

Конечные группы малой высоты

Я. Г. БЕРКОВИЧ

§ 1. Введение. Вспомогательные результаты

Пусть χ — характер (всегда в этой статье конечной) группы G . Обозначим $h(\chi)$ максимум степеней неприводимых компонент χ . Положим $h(G) = \min \{h(\chi) | \chi \text{ — точный характер группы } G\}$, и назовем $h(G)$ высотой группы G . Отметим, что $h(A \times B) = \max \{h(A), h(B)\}$. Если $A \leq G$, то $h(A) \leq h(G)$. Очевидно, G изоморфна подгруппе прямого произведения нескольких групп $GL(h(G), \mathbb{C})$.

Группу $G = PQ$, $P \in \text{Syl}_p(G)$ циклическая порядка $p^a > p$, $Q \in \text{Syl}_q(G)$ нормальна в G , назовем $H(p^a, q^m, q^n)$ -группой, если выполнены следующие условия:

(H1) Все G -допустимые подгруппы Q_0 из Q , отличные от Q , лежат в $Z(Q)$ — центре Q , $|Z(Q)| = q^n$, $|Q/Z(Q)| = q^m$.

(H2) P действует на Q/Q' точно и без неподвижных точек.

(H3) В $\text{Irr}(G)$ имеется точный характер χ с $\chi(1) < p^a$.

Иногда для краткости $H(p^a, q^m, q^n)$ -группу мы называем $H(p)$ -группой.

Мы часто используем теорему о сдвиге: Если $P \in \text{Syl}_p(G)$ абелева, то $P \cap Z(G) \cap G' = 1$.

Лемма 1.1. Если $G = PQ$ — $H(p)$ -группа, то $G' = Q$.

В самом деле, $(G/Q')' = Q/Q'$ по теореме о сдвиге.

Секцией группы G называется эпиморфный образ некоторой её подгруппы. $H(p)$ -группу G назовем $MH(p)$ -группой, если любая её секция порядка, меньшего $|G|$, не является $H(p)$ -группой. В § 3 дана полная классификация $MH(p)$ -групп.

Пусть $p \in \pi(G)$, где $\pi(G)$ — множество всех простых делителей $|G|$. Группу G назовем M_p^1 -группой, если для каждого $q \in \pi(G) - \{p\}$ она содержит $\{p, q\}$ -холловскую подгруппу p -длины 1. Если в этом определении оторосить предположение о p -длине, получим определение M_p -группы. Указанные только что свойства переносятся на нормальные делители и эпиморфные образы.

Пусть P — p -группа экспоненты p^a , натуральное число $t \leq a$. Положим $P_t = \langle x \in P | \langle x \rangle = p^t, x \in C \cong C(p^a), C \leq P \rangle$. Ясно, что P_t характеристична в P . Очевидно, если P — p -группа и $h(P) < p$, то P абелева. Отметим, что если $M \triangleleft G$, то возможно $h(G/M) > h(G)$.

Основная теорема. Пусть G — M_p^1 -группа с силовской p -подгруппой P экспоненты p^a , $a > 0$; натуральное число $t \leq a$, P_t не нормальный делитель G . Если $h(G) < p^{a-t+1}$, то справедливо одно из утверждений:

(1) $t=a$, $P_t=P$ абелева, $p-1$ и $|G: N_G(P)|$ — степени 2.

(2) $t < a$. Тогда $H(p)$ -группа вкладывается в G . Кроме того.

(2a) Если $p=2$, то $|G: N_G(P_t)|=p_1 \dots p_s$, где p_i — простое число Ферма или Мерсенна, $1 \leq i \leq s$.

(2б) Если $p>2$, то $p-1$ и $|G: N_G(P_t)|$ — степени 2.

В доказательстве основной теоремы важную роль играют минимальные ненильпотентные группы $G=PQ$, $P \in \text{Syl}_p(G)$ циклическая порядка p^a , $Q \in \text{Syl}_q(G)$ нормальна в G . Если $|Q \cap Z(G)|=q^c$, $|Q/Q \cap Z(G)|=q^b$, то G назовем $S(p^a, q^b, q^c)$ -группой. Отметим, что b — порядок $q \pmod{p}$.

Лемма 1.2. Пусть U — собственная нормальная подгруппа неабелевой группы W , а W/U — циклическая группа порядка p^n .

(1) Пусть $U \leq V < W$ с $|W:V|=p$. Если $\chi \in \text{Irr}(G)$ и χ_U приводим, то и χ_V приводим.

