

Конечные группы с большими суммами степеней неприводимых характеров

К. Р. НЕКРАСОВ (Калинин) и Я. Г. БЕРКОВИЧ (Ростов на Дону)

Посвящаем Э. М. Жиудю

§1. Введение. Постановка задачи

Введем некоторые обозначения (в статье рассматриваются только конечные группы и их комплексные характеры).

Пусть G -группа порядка g , G' -ее коммутант порядка g' ; $\text{Irr}(G)$ -множество всех неприводимых характеров группы G ; $\text{Lin}(G)$ -множество всех линейных характеров группы G ; $\text{Irr}_1(G) = \text{Irr}(G) - \text{Lin}(G)$. При суммировании вместо $\text{Irr}(G)$, $\text{Irr}_1(G)$ пишем $I(G)$, $I_1(G)$ соответственно. Известно, что $|\text{Irr}(G)|$ равно $r(G)$ -числу классов сопряженных элементов группы G , а $|\text{Lin}(G)| = g/g'$. Через с. д. G обозначим множество различных степеней неприводимых характеров группы G .

Введем в рассмотрение такие функции от G :

$$t(G) = |\{x \in G | x^2 = 1\}|, \quad T(G) = \sum_{\chi \in I(G)} \chi(1); \quad f(G) = T(G)/g; \quad mc(G) = r(G)/g.$$

Простой делитель p порядка неабелевой группы G назовем существенным делителем g , если S_p -подгруппа группы G не лежит в ее центре $Z(G)$.

Основная теорема. Пусть p -наименьший существенный простой делитель порядка g неабелевой группы G . Если $f(G) > \frac{1}{p}$, то справедливо одно из следующих утверждений:

- (1) G содержит абелеву подгруппу индекса p .
- (2) $g' = p$.
- (3) $C_p \times C_p \cong G' \leq Z(G)$, с. д. $G \cong \{1, p, p^2\}$. Если $p^2 \in \text{с. д. } G$, то все характеры степени p^2 из $\text{Irr}(G)$ таковы, что их ядра пересекаются с G' по одной и той же подгруппе порядка p .
- (4) $g' \cong p^3$, с. д. $G = \{1, p\}$, $G/Z(G)$ порядка p^3 и экспоненты p . Если $G' \leq Z(G)$, то $\exp G' = p$.

Обратно, если G из заключения теоремы, то $f(G) > 1/p$, что легко проверяется.

Лемма 1.1. (1) $|[x, G]^*| = |G : C_G(x)| = g'([x, G] = \{[x, y] | y \in G\})$.

* $[x, G] = \{[x, y] | y \in G\}$ -не обязательно подгруппа в G .

(2) Если H -нормальная абелева подгруппа индекса p в неабелевой группе G , то $g = pg' |Z(G)|$, $|G : C_G(x)| = g'$ ($x \in G - H$).

(3) (Виландт) G нильпотентна $\Leftrightarrow G' \leq f(G)$.

(4) Если G не имеет инвариантного p -дополнения, она содержит минимальную ненильпотентную $\{p, q\}$ -подгруппу с инвариантной S_p -подгруппой.

(5) (Фиттинг) Если $G = H \cdot A$ -полупрямое произведение с инвариантной абелевой A и $(|H|, |A|) = 1$, то $A = C_A(H) \times \langle [H, A] \rangle$.

(4)-перефразировка классического результата Фробениуса.

Группой Шмидта называют минимальную ненильпотентную группу G . Тогда $G = PQ$, $P \in \text{Syl}_p(G)$ циклическая порядка p^a , $Q \in \text{Syl}_q(G)$ нормальна в G . Далее, Q элементарная или специальная. Если $Q \cap Z(G) = 1$, то Q элементарная. Если $Q \cap Z(G) > 1$, то $Q \cap Z(G) = Z(Q)$ и Q специальная. Положим $|Q \cap Z(G)| = q^c$, $|Q/Q \cap Z(G)| = q^b$. В этом случае G будем называть $S(p^a, q^b, q^c)$ -группой. Отметим, что b -порядок $q \pmod{p}$.

По формуле Фробениуса-Шура

$$t(G) = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} v(\chi) \chi(1),$$

где коэффициенты $v(\chi) \in \{0, \pm 1\}$. Поэтому $t(G) \leq T(G)$ (а из смысла коэффициентов $v(\chi)$ следует, что $t(G) = T(G) \Leftrightarrow$ все неприводимые представления группы G реализуются над полем вещественных чисел).

Уолл [1] классифицировал все G с $t(G)/g > 1/2$. В этом случае $f(G) > 1/2$.

Ш. Амикур [8] классифицировал все G с с. д. $G = \{1, 2\}$. И в этом случае $f(G) > 1/2$.

М. Айзекс и Д. Пасман [7] классифицировали все G с с. д. $G = \{1, p\}$, где p -простой делитель g . В этом случае $f(G) > 1/p$.

§2. Вспомогательные результаты

Лемма 2.1. Пусть H -нормальная подгруппа индекса p в неабелевой группе G , $y \in G - H$.

$$(1) \quad mc(G) = mc(H)/p^2 + \frac{p+1}{pg^2} \sum_{x \in G-H} |C_G(x)|.$$

$$(2) \quad \text{Если } H \text{ абелева, то } [y, G] = [y, H] = G', \quad mc(G) = \frac{1}{p^2} + \frac{p^2-1}{p^2 q'}.$$

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Поэтому докажем (1).

Пусть $G = Hx \cup Hx^2 \cup \dots \cup Hx^p$, $D_{ij} = Hx^i \times Hx^j$ (декартово произведение), $K = \{(a, b) \in G \times G | ab = ba\}$, $K_{ij} = K \cap D_{ij}$. Тогда $K = \bigcup_{i,j} K_{ij}$ (разбиение). Имеем $|K| = \sum_G |C_G(x)| = gr(G)$; поэтому $|K_{pp}| = hr(H) = h^2 mc(H)$ (здесь $h = |H|$), а для $(i, j) \neq (p, p)$ имеем

$$|K_{ij}| = \sum_{x \in H} |C_H(y)| = \frac{1}{p} \sum_{x \in H} |C_G(y)|.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} g^2 mc(G) &= |K| = h^2 mc(H) + (p^2 - 1) \cdot \frac{1}{p} \sum_{x \in H} |C_G(x)| = \\ &= \frac{g^2}{p^2} mc(H) + \frac{p^2 - 1}{p(p-1)} \sum_{g \in H} |C_G(g)|. \quad \square \end{aligned}$$

Лемма 2.2. Пусть $H \trianglelefteq G$, $|H| = h$.

(1) (Эрнест) $mc(G) \leq mc(H)$. $\square$

(2) $f(G) \leq f(H)$.

(3) Если в $\text{Irr}(G)$ имеется α характеров степени p и $p \nmid \text{c. d. } H$, то $f(H) \equiv f(G) + \alpha p/g$.

(4) $f(G) = f(H) \Leftrightarrow mc(G) = mc(H)$.

(5) $f(G) = f(H) \Rightarrow G' = H'$ и все нормальные в H подгруппы нормальны и в G .

(6) $H \trianglelefteq G \Rightarrow f(G) \leq f(H) - \frac{1}{h}(1 - f(G/H))$. $\square$

Доказательство. Докажем лишь утверждения (2)–(5).

(3) Запишем соотношение

$$\frac{g}{h} \sum_{\chi \in \text{Irr}(H)} \chi(1) = \sum_{\chi \in \text{Irr}(H)} \chi^G(1) = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(1) \langle \chi, \sum_{\chi \in \text{Irr}(H)} \chi^G \rangle = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} \chi(1) \langle \chi_H, \sum_{\chi \in \text{Irr}(H)} \chi \rangle.$$

Пусть $\{n_1, \dots, n_s\} = \text{c. d. } G - \text{c. d. } H$, и в $\text{Irr}(G)$ ровно α_i характеров степени n_i . Если $\chi \in \text{Irr}(G)$, $\chi(1) = n_i$, то $\chi_H \notin \text{Irr}(H)$, так что $\langle \chi_H, \sum_{\chi \in \text{Irr}(H)} \chi \rangle \equiv 2$. Это влечет

$$\frac{g}{h} T(H) \equiv T(G) + n_1 \alpha_1 + \dots + n_s \alpha_s.$$

Тем самым доказано (3), а (3) $\Rightarrow$ (2).

(4) $mc(G) = mc(H) \Leftrightarrow r(G) = \frac{g}{h} r(H)$. Поэтому, если $\varphi \in \text{Irr}(H)$, то φ^G распадается на g/h попарно различных неприводимых компонент и $T(G) = \frac{g}{h} T(H)$, $f(G) = f(H)$. Пусть теперь $f(G) = f(H)$; тогда $T(G) = \frac{g}{h} T(H)$.

Имеем $\varphi^G(1) = \frac{g}{h} \varphi(1)$ для $\varphi \in \text{Irr}(H)$, и таков же вклад φ^G в $T(G)$. Это означает, что $\langle \varphi^G, \chi \rangle \leq 1$ для $\chi \in \text{Irr}(G)$. Если $\mu \in \text{Irr}(H) - \{\varphi\}$, то вклад $\varphi^G + \mu^G$ в $T(G)$ равен $\varphi^G(1) + \mu^G(1)$, и поэтому $\langle \varphi^G, \mu^G \rangle = 0$. Теперь ясно, что $r(G) = \frac{g}{h} r(H)$, $mc(G) = mc(H)$.

