{Irr}(D)$, то $\varphi(1)$ — степень p , откуда следует, ввиду $(\chi(1), p) = 1$, что $\varphi(1) = 1$. Ввиду точности χ , отсюда вытекает, что подгруппа D абелева.

Из χ -максимальности H в силу предложения 3.1 следует, что $\chi_H = \psi_1 + \psi_2$, где $\psi_1, \psi_2 \in \text{Irr}(H)$, $\psi_1 \neq \psi_2$. Так как $|H| = p^x$, то $\psi_i(1)$ ($i = 1, 2$) — степени p . Если $\psi_i(1) > 1$ ($i = 1, 2$), то $\chi(1) = \psi_1(1) + \psi_2(1)$ делится на p , что противоречит условию $(\chi(1), p) = 1$. Таким образом, если $\psi_2(1) > 1$, то $\psi_1(1) = 1$. Если, например, $\psi_1(1) = 1$, то полагая $\psi_2(1) = p^r$, получим $\chi(1) = 1 + p^r$.

Докажем теперь, что $N_G(H) = H$. Если $N_G(H) \supset H$, то, ввиду максимальной подгруппы H , будем иметь $N_G(H) = G$. Таким образом, $H < G$ и, следовательно, $\psi_1(1) = \psi_2(1)$. Так как $|G:I_G(\psi_1)| = 2$ и $I_G(\psi_1) \supseteq H$, то $I_G(\psi_1) = H$, откуда следует, что $|G:H| = 2$ и χ индуцируется из H . Ввиду $H < G$ отсюда вытекает, что $G \setminus H \subseteq T_x$. Но тогда $N_x = \langle T_x \rangle = G$ — противоречие. Таким образом, $N_G(H) = H$. Далее мы почти дословно (с некоторыми упрощениями) повторяем доказательство теоремы 1. Как и в § 4, ввиду χ -максимальности H , имеем $G \setminus D \subseteq T_x \cup U_x$, откуда $D \supseteq Z(G)$ (так как $\text{Ker } \chi = \{1\}$, то $Z(\chi) = Z(G)$). Докажем, что $Z(G) \subset D$. Допустим, что $Z(G) = D$. Тогда, как и в § 4, $G \setminus D = T_x \cup U_x$, причем $U_x \neq \emptyset$, ввиду $\emptyset \neq H \setminus D \subseteq U_x$. Полагая $\mathfrak{G} = G/D$, через A и B обозначим образы T_x и U_x при естественном гомоморфизме $x \mapsto \bar{x}$ G на $\mathfrak{G}$. Группа $\mathfrak{G}$ несвязна с нормальным C — разбиением $\{A, B\}$. Как и в § 4, A оказывается классом сопряженных элементов группы $\mathfrak{G}$; при этом, существует такое $q \in \pi(\mathfrak{G})$, что A — множество всех нетривиальных q -элементов, B — множество всех нетривиальных q' -элементов группы $\mathfrak{G}$. Силоские q -подгруппы группы $\mathfrak{G}$ оказываются элементарными абелевыми CC -подгруппами и $\hat{A}$ — их объединение. Доказывается, что $\mathfrak{H} = H/D$ — q' -подгруппа группы $\mathfrak{G}$ и что $\mathfrak{G} = \mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{Q} \in \text{Syl}_q(\mathfrak{G})$. В частности, $|\mathfrak{G}| = p^n q^b$, где $p^n = |\mathfrak{H}|$ и $q^b = |\mathfrak{Q}|$. Заметим, что $q^b = |\mathfrak{G}:\mathfrak{H}| = |G:H| = m$, так что $|G| = p^x q^b$. Всё это показывает, что группа G разрешима. Далее, из $\bigcap_{i \in G} H^i = D$ следует, что $\bigcap_{i \in \mathfrak{G}} \mathfrak{H}^i = \{1\}$. Пусть