(5) Пусть $\lambda \in \text{Lin}(H)$. Тогда $\lambda^G = \mu^1 + \dots + \mu^{|G:H|}$, где линейные μ^i попарно различны. Поэтому

$$\frac{g}{g'} = |\text{Lin}(G)| = \frac{g}{h} |\text{Lin}(H)| = \frac{g}{h}, \quad \frac{h}{h'} = \frac{g}{h},$$

откуда $g' = h'$, $G' = H'$. Пусть теперь $M \trianglelefteq H$, $\text{Irr}(H/M) = \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$. Тогда

$$\varphi_i^G = \chi_i^1 + \dots + \chi_i^{q/h}, \quad 1 \leq i \leq k,$$

попарно различные $\chi_i^j \in \text{Irr}(G)$. Так как $(\chi_i^j)_H = \varphi_i$, то $H \cap (\bigcap_{i,j} \ker \chi_i^j) = \bigcap_i \ker \varphi_i = M$ и $M \trianglelefteq G$. $\square$

Лемма 2.3. $f(G)^2 \leq mc(G)$, и неравенство здесь обращается в равенство тогда и только тогда, когда G абелева.

Доказательство. Вычислим

$$\begin{aligned} \sigma/g &= \frac{1}{g} \sum_G \left(\sum_{I(G)} \chi(x) \right)^2 = \frac{1}{g} \sum_G \left(\sum_{I(G) \times I(G)} \psi(x) \chi(x) \right) = \\ &= \sum_{I(G) \times I(G)} \frac{1}{g} \sum_G \psi(x) \chi(x) = \sum_{I(G) \times I(G)} \langle \psi, \bar{\chi} \rangle = r(G), \end{aligned}$$

так что $\sigma = gr(G)$. С другой стороны, из $\sum_{I(G)} \chi(x) \in \mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$ -поле вещественных чисел) для $x \in G$ следует

$$\sigma = \left(\sum_{I(G)} \chi(1) \right)^2 + \sum_{G-\{1\}} \left(\sum_{I(G)} \chi(x) \right)^2 \geq \left(\sum_{I(G)} \chi(1) \right)^2 = T(G)^2 = g^2 f(G)^2.$$

Итак, $gr(G) \geq g^2 f(G)^2 \Rightarrow mc(G) \geq f(G)^2$.

Если $mc(G) = f(G)^2$, то $\sum_{I(G)} \chi(x) = 0$ для $x \in G - \{1\}$, то есть характер $\tau = \sum_{I(G)} \chi$ исчезает на $G - \{1\}$. Это влечет $\tau = m\varrho_G$ с натуральным m (здесь ϱ_G - регулярный характер группы G), и теперь ясно, что все неприводимые характеры группы G линейны, так что G абелева. $\square$

Лемма 2.4. Пусть $G = PQ - S(p^a, q^b, q^c)$ -группа, $P \in \text{Syl}_p(G)$, $Q \in \text{Syl}_q(G)$, $\chi \in \text{Irr}_1(G)$.

(1) Если $Q \cap Z(G) \leq \ker \chi$, то $\chi(1) = p$. Если $Q \cap Z(G) \not\leq \ker \chi$, то $\chi(1) = q^{b/2}$.

$$(2) \quad mc(G) = \frac{1}{p^2 qb + c} (q^b + p^2 q^c - 1),$$

$$f(G) = \frac{1}{pq b + c} (q^b + p + pq^{b/2+c} - pq^{b/2} - 1).$$

(3) Если $H \leq Z(G)$, то $f(G/H) \cong f(G)$. Если $c > 0$ и $H \leq Z(Q)$, то $f(G/H) = f(G) \Leftrightarrow p = 1 + q^{b/2}$, $q = 2$.

(4) Если $p > q$ и $f(G) \cong \frac{1}{q}$, то $p=3$, $q=2$, $G/P \cap Z(G) \cong A_4$ или $SL(2, 3)$, $f(G)=1/2$.

Доказательство. Если $Q \cap Z(G) \leq \ker \chi$, то $\chi(1)=p$, так как $G/\ker \chi$ абелева, но содержит абелеву нормальную подгруппу индекса p . Пусть $Q \cap Z(G) \not\leq \ker \chi$. Можем считать, что χ точен. Тогда $Z(G)$ циклический, а так как $Z(Q)=Q \cap Z(G)$ элементарная, то Q экстраспециальная, так что $\text{c.d. } Q = \{1, q^{b/2}\}$. По теореме Клиффорда $q^{b/2}$ делит $\chi(1)$, а из $\chi(1)^2 \leq |G/Z(G)| = pq^b$ выводим $\chi(1)=q^{b/2}$. Это доказывает (1), а (2)—(4) легко следуют из проведенного доказательства. $\square$

Лемма 2.5. Пусть все подгруппы из G' нормальны в G . Тогда все $\chi \in \text{Irr}(G)$ с $G' \cap \ker \chi = 1$ индуцируются из одной и той же абелевой подгруппы, и, в частности, все они имеют одну и ту же степень.

Доказательство. Так как группа G сверхразрешима, она является M -группой, и поэтому $\chi = \lambda^G$, где λ -линейный характер подгруппы H индекса $\chi(1)$ в G . Из

$$1 = \ker \chi = \bigcap_G (\ker \lambda)^x \cong \bigcap_G (H')^x = H'$$

следует, что H абелева. Остальное следует из того факта, что степень неприводимого характера не превосходит индекса абелевой подгруппы. $\square$

Лемма 2.6. Пусть $H \triangleleft G$, $l = \max \{\chi(1) | \chi \in \text{Irr}(G) - \text{Irr}(G/H)\}$. Тогда

(1) Если $H \cap G' = 1$, то $f(G/H) = f(G)$, $\text{mc}(G/H) = \text{mc}(G)$.

(2) Если $f(G) \cong 1/l$, то $f(G/H) \cong f(G)$.

Доказательство. (1) Пусть $H \cap G' = 1$. Положим $\bar{G} = G/H$, $\bar{g} = |\bar{G}|$, $\bar{G}' = G'H/H$, $\bar{g}' = |\bar{G}'|$, $h = |H|$. Так как $g/g' = h \cdot \bar{g}/\bar{g}'$, то существуют такие попарно различные $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ в $\text{Lin}(G)$, что справедливо такое разбиение

$$\text{Irr}(G) = \lambda_1 \text{Irr}(\bar{G}) \cup \dots \cup \lambda_h \text{Irr}(\bar{G}).$$

Поэтому $gf(G) = T(G) = hT(\bar{G}) = h\bar{g}f(\bar{G}) = gf(\bar{G})$, $g\text{mc}(G) = r(G) = hr(\bar{G}) = h\bar{g}\text{mc}(\bar{G}) = g\text{mc}(\bar{G})$.

(2) Можем считать, что H -минимальная нормальная подгруппа в G . Если $H \not\leq G'$, результат следует из (1). Пусть $H \leq G'$. Если $l=1$, то G абелева, и все доказано. Пусть $l \geq 2$. Мы имеем $g/g' = \bar{g}/\bar{g}'$. Поэтому

$$g = \sum_{\chi \in \text{Irr}(\bar{G})} \chi(1)^2 + \sum_{\chi \in \text{Irr}(G) - \text{Irr}(\bar{G})} \chi(1)^2 \cong \frac{g}{h} + l \sum_{\chi \in \text{Irr}(G) - \text{Irr}(\bar{G})} \chi(1) =$$

$$\frac{g}{h} + l(T(G) - T(\bar{G})) = \frac{g}{h} + l(gf(G) - \bar{g}f(\bar{G})),$$

откуда $1 - \frac{1}{h} \cong l(f(G) - f(\bar{G})/h)$. Предположим, что $f(G) > f(\bar{G})$. Тогда

$$1 - \frac{1}{h} > lf(G) \left(1 - \frac{1}{h}\right), \quad f(G) < \frac{1}{l}, \quad \text{противоречие.} \quad \square$$

Лемма 2.7. Пусть q -наименьший простой делитель q , $f(G) \cong \frac{1}{q}$.

(1) Если $f(G) > \frac{1}{q}$, то G имеет инвариантное q -дополнение.

(2) Если G не имеет инвариантного q -дополнения, то $q=2$, $f(G)=1/2$, $G=HZ(G)$, $H=S(3^a, 2^2, 2^e)$ -группа, $e \in \{0, 1\}$.

Доказательство. Пусть G не имеет инвариантного q -дополнения. Тогда она по 1.1(4) содержит $S(r^a, q^b, q^c)$ -подгруппу F . Из $f(F) \cong f(G) \cong \frac{1}{q}$ (по 2.2(2))

следует $q=2$, $r=3$, $c \leq 1$, $f(F)=1/2$ по 2.4(4). Тогда $f(G)=1/2$, и (1) доказано. Отметим, что $F=PQ-S(3^a, 2^2, 2^e)$ -подгруппа с $e \in \{0, 1\}$ (это следует из свойств групп Шмидта), $P \in \text{Syl}_3(F)$, $Q \in \text{Syl}_2(F)$, $F'=Q \in \{E(4), Q(8)\}$. По 2.2(5) имеем $F'=Q=G'$. По 1.1(3) имеем $Q \cong \Phi(G)$ (здесь $\Phi(G)$ -подгруппа Фраттини группы G), так что $G=MQ$ для некоторой максимальной в G подгруппы M .

(i) $Q=E(4)$. Тогда $M \cap Q=1$, M абелева, $C_M(Q)=Z(G)$, и теперь ясно, что $G/Z(G) \cong A_4$, $G=FZ(G)$. По 2.2(2) и 2.4(1) имеем $f(G)=f(F)=1/2$.

(ii) $Q=Q(8)$ (где $Q(8)$ -обычная группа кватернионов). Тогда $M' \cong M \cap Q = Z(Q)$ и M нильпотентна. Но $G/C_G(Q)$ изоморфна подгруппе порядка, кратного 12, в $\text{Aut}(Q) \cong S_4$. Так как $f(S_4)=5/12 < 1/2$, а $f(G/C_G(Q)) \cong f(G)$ по лемме 2.6, то $G/C_G(Q) \cong A_4$. Это дает $G=FC_G(Q)$. Снова по 2.6 и (1) имеем $f(G/Z(Q))=1/2$. Тогда $[P, C_G(Q)] \subseteq Z(Q)$. Но в этом случае $PZ(Q) = P \times Z(Q) \triangleleft PC_G(Q) \Rightarrow P \triangleleft C_G(Q)P$, то есть $[P, C_G(Q)] \subseteq P \cap C_G(Q) \cap Z(Q) = 1$. Теперь ясно, что $G=F * C_G(Q)$ -центральное произведение. Если $C_G(Q)$ абелева, то $C_G(Q)=Z(G)$, и все доказано. Предположим, что $C_G(Q)$ неабелева. Возьмем в $C_G(Q)$ минимальную неабелеву подгруппу L и положим $G_0=FL$. Очевидно, $f(G_0)=1/2=f(F)$ по 2.2(2). Из 2.2(5) следует с. d. $G_0 = \text{с. d. } F = \{1, 2, 3\}$. Так как $G_G(Q)$ нильпотентна с коммутантом порядка 2, L -2-подгруппа. Для $T=LQ$ имеем $T' \cong C_2$, с. d. $T = \{1, 2\}$. Поэтому T содержит абелеву подгруппу индекса 2 по 2.5, а из 1.1(2) следует $|T:Z(T)|=4$. Но $Z(T)=Z(L)Z(Q)$ имеет тот же порядок, что и L , что невозможно, так как L неабелева. Итак, $C_G(Q)$ абелева и $G=FZ(G)$. $\square$

Лемма 2.8. Пусть G -неабелева p -группа.

(1) Если $f(G) > 1/p$, то $g' \cong \frac{p-1}{pf(G)-1}$. Равенство здесь достигается тогда и только тогда, когда с. d. $G = \{1, p\}$.

(2) Если $f(G) \cong \frac{p^2+p-1}{p^3}$, то справедливо одно из утверждений:

(2а) $g'=p$, G содержит абелеву подгруппу индекса p , $f(G) = \frac{1}{p^2}(2p-1)$.

(2б) $g'=p$, G содержит абелеву подгруппу индекса p^2 , но не p , $f(G) = \frac{1}{p^3}(p^2+p-1)$.

(2в) $g'=p^2$, с. d. $G = \{1, p\}$; G содержит абелеву подгруппу индекса p или $G/Z(G)$ элементарная порядка p^3 и коммутант G' имеет экспоненту p , $f(G) = \frac{1}{p^3}(p^2+p-1)$.

Доказательство. (1) Из $g = g/g' + \sum_{\chi \in \text{Irr}_1(G)} \chi(1)^2 \cong g/g' + p(T(G) - g/g') =$
 $= pgf(G) - (p-1) \cdot g/g'$ следует $g' \leq \frac{p-1}{pf(G)-1}$. Второе утверждение из (1)
 теперь очевидно.

(2) Пусть H -минимальная неабелева подгруппа в G . Тогда $f(H) =$
 $= (2p-1)/p^2 \cong f(G)$ по 2.2(2).

Если $f(G) = (2p-1)/p^2$, то $g' = p$ по (1), G содержит абелеву подгруппу
 индекса p по 2.5.

Пусть $\frac{p^2+p-1}{p} \cong f(G) < \frac{2p-1}{p^2}$. Тогда $g' \leq p^2$ по (1). Предположим, что
 $g' = p$. Тогда $|G/Z(G)| = p^{2t}$, и легко видеть, что $t=2$, с. d. $G = \{1, p^2\}$,
 $f(G) = \frac{p^2+p-1}{p^3}$ (по 2.5 имеем |с. d. G |=2).

Далее пусть $g' = p^2$. Тогда с. d. $G = \{1, p\}$ по (1). Допустим, что G не
 содержит абелеву подгруппу индекса p .

Пусть $\chi \in \text{Irr}_1(G)$. Тогда $\chi = \lambda^G$, где $\lambda \in \text{Lin}(H)$, $|G:H| = p$. По предполо-
 жению $1 < H' \triangleleft G$. Но $H' \leq \ker \chi$.

Поэтому $H' = G' \cap \ker \chi$. В $\text{Irr}_1(G)$ имеется характер τ с $H' \cap \ker \tau = 1$.
 Снова $\tau = \mu^G$, где $\mu \in \text{Lin}(F)$, $|G:F| = p$, $1 < F' \triangleleft G$, $F' \leq \ker \tau$, так что
 $G' \cap \ker \tau = F'$.

Тогда $G' = H' \times F'$ (так как $g' = p^2$). Из $HZ(G) < G$, $FZ(G) < G$ следует
 $Z(G) \leq H \cap F$. Для $x \in G - H$ имеем $C_{Z(H)}(x) = Z(G)$. По лемме 3.6 элемент
 x можно выбрать так, что $|G:C_G(x)| = p$. Пусть H содержит абелеву под-
 группу индекса p . Тогда $|H:Z(H)| = p^2$ по (1). Если $Z(H) \leq Z(G)$, то $G/Z(G)$
 порядка p^3 , а так как G не содержит абелеву подгруппу индекса p , то
 $\exp G|Z(G) = p$. Пусть $Z(H) \not\leq Z(G)$. Тогда $C_G(x) \cap Z(H) = Z(G)$ имеет в $Z(H)$
 индекс p . Для $y \in Z(H) - Z(G)$ имеем $G = C_H(x) * \langle x, y \rangle$ (центральное произ-
 ведение) и $\langle x, y \rangle$ неабелева. По 1.1(1) имеем $[[x, G]] = p$. Поэтому $|\langle x, y \rangle'| = p$.
 Так как $\langle x, y \rangle' \cap H' = 1$, то по 2.13 имеем

$$f(G) = f(C_H(x))f(\langle x, y \rangle') \leq \left(\frac{2p-1}{p^2} \right)^2 < \frac{p^2+p-1}{p^3},$$

противоречие.

Пусть H и F не содержат абелевых подгрупп индекса p . Тогда из $|H'| = p$
 имеем ввиду $|H:Z(H)| = p^{2t}$, $t \geq 2$, что $f(H) = \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p^{t+1}}$. Так как $f(H) \cong$
 $\cong f(G) \cong \frac{p^2+p-1}{p^3}$ по 2.1(2), это дает $t=2$, так что $f(H) = f(G)$, $G' = H'$ по
 2.2(5), противоречие, так как $g' = p^2 > |H'| = p$. $\square$

Лемма 2.9. Пусть $G = PK$ -полупрямое произведение с ядром K , $P \in \text{Syl}_p(G)$,
 $|P| = p^2$, $C_G(K) = K$. Тогда $\text{mc}(G) \leq 1/p^2$ (так что $f(G) < 1/p$ по 2.3).

Доказательство. с. d. $G \subseteq \{1, p, p^2\}$ по теореме Н. Ито о степенях
 характеров. Пусть d_i -число характеров степени p^i в $\text{Irr}(G)$. Можем считать,

что G не имеет неединичного абелева прямого множителя. Тогда $K=G'$ по 1.1(5), так что $d_0=p^2$. Предположим, что $mc(G)>1/p^2$. Тогда

$$p^2 + p^2 d_1 + p^4 d_2 = g$$

$$p^2 + d_1 + d_2 = r(G) > \frac{g}{p^2},$$

откуда $p^2(p^2-1)-p^2(p^2-1)d_2>0$, $d_2=0$, так что с. д. $G=\{1, p\}$.

Пусть $\chi \in \text{Irr}(G)$ точен. Так как G — M -группа, то $\chi = \lambda^G$, где $\lambda \in \text{Lin}(T)$, $|G:T|=p$. Но $1 = \ker \chi \cong T'$, так что $T'=1$ (так как T' нормальна в G вместе с T), и T абелева. Но тогда $C_G(K) > K$, противоречие. Итак, в $\text{Irr}(G)$ нет точных характеров. В частности, K — не минимальная нормальная подгруппа в G . Из с. д. $G=\{1, p\}$ следует, что G — не группа Фробениуса. Пусть $P \in \text{Syl}_p(G)$. Далее считаем, что G — контрпример минимального порядка.

Пусть M_1, M_2 — такие нормальные делители в G , что $M_i < K$, $i=1, 2$, $M_1 M_2 = K$. Предположим, что $M_1 \cap M_2 = D > 1$. По индукции и 2.2(1) в P имеются элементы $x_i \neq 1$ такие, что $x_i \in C_G(M_i)$, $i=1, 2$. Из $C_G(K)=K$ следует, что $\langle x_1 \rangle \cap \langle x_2 \rangle = 1$. Но тогда $C_G(D) \cong \langle K, x_1, x_2 \rangle = G$, что противоречит $G'=K$ и 1.1(5).

Для $x \in P - \{1\}$ положим $K_x = C_K(x)$. Так как $K_x = Z(\langle K, x \rangle)$ и $\langle K, x \rangle \triangleleft G$, то $K_x \triangleleft G$. По лемме 1.1(5), примененной к действию $\langle x \rangle$ на K , имеем $K = K_x \times \bar{K}_x$. По аналогу теоремы Машке для конечных абелевых групп можем считать, что $\bar{K}_x$ инвариантна в G . По результату предыдущего абзаца K_x и $\bar{K}_x$ — минимальные нормальные делители в G . Из $Z(G)=1$ следует, что P нециклическая. Пусть $x_1, \dots, x_{p+1}$ — образующие различных подгрупп порядка p в P , $K_i = K_{x_i}$. Из $p+1 > 2$ следует, что $|K_i| = |K_j|$ для всех $i, j \leq p+1$, при этом $K_1, \dots, K_{p+1}$ — полный набор минимальных нормальных делителей группы G . Так как эти подгруппы K_i не покрывают K , то $K - (K_1 \cup \dots \cup K_{p+1})$ содержит элемент w . Но $N = \langle zwz^{-1} | z \in P \rangle \triangleleft G$. Отсюда следует, что $N = K$ — цоколь Ремака группы G , и по теореме Гашюца в $\text{Irr}(G)$ имеется точный характер, что противоречит доказанному. $\square$

Лемма 2.10. Пусть $1 < u \leq v$ — такие вещественные числа, что $u, v \mid \text{с. д. } G = \emptyset$. Тогда

$$uv mc(G) + 1 \cong \frac{(u-1)(v-1)}{g'} + (u+v)f(G).$$

Равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда с. д. $G \subseteq \{1, u\} \cup \{v\}$.