$\{1\} \neq \mathfrak{L} < \mathfrak{G}$. Тогда $\mathfrak{L} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{H}$ — максимальная подгруппа группы $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{H} = \mathfrak{G}$, откуда $\mathfrak{G}/\mathfrak{L} \cong \mathfrak{H}/\mathfrak{H} \cap \mathfrak{L} = q'$ -группа. Поэтому $\mathfrak{L}$ содержит все силоские q -подгруппы группы $\mathfrak{G}$, откуда следует, что $\mathfrak{L} \supseteq \hat{A}$. Поэтому $\mathfrak{L} \supseteq \langle A \rangle = \langle \bar{T}_x \rangle = \langle \bar{T}_x \rangle = \bar{N}_x = N_x/D = \mathfrak{N}$.*) Это показывает, что $\mathfrak{N} = N_x/D$ — минимальный нормальный делитель группы $\mathfrak{G}$. Так как $\mathfrak{G}$ разрешима, то $\mathfrak{N}$ -элементарная абелева группа. Так как $\mathfrak{N} \supset A$ и A состоит из q -элементов, то $\mathfrak{N}$ -элементарная абелева q -группа. Так как D — p -группа и $N_x/D = \mathfrak{N}$ — q -группа, то, ввиду $p \neq q$, $D \in \text{Syl}_p(N_x)$. В силу теоремы Шура—Цассенхауза $N_x = D \cdot M$, где $M \cong \mathfrak{N}$ — абелева. Так как $D = Z(G)$, то $N_x = D \times M$ абелева, что противоре-

*) Как легко видеть, $D = Z(D) \cap N_x$.

чит утверждению (i) леммы 6.1. Итак, доказано, что $Z(G) \subset D$. Возвращаясь к разложению $\chi_D = e(\varphi_1 + \dots + \varphi_l)$, мы, как и в § 4, докажем, что $l > 1$ и затем, пользуясь тем, что χ индуцируется из $K = I_G(\varphi)$ докажем, что $|K| = |H|$. Таким образом, $K \in \text{Syl}_p(G)$. Так как K и H сопряжены, то χ индуцируется из H и в дальнейшем можно вместо K иметь дело с H . Как и в § 4, доказываем, что $G \setminus H^G = T_\chi$. Докажем теперь, не прибегая к проективным представлениям, что $e = 1$. Для этого снова рассмотрим разложение $\chi_H = \psi_1 + \psi_2$. Так как χ индуцируется из H , то $\chi = \psi_i^G$, где $i = 1$ или $i = 2$. Так как $\chi(1) = |G:H|\psi_i(1)$ и $\psi_i(1)$ — степень p , то, ввиду $(\chi(1), p) = 1$ будем иметь $\psi_i(1) = 1$. Следовательно, $\chi(1) = |G:H|$. С другой стороны, $\chi(1) = e \psi(1) = el = e|G:H|$, ибо $l = |G:H|$. Поэтому $e = 1$. Как и в § 4, теперь получаем соотношение $|G:H| = 1 + |H:D|$. Далее, рассматривая действие группы $\mathfrak{G} = G/D$ на множестве $\Omega = \text{Cl}(H)$, как и в § 4 доказываем, что $\mathfrak{G}$ -группа Фробениуса с ядром $\mathfrak{N}$ порядка $|G:H|$ и с дополнительным множителем $\mathfrak{H} = H/D$. Так как $G/H^G = T_\chi$ и, согласно теории групп Фробениуса, $\mathfrak{G} \setminus \mathfrak{H}^{\mathfrak{G}} = \mathfrak{N}^*$, то, обозначив через $\bar{M}$ образ подмножества $M \subseteq G$ при естественном гомоморфизме группы G на $\mathfrak{G}$, получим $\bar{T}_\chi = \bar{G} \setminus \bar{H}^{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G} \setminus \mathfrak{H}^{\mathfrak{G}} = \mathfrak{N}^*$, откуда $\bar{N}_\chi = \langle \bar{T}_\chi \rangle = \mathfrak{N}$. Так как $D \cap T_\chi = \emptyset$ и $D \triangleleft G$, то $D \subset N_\chi^*$. Поэтому $\mathfrak{N} = \bar{N}_\chi = N_\chi/D$. Далее, так как $|\mathfrak{H}| = |H:D| = |G:H| - 1 = |\mathfrak{G}:\mathfrak{H}| - 1 = |\mathfrak{N}| - 1$, то $\mathfrak{G} \cong 2$ — транзитивной группе Фробениуса с ядром порядка $|\mathfrak{N}| = |G:H|$. Ядро $\mathfrak{N}$ группы Фробениуса $\mathfrak{G}$ является поэтому минимальным нормальным делителем группы $\mathfrak{G}$; вместе с тем, $\mathfrak{N}$ является, как известно, элементарной абелевой q -группой (q — простое число). Полагая $|\mathfrak{N}| = q^\beta$, получим $q^\beta = |\mathfrak{G}:\mathfrak{H}| = |G:H| = m$. Итак, $|G| = p^\alpha m = p^\alpha q^\beta$; в частности, G разрешима. Далее, так как D — p -подгруппа и $N_\chi/D = \mathfrak{N}$ — q -группа, то $D \in \text{Syl}_p(N_\chi)$. В силу теоремы Шура—Цассенхауза $N_\chi = D \cdot M$, где $M < N_\chi$, $M \cong \mathfrak{N}$ -элементарная абелева группа порядка $m = q^\beta$. Наконец, так как $D \cap T_\chi = \emptyset$, то $T_\chi \subseteq N_\chi \setminus D$. Замечая, что $|N_\chi \setminus D| = |N_\chi| - |D| = |D|(|\mathfrak{N}| - 1) = |D| \cdot |\mathfrak{H}| = |H| = n_\chi = |T_\chi|$, получаем $N_\chi \setminus D = T_\chi$. В заключение, заметим, что, ввиду соотношения $|\mathfrak{H}| = 1 + |\mathfrak{N}|$, числа q и p имеют различные четности. Таким образом, все утверждения предложения доказаны.