Доказательство. Пусть $1 < n \in \text{с. д. } G$. Тогда $(n-u)(n-v) \cong 0$, откуда $n^2 + uv \cong n(u+v)$, при этом равенство имеет место тогда и только тогда, когда $n \in \{u\} \cup \{v\}$.

Обозначая d_n число характеров степени n в $\text{Irr}(G)$, имеем

$$(2.1) \quad d_1 + \sum_{n>1} d_n = r(G) = gmc(G)$$

$$(2.2) \quad d_1 + \sum_{n>1} n^2 d_n = g.$$

Умножая (2.1) на uv и складывая результат с (2.2), получаем

$$(2.3) \quad (uv+1)d_1 + \sum_{n>1} (n^2+uv)d_n = (uv \operatorname{mc}(G)+1)g.$$

По ранее сказанному и (2.3) имеем

$$(2.4) \quad \begin{aligned} g(uv \operatorname{mc}(G)+1) &\cong (uv+1)d_1 + (u+v) \sum_{n>1} h d_n = \\ &= (uv-u-v+1)d_1 + (u+v) \sum_{\text{c.d. } G} n d_n = \\ &= (u-1)(v-1) \frac{g}{g'} + (u+v)gf(G) \end{aligned}$$

и неравенство доказано. Равенство в (2.4) имеет место тогда и только тогда, когда $n^2+uv=(u+v)n$ для всех $n \in \text{c.d. } G - \{1\}$, откуда $n \in \{u\} \cup \{v\}$. $\square$

Лемма 2.11. Пусть p -наименьший существенный простой делитель g , $f(G) \cong 1/p$. Тогда G содержит p' -холловскую подгруппу H по 2.7. Если H неабелева, то $G' = H'$ порядка $q \leq \frac{1}{2}p(p+1)$, число q простое,

Доказательство. По 2.7 имеем $H \triangleleft G$. Положим $\varepsilon = \varepsilon(p) = 0$, если $p=2$, и 1, если $p>2$.

Так как в $\operatorname{Irr}_1(H)$ нет характеров степени, меньшей $p+1+\varepsilon$, то

$$h \cong \frac{h}{h'} + (p+1+\varepsilon) \left(T(H) - \frac{h}{h'} \right) \cong (p+1+\varepsilon) \frac{h}{p} - (p+\varepsilon) \frac{h}{h'},$$

откуда $\frac{p+\varepsilon}{h'} \cong \frac{1+\varepsilon}{p}$, $h' \cong \frac{p(p+\varepsilon)}{1+\varepsilon}$.

Если $p=2$, то $h' \leq p^2=4$, откуда $h'=3$. Если $p>2$, то $h' \leq \frac{1}{2}p(p+1)$, так что $h'=q$, q -простое число.

Если α -число характеров степени p в $\operatorname{Irr}(G)$, то по 2.2(3)

$$(2.5) \quad f(H) \cong f(G) + \frac{p\alpha}{g}$$

(i) $p=2$. Тогда

$$g \cong g/g' + 2^2\alpha + 3(T(G) - g/g' - 2\alpha) = g/g' + 4\alpha + 3(g/2 - g/g' - 2\alpha)$$

откуда

$$(2.6) \quad \frac{2}{g'} \cong \frac{1}{2} - \frac{2\alpha}{g}.$$

Из леммы 2.4 следует, что H нильпотентна, так что

$$\frac{1}{2} \cong f(H) \cong \frac{2q-1}{q^2},$$

откуда $q=3$ и $f(H)=5/9$; последнее следует из 2.8. По (2.5), $\frac{2\alpha}{g} \cong \frac{5}{9} - \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$. Поэтому по (2.6), $\frac{1}{g'} \cong \frac{1}{2} - \frac{1}{18} = \frac{4}{9}$, так что $g' \cong 4$. Но $3=h'$ делит g' ; поэтому $g'=3$, $G'=H'$.

(ii) $p>2$.

Так как в $\text{Irr}(G)$ нет характеров степени $p+1$, то

$$g \cong \frac{g}{g'} + p^2\alpha + (p+2)\left(\frac{g}{p} - \frac{g}{g'} - p\alpha\right),$$

откуда

$$(2.7) \quad \frac{p+1}{g'} \cong \frac{2}{p} - \frac{2p\alpha}{g}$$

так что

$$(2.8) \quad \frac{p+1}{g'} > \frac{2}{p} - 2\left(f(H) - \frac{1}{p}\right) = \frac{4}{p} - 2f(H).$$

По лемме 2.5 все характеры из $\text{Irr}_1(H)$ имеют одну и ту же степень m ; поэтому $f(H) = \frac{1}{q} + \frac{1}{m} - \frac{1}{mq} < \frac{2}{p}$. Тогда $\frac{4}{p} - 2f(H) > 0$, а из (2.8) следует $g' < (p+1) / \left(\frac{4}{p} - 2f(H)\right)$. Но, так как m делит $q-1$ и $m > p$, то четное $q-1 \cong \cong 2m > 2p$, так что

$$f(H) = \frac{1}{q} + \frac{1}{m} - \frac{1}{mq} < \frac{1}{q} + \frac{1}{m} < \frac{1}{2p} + \frac{1}{p} = \frac{3}{2p}.$$

Поэтому $\frac{4}{p} - 2f(H) > \frac{4}{p} - 2 \cdot \frac{3}{2p} = \frac{1}{p}$. Следовательно,

$$g' < \frac{p+1}{1/p} = p(p+1)$$

откуда следует, что g' -простое число. Это влечет $g'=h'=q$. $\square$

Лемма 2.12. Пусть $f(G) \cong 1/2$, $G' = C_3$.

(1) Если $G' \cong Z(G)$, то $G/Z(G) = C_3 \times C_3$, $f(G) = 5/9$.

(2) Если $G' \not\cong Z(G)$, то G содержит абелеву подгруппу индекса 2, $G/Z(G) = S_3$, $f(G) = 2/3$.

Доказательство. (1) В этом случае G нильпотентна, $G = P \times H$, H абелева, $P \in \text{Syl}_3(G)$, $f(P) \cong 1/2 > \frac{3^2+3-1}{27}$, так что по лемме 2.8 имеем $P/Z(P) = C_3 \times C_3$, $f(P) = 5/9$, откуда $G/Z(G) = C_3 \times C_3$, $f(G) = f(P) = 5/9$.

(2) В этом случае $G' \not\cong f(G)$ по 1.1(3) (так как G ненильпотентная). Поэтому $G = M \cdot G'$. Тогда $G/Z(G) = G/C_M(G') = S_3$, так что $C_G(G')$ -абелева под-

группа индекса 2 в G . Далее, по 2.6(1) имеем

$$f(G) = f(G/Z(G)) = f(S_3) = \frac{2}{3}. \quad \square$$

Лемма 2.13. Пусть $G = A * B$ -центральное произведение, $A' \cap B' = 1$. Тогда $mc(G) = mc(A)mc(B)$, $f(G) = f(A)f(B)$.

Доказательство. Положим $G = A * B = (\bar{A} \times \bar{B})/D$, где $\bar{A} \cong A$, $\bar{B} \cong B$, D изоморфна подгруппе из $Z(A)$ и $Z(B)$. Из $A' \cap B' = 1$ следует $G' = A' \times B' \cong \bar{A}' \times \bar{B}' = (\bar{A} \times \bar{B})' = \bar{G}'$, где $\bar{G} = \bar{A} \times \bar{B}$. Отсюда выводим $D \cap G' = 1$. Теперь результат следует из 2.6(1). $\square$

§3. Завершение доказательства основной теоремы

Лемма 3.1. Пусть ненильпотентная группа G имеет инвариантное абелево p -дополнение H . Если $f(G) > 1/p$, то G содержит абелеву подгруппу индекса p .

Доказательство. Пусть G -контрпример минимального порядка. Тогда p^3 делит g по 2.9.

Если все подгруппы индекса p в G нильпотентны, то $P \in \text{Syl}_p(G)$ циклическая, $|P: P \cap Z(G)| = p$, так что $C_G(H)$ -абелева подгруппа индекса p в G , противоречие. Итак, в G имеется ненильпотентная подгруппа индекса p (ее мы обозначим F). Из $f(F) \cong f(G) > 1/p$ и индукции следует, что в F имеется абелева подгруппа D индекса p . Так как $H < D \leq C_G(H) \triangleleft G$, в $Z(G)$ имеется элемент c порядка p . По 2.6 и индукции в $\bar{G} = G/\langle c \rangle$ имеется абелева подгруппа $A/\langle c \rangle$ индекса p (отметим, что $\bar{G}$ ненильпотентна). По предположению $A' = \langle c \rangle$. Понятно, что A -подгруппа Фиттинга группы G .

Если в $Z(G)$ имеется отличная от $\langle c \rangle$ подгруппа $\langle y \rangle$ простого порядка, то в $G/\langle y \rangle$ по индукции (см. лемму 2.6) имеется абелева подгруппа $B/\langle y \rangle$ индекса p . Тогда

$$B = F(G) = A, \quad B' = A' \leq \langle c \rangle \cap \langle y \rangle = 1,$$

A абелева, противоречие. Итак, $Z(G)$ -циклическая p -подгруппа.

Пусть M -минимальная подгруппа в G , и предположим, что $M < H$. Из $C_G(M) = A \not\leq P$ следует, что PM ненильпотентна. Поэтому по лемме 2.2(2) и индукции PM содержит абелеву подгруппу B индекса p . Тогда из $C_G(M) = A$ следует $B < A$, и силовская p -подгруппа в A абелева, откуда A абелева, противоречие. Итак, H -минимальная нормальная подгруппа в G .

Из $x \in H - \{1\}$ следует $C_G(x) = A$. Поэтому, если $z \in G - A$, то $|G: C_G(x)| \cong \cong p|H| = ph$. Тогда по 2.1(1) имеем

$$mc(G) \leq \frac{mc(H)}{p^2} + \frac{p+1}{pg^2} \cdot \frac{g(p-1)}{p} \cdot \frac{g}{ph} \leq \frac{p^2+p-1}{p^5} + \frac{p^2-1}{p^3h}.$$

Из $mc(G) > f(G)^2 > \frac{1}{p^2}$ (по лемме 2.3) следует $h \leq p+1$. Но из $N_{PH}(p) = P$ следует $h \equiv 1 \pmod{p}$, так что $h \equiv p+1$. Итак, $h = p+1$.

По сказанному H и $\langle c \rangle$ -единственные минимальные нормальные делители группы G . Поэтому сумма квадратов степеней точных характеров из $\text{Irr}(G)$

равна $g - \left(\frac{g}{h} + \frac{g}{p} - \frac{g}{ph}\right) > 0$, так что в $\text{Irr}(G)$ имеется точный характер $\chi = \lambda^g$, где λ -линейный характер подгруппы T группы G (G является M -группой по известному критерию Хупперта). Из $1 = \ker \chi \cong \bigcup_G (T')^x$ следует, что $|G:T| > p$ (отметим, что с. д. $G \subseteq \{1, p, p^2\}$ по теореме Ито). Поэтому $\chi(1) = p^2$.

Оценим g' сверху. Для $\bar{x} \in \bar{G} - \bar{A}$ имеем $|\bar{G}:C_{\bar{G}}(\bar{x})| = \bar{g}' = g'/p$ (здесь $\bar{G} = G/\langle c \rangle$) по 2.1(2). Поэтому для $x \in \bar{x}$ имеем $|G:C_G(x)| \cong g'/p$, то есть $|C_G(x)| \cong pg/g'$. Поэтому по 2.1(1) имеем

$$\frac{1}{p^2} < mc(G) \cong \frac{mc(A)}{p^2} + \frac{p+1}{pg^2} \cdot \frac{g(p-1)}{p} \cdot \frac{pg}{g'} \cong \frac{p^2+p-1}{p^5} + \frac{p^2+1}{pq'}$$

откуда $\frac{p^2-1}{pg'} > \frac{1}{p^2} - \frac{p^2+p-1}{p^5} = \frac{(p-1)(p^2-1)}{p^5}$ $g' < \frac{p^4}{p-1}$. Так как $h=p+1$ делит g' , то

$$g' \in \{p^2(p+1), p(p+1)\}.$$

Пусть $g' = p^2(p+1)$. Тогда

$$mc(G) \cong \frac{p^2+p-1}{p^5} + \frac{p^2-1}{p \cdot p^2(p+1)} = \frac{p^3+p-1}{p^5}.$$

С другой стороны, по 2.10 с $u=p$, $v=p^2$ имеем

$$\begin{aligned} mc(G) &> \frac{1}{p^3} \left\{ \frac{(p-1)(p^2-1)}{p^2(p+1)} + (p+p^2) \cdot \frac{1}{p} - 1 \right\} = \\ &= \frac{p^3+p^2-2p+1}{p^5} > \frac{p^3+p-1}{p^5}, \end{aligned}$$

противоречие.

Пусть теперь $g' = p(p+1)$. Тогда

$$f(G/\langle c \rangle) = \frac{1}{h} + \frac{1}{p} - \frac{1}{ph} = \frac{2}{p+1},$$

$$f(G/H) \cong \frac{2p-1}{p^2},$$

$$\begin{aligned} T(G) &= |G/\langle c \rangle| f(G/\langle c \rangle) + |G/H| f(G/H) - g/g' + \\ &+ \frac{1}{p^2} \left(g - \frac{g}{p} - \frac{g}{h} + \frac{g}{ph} \right) \cong \frac{g}{p} \cdot \frac{2}{p+1} + \frac{g}{p+1} \cdot \frac{2p-1}{p^2} - \\ &- \frac{g}{p(p+1)} + \frac{1}{p^2} \left(g - \frac{2g}{p+1} \right) = \frac{g}{p(p+1)} + \frac{(3p-2)g}{p^2(p+1)} = \frac{(4p-2)g}{p^2(p+1)}, \\ f(G) &\cong \frac{4p-2}{p^2(p+1)} \cong \frac{1}{p}, \end{aligned}$$

противоречие. $\square$

Отметим, что $\frac{4p-2}{p^2(p+1)} = \frac{1}{p}$ влечет $p=2$.

Лемма 3.2. Если p -наименьший существенный простой делитель g и $f(G) > 1/p$, то G содержит инвариантное абелево p -дополнение.

Доказательство. По 2.7 группа G содержит инвариантное p -дополнение H . Пусть G -контрпример минимального порядка. Тогда $G' = H'$ простого порядка q по 2.11. Можем считать, что G не имеет нетривиального абелева прямого множителя. Тогда p -наименьший простой делитель g .

Пусть $P \in \text{Syl}_p(G)$. Если $P \triangleleft G$, то $G = P \times H$, P абелева по предположению, $f(G) = f(P)f(H) \leq \frac{2p-1}{p^2} \cdot \frac{3}{2p} < \frac{1}{p}$ * (так как $p > 2$ по 2.11), противоречие. Итак, P не нормальный делитель в G .

Пусть x -элемент наименьшего порядка в P , не централизующий H . По индукции $G = \langle x, H \rangle$, так что $P = \langle x \rangle$ циклическая. Так как $x^p \in C_G(H)$ и $f(G/\langle x^p \rangle) = f(G)$ по 2.6(1), то по индукции $x^p = 1$. Итак, $|G:H| = p$. Положим $|H| = h$, $|H'| = q = |G'|$. По 1.1(3), $G' \not\leq f(G)$, так что $G = MG'$ -полупрямое произведение с ядром M , M -абелева (и, очевидно, M максимальна в G). Далее, $C_G(G') = G' \times C_M(G') = G' \times Z(G)$, так что $f(G/Z(G)) = f(G)$ по 2.6(1). Поэтому по индукции $Z(G) = 1$. Тогда G -группа Фробениуса с ядром $G' = H'$. Положим $g = mq$, $m/(q-1)$. Имеем $\text{c. d. } G = \{1, m\}$, $f(G) = \frac{1}{m} + \frac{1}{q} - \frac{1}{mq} < \frac{1}{m} + \frac{1}{q}$.

Но p делит m и $p < m$; поэтому $m > p^2$. Кроме того, $q > 2m > 2p^2$, и тогда $f(G) < \frac{1}{m} + \frac{1}{q} < \frac{1}{p^2} + \frac{1}{2p^2} = \frac{3}{2p^2} < \frac{1}{p}$, противоречие.

Лемма 3.3. Пусть G - p -группа, $g' = p^2$, $f(G) > 1/p$. Тогда G содержит абелеву подгруппу индекса p или $Z(G) \cong G' \cong C_p \times C_p$.

Доказательство. Пусть G не содержит абелеву подгруппу индекса p . Предположим, что $G' \cap Z(G)$ циклическая, и пусть c -элемент порядка p в $G' \cap Z(G)$. Все характеры из $\text{Irr}_1(G/\langle c \rangle)$ имеют одну и ту же степень p^a по лемме 2.5. Пусть $g = p^n$,

$$p^b = \min \{ \tau(1) | \tau \in \text{Irr}(G) - \text{Irr}(G/\langle c \rangle) \}.$$

Тогда $p^{n-1} < gf(G) \leq p^{n-2} + \frac{p^{n-1} - p^{n-2}}{p^a} + \frac{p^n - p^{n-1}}{p^b}$, откуда $\frac{1}{p^a} + \frac{1}{p^{b-1}} > 1$, $b=1$.

Итак, существует $\chi \in \text{Irr}(G) - \text{Irr}(G/\langle c \rangle)$ с $\chi(1) = p$. Имеем $\chi = \lambda^G$, где λ -линейный характер подгруппы H индекса p в G . Тогда $1 < H' \triangleleft G$, откуда $c \in H'$. Но $1 = \ker \chi \cong H' \cong \langle c \rangle$, противоречие с выбором χ . Итак, $G' \cap Z(G)$ нециклическая, $Z(G) \cong G' \cong C_p \times C_p$. $\square$

* $f(H) < \frac{3}{2p}$ по доказательству леммы 2.11.

Лемма 3.4. Пусть G — p -группа, $G' \leq Z(G)$, $\exp G' = p$.

$$(1) \text{ (Русин)} \quad mc(G) = \frac{p}{g'} \left\{ \frac{1}{p} - \frac{g'-1}{p(p-1)} + \sum_{|G'/K|=p} mc(G/K) \right\}$$

$$(2) \quad f(G) = \frac{p}{g'} \left\{ \frac{1}{p} - \frac{g'-1}{p(p-1)} + \sum_{|G'/K|=p} f(G/K) \right\}.$$

Доказательство. (1) и (2) доказываются совершенно одинаково. Докажем (2). Если $\chi \in \text{Irr}_1(G)$, то $|G':G' \cap \ker \chi| = p$. Поэтому

$$\begin{aligned} T(G) &= g/g' + \sum_{I_1(G)} \chi(1) = \frac{g}{g'} + \sum_{|G'/K|=p} \sum_{I_1(G/K)} \chi(1) = \\ &= \frac{g}{g'} - \frac{g}{g'} \frac{g'-1}{p-1} + p \cdot \frac{g}{g'} \sum_{|G'/K|=p} f(G/K). \quad \square \end{aligned}$$

Лемма 3.5. (1) $[x, G] \cap Z(G) = D \leq G$, $[x, G]D = [x, G]$, так что $[x, G]$ -объединение смежных систем по D .

(2) Пусть $H \triangleleft G$, $|G:H| = p$, $H' \leq Z(G)$, $x \in G - H$. Если $[x, G] \cap H' = 1$, то $C_H(xa) = C_H(x) \cap C_H(a)$ для $a \in H$.