Следствие. Если $|G| = p^\alpha m$, $(m, p) = 1$ и $n_\chi = p$, то $p \neq 2$ и $G \cong D_p$.

Доказательство. В силу леммы 6.1 $|Z(\chi)|$ делит p и $\frac{p}{|Z(\chi)|} \equiv \chi(1)^2 - 1$.

Отсюда следует, что $Z(\chi) = \{1\}$, а потому и $\text{Ker } \chi = \{1\}$. Далее, из леммы 6.3 вытекает, что $N_\chi = G$. В силу предложения 6.7 $\alpha = 1$. Если $H \in \text{Syl}_p(G)$, то $|H| = p$ и, следовательно, $\chi_H \notin \text{Irr}(H)$. Из предложения 6.8 поэтому вытекает, что $p \neq 2$ и $G \cong D_p$, ибо, ввиду $Z(G) = Z(\chi) = \{1\}$, $A = \{1\}^*$.

Примечание. Объединяя предложения 6.8 и 6.9, приходим к следующему выводу. Пусть $|G| = p^\alpha m$, $m > 1$, $(m, p) = 1$, $n_\chi = p^\alpha$. Тогда, за исключением того случая, когда ограничение χ на силовскую p -подгруппу группы неприводимо, группа G разрешима и $|G| = p^\alpha q^\beta$, где q — простое число $\neq p$, причем p и q — различной четности. Все группы вида $A \times D$, где A циклическая p -группа $p \neq 2$

*) Можно и непосредственно применить теоремы 1 и 2. Существует и более элементарное доказательство, использующее неравенство (20).

и $D \cong D_{p^2}$ удовлетворяют условиям предложения 6.8. Примером группы, удовлетворяющей условиям теоремы 6.9 является S_4 : она обладает двумя точными неприводимыми характерами χ_i ($i=1, 2$) степени 3, каждый из которых имеет 8 нулей; при этом, $N_{\chi_i} = A_4$ и силовские 2-подгруппы χ_i — максимальны, а $D = V_4$.

Литература

- [1] W. BURNSIDE, On an arithmetical theorem connected with roots of unity and its application to group characteristics. Proc. Lond. Math. Soc. 2. 1 (1904), 112—116.
- [2] B. HUPPERT, Endliche Gruppen I, Berlin—Heidelberg—New York, 1979.
- [3] D. S. PASSMAN, Permutation Groups. New York—Amsterdam, 1968.
- [4] Z. ARAD, D. CHILLAG, On finite groups with conditions on the centralizers of p -elements. J. Algebra, 51, № 1 (1978), 164—172.
- [5] А. И. Вейцблит, О нулях неприводимых комплексных характеров конечных групп. Депонирована в ВИНТИ 12 дек. 1978 г. № 3767—78 Деп.
- [6] Э. М. Жмудь, О понятии «связности» конечной группы. Publ. Math. (Debrecen), 29, fasc. 1—2 (1982), 177—189.
- [7] Э. М. Жмудь, О нулях групповых характеров. Успехи математических наук 32 (1977), 223—224.
- [8] Э. М. Жмудь, Об ограничении групповых характеров на субнормальные подгруппы. Сборник «Вопросы теории групп и гомологической алгебры» Вып. 4, Ярославль, 1983.
- [9] А. И. Вейцблит, Э. М. Жмудь, Обобщенные группы Цассенхауза. Publ. Math. (Debrecen), 29, fasc. 1—2 (1982), 201—217.
- [10] М. Холл, Теория групп. Москва, 1962.
- [11] P. X. GALLAGHER, Zeros of characters of finite groups, J. Algebra 4.
- [12] Г. Кокстер, У. Мозер, Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. Москва, 1980.

(Поступило 4. VII. 1984 г.)