Доказательство. (1) Пусть $[x, a] = c \in D$ для $a \in G$, и пусть $b \in G$. Тогда $[x, ba] = [x, b]c$, $D[x, G] = [x, G]$.

Из $D \leq [x, G]$ следует $DD = D$, так что $D \leq G$.

(2) Для $b \in C_H(xa)$ имеем

$$\begin{aligned} b(xa) &= [b, x]xba = [b, x]x[b, a]ab = [b, x][b, a](xa)b, \\ 1 &= [b, xa] = [b, x][b, a], \end{aligned}$$

так что $[x, b] = [b, a] \in H' \cap [x, G] = 1$ откуда $C_H(xa) = C_H(x) \cap C_H(a)$. Обратное включение очевидно. $\square$

Лемма 3.6. Пусть H — неабелева подгруппа индекса p в p -группе G , $f(G) > 1/p$. Если $|C_G(x)| \leq g/p^2$ для всех $x \in G - H$, то существует $x \in G - H$ с $|C_G(x)| = g/p^2$. Кроме того, $|G':H'| > p$.

Доказательство. По 2.1(1) имеем

$$mc(G) \leq \frac{mc(H)}{p^2} + \frac{p^2-1}{p^4}, \quad amc(H) \leq \frac{1}{h'} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{h'p^2}.$$

Поэтому

$$(3.1) \quad mc(G) \leq \frac{1}{p^2 h'} + \frac{1}{p^4} - \frac{1}{p^4 h'} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^4} = \frac{1}{p^2} + \frac{p^2-1}{p^4 h'}.$$

С другой стороны

$$(3.2) \quad mc(G) \geq \frac{1}{p^3} \left\{ \frac{(p-1)(p^2-1)}{g'} + (p^2+p)f(G) - 1 \right\} > \frac{1}{p^3} + \frac{(p-1)(p^2-1)}{p^3 g'}.$$

Сравнивая (3.1) и (3.2), получаем

$$\frac{1}{ph'} > \frac{p-1}{g'}, \quad g'/h' > p(p-1) \cong p.$$

Если указанного в заключении элемента x не существует, то $|C_G(x)| \cong g/p^3$ для всех $\chi \in G-H$, так что по 2.1(1) имеем

$$\begin{aligned} mc(G) &\cong \frac{mc(H)}{p^2} + \frac{p+1}{pg^2} \cdot \frac{g(p-1)}{p} \cdot \frac{g}{p^3} \cong \\ &\cong \frac{p^2+p-1}{p^5} + \frac{p^2-1}{p^5} = \frac{2p^2+p-2}{p^5} \cong \frac{1}{p^2} < f(G)^2, \end{aligned}$$

что противоречит 2.3.

Лемма 3.7. Пусть неабелева p -группа G такова, что $Z(G) \cong G'$, $g' = p^2$, $\exp G' = p$, $f(G) > 1/p$. Тогда по крайней мере для $\frac{g'-1}{p-1} - 1$ максимальных в G' подгрупп K имеем $f(G/K) = \frac{2p-1}{p^2}$. Если для некоторой максимальной в G' подгруппы K имеем $f(G/K) \neq \frac{2p-1}{p^2}$, то $f(G/K) = \frac{p^2+p-1}{p^3}$. В частности, $\text{с. д. } G \subseteq \{1, p, p^2\}$.

Доказательство. Лемма следует из таких фактов:

(1) Следующие друг за другом по убыванию значения $f(G)$ для p -группы G с $g' = p$ таковы: $\frac{2p-1}{p^2}$, $\frac{p^2+p-1}{p^3}$, $\frac{p^3+p-1}{p^4}$, ...

(2) Из (1) и 3.4 следует первое утверждение леммы.

(3) В G' имеются две различные максимальные подгруппы K_1 и K_2 такие, что $f(G/K_i) = \frac{2p-1}{p^2}$, $i=1, 2$. Тогда $\text{с. д. } G/K_i = \{1, p\}$. Так как G изоморфна подгруппе из прямого произведения $G/K_1 \times G/K_2$, то $\text{с. д. } G \subseteq \{1, p, p^2\}$, откуда и следует нужный результат. $\square$

Лемма 3.8. Пусть G — p -группа с $Z(G) \cong G'$, $g' \cong p^3$ и $f(G) > 1/p$. Тогда $\text{с. д. } G = \{1, p\}$.

Доказательство. Из лемм 3.3 и 3.7 следует $\exp G' = p$. Можем считать, что у G нет абелевой подгруппы индекса p . Если $\chi \in \text{Irr}_1(G)$, то $|G': G' \cap \ker \chi| = p$. Поэтому достаточно рассмотреть случай $g' = p^3$.

Для $a \in G'$ положим $M(a) = \{x \in G \mid [x, G] \cong \langle a \rangle\}$. Так как G класса нильпотентности 2, то $M(a) \cong G$. Из $[M(a), G] \cong \langle a \rangle$ следует, что $M(a)/\langle a \rangle = Z(G/\langle a \rangle)$. Так как $G/\langle a \rangle$ неабелева, $|G:M(a)| \cong p^2$. Положим $M = \langle M(a) \mid a \in G' \rangle$. Имеем для $b \in G' - \langle a \rangle$:

$$[M(a), M(b)] \cong \langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1.$$

Поэтому $M = M(a_1) * \dots * M(a_k)$ -центральное произведение, $M' = \langle M(a_i)' \mid 1 \leq i \leq k \rangle$. Предположим, что $M' = G'$. Тогда

$$G' = M' = M'_1 \times M'_2 \times M'_3, \quad M_i = M(a_i),$$

для подходящих a_1, a_2, a_3 таких, что $G' = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \langle a_3 \rangle$.

По лемме 2.13 имеем

$$mc(M) = mc(M_1)mc(M_2)mc(M_3) \leq \left(\frac{p^2+p-1}{p^3} \right)^3 < \frac{1}{p^2} < f(G)^2,$$

что противоречит леммам 2.2(2) и 2.3.

Итак, $M' < G'$, так что $M < G$.

Пусть $M \leq H$ и H максимальна в G . Пусть x -такой элемент в G , что $|G:C_G(x)|=p$. Тогда $|[x, G]|=p$, так что $[x, G] = \langle b \rangle < G'$ и $x \in M(b) \leq M$. Итак, для любого $x \in G-M$ имеем $|C_G(x)| \leq g/p^2$ (отметим, что $Z(G) \leq M(a) \leq M$). Поэтому $|G':H'| > p$ по лемме 3.6. Так как H неабелева и $g'=p^3$, то $|H'|=p$. По лемме 3.6 в $G-H$ имеется элемент x с $|C_G(x)|=g/p^2$. Тогда $[x, G]$ -подгруппа порядка p^2 в G' . Пусть $xa \in G-H$, $a \in H$ и $|C_G(xa)|=g/p^2$. Тогда $|C_H(xa)|=g/p^3=|C_H(x)|$. Предположим, что $H' < [x, G]$. Тогда $(G/H')' = G'/H'$ имеет порядок p^2 . Но $[xH', G/H'] = [x, G]/H'$ имеет порядок p . Поэтому $|G/H': C_{G/H'}(x, H')|=p$, так что $|G/H': Z(G/H')|=p$ по лемме 1.1(2) (ибо H/H' -абелева подгруппа индекса p в G/H'). По этой же лемме $|G'/H'|=p$, противоречие. Итак, $H' \cap [x, G] = 1$, так что по 3.5(2) имеем $C_H(xa) = C_H(x) \cap C_H(a)$ для указанных выше x и a . Но тогда из $|C_H(xa)|=g/p^3=|C_H(x)|$ следует $C_H(xa) = C_H(x)$, откуда $C_H(x) = C_H(a)$. Положим $K = \{a \in H \mid C_H(x) \leq C_H(a)\}$. Очевидно, $K \leq H$. В этих обозначениях

$$\begin{aligned} \sum_{a \in H} |C_H(xa)| &= \sum_{a \in K} |C_H(xa)| + \sum_{a \in H-K} |C_H(xa)| \leq |K| \cdot |C_H(x)| + \\ &+ \frac{1}{p} (|H| - |K|) |C_H(x)| = \frac{g}{p^6} \left(\frac{g}{p} + (p-1)|K| \right). \end{aligned}$$

Здесь использовано следующее из 3.5(2) неравенство $|C_H(xa)| \leq \frac{1}{p} |C_H(x)|$ для $x \in H-K$. Поэтому из $G = xH = H \cup xH \cup \dots \cup x^{p-1}H$ следует

$$\begin{aligned} \sum_{y \in G-H} |C_G(y)| &= p \sum_{y \in G-H} |C_H(y)| \leq \\ &\leq p(p-1) \frac{g}{p^4} \left(\frac{g}{p} + (p-1)|K| \right). \end{aligned}$$

Из 2.1(1) получаем

$$\begin{aligned} (3.3) \quad mc(G) &\leq \frac{mc(H)}{p^2} + \frac{p+1}{pg^2} \cdot \frac{g(p-1)}{p} \left(\frac{g}{p} + (p-1)|K| \right) \leq \\ &\leq \frac{p^2+p-1}{p^5} + \frac{p^2-1}{p^4} \left(\frac{1}{p} + \frac{(p-1)|K|}{g} \right) = \\ &= \frac{2p^2+p-2}{p^5} + \frac{(p-1)(p^2-1)|K|}{p^4g}. \end{aligned}$$

По 2.10 с $u=p$, $v=p^2$ имеем

$$(3.4) \quad mc(G) \cong \frac{1}{p^3} \left\{ \frac{(p-1)(p^2-1)}{p^3} + (p^2+p)f(G) - 1 \right\} > \\ > \frac{1}{p^2} + \frac{(p-1)(p^2-1)}{p^6}.$$

Из (3.3) и (3.4) следует

$$\frac{(p-1)(p^2-1)}{p^6} + \frac{1}{p^2} < \frac{(p-1)(p^2-1)|K|}{p^4 g} + \frac{2p^2+p-2}{p^5}$$

откуда

$$\frac{(p-1)(p^2-1)}{p^6} \left(1 - \frac{p^2|K|}{g} \right) < \frac{2p^2+p-2-p^3}{p^5} \cong 0,$$

так что $|G:K| < p^2$, и поэтому $|G:K|=p=|G:H|$, $K=H$. Поэтому $C_H(x) \cong C_H(a)$ для всех $a \in H$, откуда $C_H(x) \cong Z(H)$. Тогда $C_G(C_H(x)) \cong \langle x, H \rangle = G$, то есть $C_H(x) \cong Z(G)$. Так как G не содержит абелеву подгруппу индекса p , то $|G:Z(G)|=p^3$. Если $\chi \in \text{Irr}_1(G)$, то $\chi(1)^2 \equiv |G:Z(G)|=p^3$, так что $\chi(1)=p$. Итак, с. д. $G=\{1, p\}$. $\square$

Лемма 3.9. Пусть G -неабелева p -группа. Если $f(G) > 1/p$, то справедливо одно из утверждений:

- (1) G содержит абелеву подгруппу индекса p .
- (2) $G|Z(G)$ неабелева порядка p^3 и экспоненты p .
- (3) $G' \cong Z(G)$, $\exp G' = p$.

Доказательство. Пусть лемма уже доказана для p -групп, чей порядок меньше $|G|$. Тогда по 2.2(2) и 2.6 любая собственная секция группы G одного из типов (1)–(3).

Фиксируем в $Z(G)$ элемент c порядка p , и полагаем $\bar{G}=G/\langle c \rangle$, $\bar{G}'=G'/\langle c \rangle$. Если $\bar{G}$ абелева, то G типа (3). Далее считаем, что $\bar{G}$ неабелева. Тогда $\bar{G}$ одного из типов (1)–(3).

(А) $\bar{G}$ типа (1), то есть $G/\langle c \rangle$ содержит абелеву подгруппу $H/\langle c \rangle$ индекса p . Тогда $H'=\langle c \rangle$ (в противном случае G типа (1) и все доказано), а централизаторы всех элементов из $\bar{G}-\bar{H}$ имеют один и тот же порядок $p|Z(\bar{G})|$ по 2.1(2). Далее, $g' > p^2$ по лемме 3.3. Поэтому по лемме 3.6 в $\bar{G}-\bar{H}$ имеется $\bar{x}$ с $|C_{\bar{G}}(\bar{x})|=\bar{g}/p^2$, и это верно для всех $\bar{x} \in \bar{G}-\bar{H}$. Здесь $\bar{g}=|\bar{G}|$. Далее, по 2.1(2), имеем $mc(G)=\frac{1}{p^2} + \frac{p^2-1}{p^2 g'}$. По 2.1(2) и доказанному $\frac{\bar{g}}{p^2}=|G_{\bar{G}}(\bar{x})|=\frac{\bar{g}}{\bar{g}'}$, откуда $\bar{g}'=p^2$, $g'=p^3$. Поэтому $c \in G'$. Кроме того, $|G:C_G(x)| \cong p^2$ для всех $x \in G-H$. Поэтому по 3.6 существует $x \in G-H$ с $|G:C_G(x)|=p^2$. Закрепляем обозначение x за этим элементом. Положим $M=[x, G]=\{y_1=1, y_2, \dots, y_{p^2}\}$. Напомним, что $[x, G]=[x, H]$.

(A1) $c \notin M$. Из 3.5(1) следует, что $\langle c \rangle \cap M = 1$.

Пусть $|C_G(xa)| = g/p^2$ для некоторого $a \in H$. Тогда $|C_H(xa)| = g/p^3 = |C_H(x)|$. Как и в доказательстве леммы 3.8, $K = H$, $C_H(x) = Z(G)$, $G/Z(G)$ порядка p^3 (обозначения из 3.8) и экспоненты p . Тогда G типа (2) или (3) (так как из $G' \leq Z(G)$ следует $\exp G' = p$ по 3.3).

(A2) $c \in M$. Тогда $\langle c \rangle \subseteq M$ и $M\langle c \rangle = M$ по 3.5(1). Поэтому $|\bar{M}| = p$, где $\bar{M} = [\bar{x}, \bar{G}]$. В этом случае $|\bar{G} : C_{\bar{G}}(\bar{x})| = p$, что противоречит выбору $\bar{x}$.

(Б) $\bar{G}$ типа (2), то есть $\bar{G}/Z(\bar{G})$ неабелева порядка p^3 и экспонента $p > 2$. По (А) можем считать, что $\bar{G}$ не типа (1).

Положим $\bar{F} = F/\langle c \rangle = Z(\bar{G}) = Z(G/\langle c \rangle)$. Тогда $|G:F| = p^3$ и $Z(G) < F$. Пусть $F < H < G$ с $|H:F| = p$. Из строения $\bar{G}$ следует, что централизатор любого элемента из $H - \bar{F}$ лежит в $\bar{H}$. Поэтому $y \in H - F \Rightarrow C_G(y) \leq H$.

Так как $F \not\leq Z(G)$ и G/F порождается любыми $p+2$ подгруппами порядка p , существует $t > 0$ неабелевых подгрупп $H > F$ с $|H:F| = p$, при этом $t \geq p^2$. Пусть H -одна из этих t подгрупп. Тогда $H' = \langle c \rangle$ (ибо $\bar{H}$ абелева), а из $C_G(x) = H$ следует $C_G(x) = C_H(x)$ ($x \in H - F$), то есть $|G:C_G(x)| = p^3$ (так как $|H:C_H(x)| = p$, $|G:H| = p^3$).

Пусть среди $1+p+p^2$ подгрупп $H > F$ с $|H:F| = p$ точно $s \geq 0$ абелевых. Тогда по сказанному в предыдущем абзаце $s \leq p+1$. Из $x \in H - F$ следует $C_G(x) = H$ (H -одна из этих абелевых подгрупп), так что $|G:C_G(x)| = p^2$. Положим $|Z(G)| = p^r$. Тогда

$$\begin{aligned} r(G) &= |Z(G)| + \frac{|F| - |Z(G)|}{p} + s \frac{p^{n-2} + p^{n-3}}{p^2} + \\ &+ (p^2 + p + 1 - s) \frac{p^{n-2} - p^{n-3}}{p^3} \leq p^r + \frac{p^{n-3} - p^r}{p} + \\ &+ (p+1) \frac{p^{n-2} - p^{n-3}}{p^2} + p^2 \frac{p^{n-2} - p^{n-3}}{p^3} = \\ &= p^r - p^{r-1} + 2p^{n-3} - p^{n-5}. \end{aligned}$$

Так как $n-r+1 \geq 5$, получаем $mc(G) \leq \frac{2p^2-1}{p^5} + \frac{p-1}{p^{n-r+1}} \leq \frac{2p^2-1}{p^5} + \frac{p-1}{p^5} = \frac{2p^2+p-2}{p^5} < \frac{1}{p^2} < f(G)^2$, что противоречит лемме 2.3.

(В) $\bar{G}$ типа (3), то есть $Z(\bar{G}) \cong \bar{G}'$ и $\exp \bar{G}' = p$. Так как $G' \not\leq Z(G)$ по лемме 3.3, то $[G, G'] = \langle c \rangle$.

Если в $Z(G)$ имеется отличная от $\langle c \rangle$ подгруппа $\langle d \rangle$ порядка p , то, благодаря (А) и (Б) можем считать, что $G/\langle d \rangle$ типа (3). Тогда $[G', G] \leq \langle c \rangle \cap \langle d \rangle = 1$, противоречие. Итак, подгруппа $Z(G)$ циклическая.

Фиксируем в $G' - Z(G)$ коммутатор y . Тогда $[y, G] \leq [G', G] = \langle c \rangle$, так что $[[y, G]] = p = |G : C_G(y)|$. Положим $H = C_G(y)$.

Предположим, что существует $a \in G - H$ с $|G:C_G(a)| = p$.

(В1) H типа (1). Пусть A -абелева подгруппа индекса p в H . Тогда $\langle a, A \rangle / \langle c \rangle$ -абелева подгруппа индекса p в $G/\langle c \rangle$, что невозможно, так как этот случай мы исключили.

(B2) H типа (2). Тогда $p > 2$. Пусть $F/Z(H) = Z(H/Z(H))$. Тогда $|G:F| = p^3$, $F \triangleleft G$. Очевидно, $Z(G) \leq Z(H) < F$. Далее, $C_H(a) = H \cap C_G(a) \triangleleft G$ и $C_H(a)$ имеет индекс p в H . Поэтому $H = C_H(a) * \langle y \rangle$ -центральное произведение. Но тогда $C_G(Z(C_H(a))) \cong \langle a, H \rangle = G$ и $Z(C_H(a)) = Z(G)$. Так как H и $C_H(a)$ типа (2), то $C_H(a)/Z(C_H(a))$ абелева порядка p^3 и экспоненты p . Поэтому $|G:Z(G)| = p^5$. Так как $F < H$ и $|F:Z(H)| = p$, то F абелева. Так как $aF \in Z(G/F)$ и $|G/F| = p^3$, то G/F абелева, и поэтому $G' \leq F$. Из цикличности $Z(G)$ и $|F:Z(G)| = p^2$ следует, что F порождается тремя элементами. Так как $G' = F$ и $\exp G' = p$, это дает $\bar{g}' \leq p^3$. Следовательно, $g' \leq p^4$. С другой стороны $g' > p^2$. Итак, $g' = p^r$, $r \in \{3, 4\}$.

Из $\chi(1)^2 \leq |G:Z(G)| = p^5$ для $\chi \in \text{Irr}(G)$ следует $\chi(1) \leq p^2$. Предположим, что χ точен. Имеем $\chi = \lambda^G$, где λ -линейный характер подгруппы T индекса $\chi(1)$ в G . Но $1 = \ker \chi \cong \bigcap_G (T')^\chi$. Так как G не содержит абелеву подгруппу индекса p , это дает $|G:T| = p^2 = \chi(1)$. Итак, G имеет ввиду цикличности $Z(G)$ точный неприводимый характер, и все такие характеры имеют одну и ту же степень p^2 .

Положим $g = p^n$. Тогда

$$g = mc(G) = r(G) \leq p^{n-r} + \frac{|G/\langle c \rangle| - g/g'}{g^2} + \frac{g - |G/\langle c \rangle|}{p^4} = p^{n-r} + p^{n-r-2} + p^{n-4} - p^{n-5} + p^{n-3},$$

$$mc(G) \leq \frac{1}{p^r} + \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^{r+2}} + \frac{1}{p^4} - \frac{1}{p^5}.$$

Если $r=3$, то $mc(G) \leq \frac{2p^2+p-2}{p^5} < \frac{1}{p^2} < f(G)^2$, противоречие с 2.3. Если $r=4$, то

$$mc(G) \leq \frac{p^3+2p^2-p-1}{p^6} < \frac{1}{p^2} < f(G)^2,$$

снова противоречие с 2.3.

(B3) H типа (3), то есть $H' \leq Z(H)$ и $\exp H' = p$. Положим $D = C_H(a)$. Так как $\langle D, y \rangle = H$, $\langle H, a \rangle = G$, то $\langle D, a, y \rangle = G$ и $Z(D) \leq Z(G)$. Отметим, что $H = D * \langle y \rangle$ -центральное произведение. Поэтому $D' \leq H' \leq Z(H)$, так что $D' \leq Z(D) \leq Z(G)$. Из цикличности $Z(G)$ и $\exp D' = \exp H' = p$ следует, что $D' = \langle c \rangle$ порядка p . Но $[a, D] = [a, C_H(a)] = 1$; поэтому $\langle a, D \rangle' = D' = \langle c \rangle$, и тогда $\langle a, D \rangle / \langle c \rangle$ -абелева подгруппа индекса p в $G/\langle c \rangle = \bar{G}$. Но этот случай был рассмотрен в (A).

Итак, для всех $a \in G - H$ имеем $|C_G(a)| \leq g/p^2$. Тогда $|G':H'| > p$ по лемме 3.6.

Вычислим $|G':H'|$ другим способом. Зафиксируем $a \in G - H$ с $|G:C_G(a)| = p^2$ (a существуем по лемме 3.6), и положим

$$[a, G] = M = \{y_1 = 1, y_2 = c, y_3, \dots, y_{p^2}\}.$$

Так как $\langle y, c \rangle / \langle c \rangle \leq Z(G/\langle c \rangle)$, то $1 \neq [a, y] \in \langle c \rangle$, и обозначение $y_2 = c$ оправдано. Множество M распадается на p смежных систем по $\langle c \rangle$ по лемме 3.5(1). Тогда,

если $\bar{M} = [\bar{a}, \bar{G}]$, то $|\bar{M}| = p$. В G/H' имеется абелева подгруппа H/H' индекса p . Поэтому $G/H' = \langle H/H', aH' \rangle$, откуда $G'/H' = [H/H', aH']$ по лемме 2.1(2). Но из $|\bar{M}| = p$ следует $|G/H' : C_{G/H'}(aH')| = p$; поэтому по 2.1(2) имеем $|G'/H'| = p$. Полученное противоречие завершает рассмотрение случая (В), и вместе с тем лемма доказана. $\square$

Пусть G -нильпотентная группа с неабелевыми $P \in \text{Syl}_p(G)$ и $Q \in \text{Syl}_q(G)$. Тогда $f(G) \leq f(P)f(Q) \leq \frac{2p-1}{p^2} \cdot \frac{2q-1}{q^2} < \frac{1}{p}$.

Поэтому, если G нильпотентна с $f(G) > \frac{1}{p}$, где p -наименьший существенный простой делитель g , то P -единственная неабелева силовская подгруппа в G . Это замечание вместе с результатами этого параграфа завершает доказательство основной теоремы.

Следствие 3.10. (Амицур—Айзекс—Пасман). Если $\text{s.d. } G = \{1, p\}$, то справедливо одно из утверждений:

- (1) G содержит абелеву подгруппу индекса p .
- (2) $G/Z(G)$ порядка p^3 и экспоненты p .

Доказательство. Очевидно, $f(G) > 1/p$. Следствие очевидно, если G нильпотентна. Пусть G ненильпотентная. Из

$$g = \frac{g}{g'} + \sum_{I_i(G)} \chi(1)^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

следует, что p делит g/g' . Поэтому G содержит нормальную подгруппу N индекса p . По теореме Клиффорда $\text{s.d. } N \subseteq \{1, p\}$, так что N содержит по индукции инвариантное абелево p -дополнение. Теперь результат следует из леммы 3.1. $\square$

Из доказательства основной теоремы вытекает такое

Следствие 3.11. Если p -наименьший существенный простой делитель g и $f(G) = 1/p$, то $p = 2$.

§4. Список нерешенных вопросов

Ниже приводится большой список нерешенных вопросов. Он отражает наше мнение о том, в каком направлении следовало бы продолжить это исследование.

Далее везде p -наименьший существенный простой делитель порядка группы G .

4.1. Классифицировать все G с $f(G) = 1/2$.

Решение этого вопроса даст классификацию всех групп G с $f(G) = 1/p$.

4.2. Классифицировать все G с $\text{mc}(G) \equiv 1/p^2$.

Из леммы 2.3 следует, что из решения 4.2 следует решение 4.1.

4.3. Пусть $H \triangleleft G$. Всегда ли $f(G/H) \equiv f(G)$? Описать расположение H в G в случае, когда $f(G/H) = f(G)$.

Частный случай этого вопроса рассмотрен в лемме 2.6.

4.4. Классифицировать все G с $T(G)/r(G) \leq p$ (это эквивалентно неравенству $f(G) \leq p m(G)$).

4.5. Пусть $m(G)$ -минимум степеней точных характеров группы G . Классифицировать все G с $m(G)/g \geq 1/p^2$.

4.6. Изучить расположение H в G в случае $m(H) = m(G)$.

4.7. Изучить расположение H в G в случае $\text{c. d. } H = \text{c. d. } G$.

4.8. Пусть $H < G$. Пусть для любых $\varphi \in \text{Irr}_1(H)$, $\lambda \in \text{Lin}(H)$, $\chi \in \text{Irr}_1(G)$, $\mu \in \text{Lin}(G)$ имеем $[\varphi^\sigma, \chi] \in \{0, 1\}$, $[\lambda^\sigma, \chi] \in \{0, \chi(1)\}$, $[\lambda^\sigma, \mu] \in \{0, 1\}$. Изучить расположение H в G .

4.9. Пусть G и G_1 -группы, при этом наборы степеней неприводимых характеров групп G и G_1 совпадают (с учетом кратностей). Верно ли, что если G разрешима, p -разрешима, имеет инвариантное p -дополнение, простая, то и G_1 обладает соответствующими свойствами.

Профессор С. Д. Берман сообщил авторам, что набор степеней неприводимых характеров группы G не определяет набора длин классов сопряженных элементов.

4.10. Если $\chi(1) \in \text{Irr}(G)$ с $\chi(1)^2 = \frac{g}{p}$ и $Z(G) = 1$, то верно ли, что группа

G разрешима? Будет ли G разрешимой, если $\chi(1)^2 > \frac{g}{p}$?

4.11. Верно ли, что существует лишь конечное число групп G с $G' = G$ и $f(G) = \varepsilon$? Аналогичный вопрос для mc .

4.12. Верно ли, что G разрешима, если $f(G) > 4/15$? Классифицировать все неразрешимые группы с $f(G) \geq 1/5$.

4.13. Классифицировать все группы G с $\text{c. d. } G = \{1, 2, 3, 6\}$. Более общо, классифицировать все группы G с $\text{c. d. } G = \{1, p, q, pq\}$, где p и q -различные простые числа.

4.14. Классифицировать все G с $f(G) - mc(G) \leq 1/p^2$.

4.15. Классифицировать все G с $T(G)^2 \geq g(r(G) - 1)$.

4.16. Вычислить значения функций f и mc на простых и связанных с ними группах.

Отметим, что в вопросах 4.9 и 4.13 на p можно не делать никаких ограничений.

Содержание этой статьи излагалось в докладе, проситанном 8 января 1984 года на харьковском городском алгебраическом семинаре (руководитель-проф. С. Б. Берман). Благодарим участников семинара за обсуждение результатов статьи и полезные советы.

Цитированная литература

- [1] С. Т. С. WALL, On groups consisting mostly of involutions, *Proc. Camb. Philos. Soc.* 67 (1970), 251—262.
- [2] В. HUPPERT, Endliche Gruppen, Bd. I, *Berlin*, 1967.
- [3] J. A. ERNEST, Central intertwining numbers for representations of finite groups, *Trans. AMS* 99 (1961), 499—508.
- [4] Я. Г. Беркович, Соотношения между числами классов группы и подгруппы, Вопросы теории групп и гомологической алгебры, вып. 5, стр. 46—57, *Ярославль*, 1985.

- [5] ISAACS J. MARTIN, Character theory of finite groups, *Acad. Press, New York*, 1976.
- [6] D. RUSIN, What is the probability that two elements of a finite group commute?, *Pacific J. Math.* **82** (1979), 237—247.
- [7] J. M. ISAACS, D. S. PASSMAN, A characterization of groups in terms of the degrees of their characters, *Pacific J. Math.* **15** (1965), 877—903.
- [8] S. A. AMITSUR, Groups with representations of bounded degree II, *Illinois J. Math.* **5** (1961), 198—205.

НЕКРАСОВ К. Г., КАЛИНИН, КАЛИНИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ, МЕХМАТ
БЕРКОВИЧ ЯКОВ ГИЛЬЕВИЧ
344006, РОСТОВ-НА-ДОНУ, ЭНГЕЛЬСА 111, КВ. 18

(Поступило 27. XII. 1985 г.)