(2) Если U абелева и $h(W) < p^n$, то $C_W(U) > U$.

Доказательство. (1) Пусть $U < F \leq W$, где F — наименьшая подгруппа с $\chi_F \in \text{Irr}(F)$. Пусть $U \leq H < F$ с $|F:H|=p$. Тогда χ_H приводим по выбору F и $\chi_H = \theta_1 + \dots + \theta_r$, где различные $\theta_i \in \text{Irr}(H)$ сопряжены относительно F (то, что индекс ветвления χ_H равен 1, вытекает из теории проективных представлений; впрочем, Бернсайд доказал этот результат ещё до того, как была построена теория проективных представлений). Тогда $I_F(\theta_i)$ — группа инерции θ_i в F — совпадает с H , а из циклическости W/H следует $I_W(\theta_i) = H$. Отсюда выводим

$$p = |W: I_W(\theta_i)| = |W: H|,$$

так что $|W:H|=p$. Так как χ_H приводим, это доказывает (1).

(2) Пусть χ — точный характер группы G с $h(\chi)=h(W)$. Если τ — нелинейная неприводимая компонента χ , то τ_U приводим. Поэтому, если $U \leq V < W$ с $|W:V|=p$, то τ_V приводим по (1). Так как W неабелева, $n > 0$. Мы имеем по доказанному

$$h(V) \leq h(\chi_V) = h(\chi)/p < p^{n-1} = |V: U|.$$

Если $V=U$, то по теореме Ито о степенях неприводимых характеров имеем $h(\chi)=1$ и W абелева, противоречие. Если же $U < V$, то по индукции $C_V(U) > V$. $\square$

Лемма 1.3. Пусть $G=PQ$ — $H(p)$ -группа (обозначения из определения $H(p)$ -групп). Тогда Q неабелева.

Доказательство. Пусть Q абелева. Тогда из (H3) и леммы 1.2 (2) следует $C_G(Q) > Q$, так что $C_G(Q) \cap P < G$, а это противоречит (H2). $\square$

Лемма 1.4. Пусть $G=S(p^a, q^b, q^c)$ -группа, $\chi \in \text{Irr}(G)$ с $\chi(1) > 1$; $P \in \text{Syl}_p(G)$, $Q \in \text{Syl}_q(G)$. Если $Q \cap Z(G) \leq \ker \chi$, то $\chi(1)=p$. Если $Q \cap Z(G) \not\leq \ker \chi$, то $\chi(1)=q^{b/2}$. В частности, всегда $\chi(1) \geq p-1$; если $\chi(1)=p-1$, то $p-1=q^{b/2}$, $q=2$.

Доказательство. Заменяя, в случае необходимости, G на $G/\ker \chi$, можем предположить, что χ точен. Если $Q \cap Z(G)=1$, то $\chi(1)=p$ по уже упоминавшейся теореме Ито. Пусть теперь $Q \cap Z(G) > 1$. Тогда Q экстраспе-

циальна порядка q^{1+b} , так что степени всех её неприводимых нелинейных характеров равны $q^{b/2}$. По теореме Клиффорда $q^{b/2}$ делит $\chi(1)$. Так как $\chi(1)^2 \leq |G/Z(G)| = pq^b$, это дает $\chi(1) = q^{b/2}$. В рассматриваемом случае число b четное. Так как p делит $q^b - 1 = (q^{b/2} - 1)(q^{b/2} + 1)$, то в силу минимального свойства b , число p делит $q^{b/2} + 1$. Отсюда следуют оставшиеся утверждения леммы. $\square$

Лемма 1.5. Пусть G — M_p -группа с инвариантной силовской p -подгруппой P . Если $h(G) < p$, то P абелева, $h(G) = p - 1$ и числа $p - 1$ и $|G : N_G(P)|$ — степени 2.

Доказательство. Пусть χ — точный характер группы G с $h(\chi) = h(G) < p$. Для каждого $q \in \pi(G) - \{p\}$ в G имеется $\{p, q\}$ -холловская подгруппа PQ с $Q \in \text{Syl}_q(G)$. По условию для некоторого q , не выполняется $P \leq PQ$. По теореме Фробениуса в этой группе PQ имеется $S(p^a, q^b, q^c)$ -подгруппа H . Так как χ_H точен, он имеет нелинейную неприводимую компоненту, и из леммы 1.4 следует $h(\chi_H) = q^{b/2}$. В этом случае $b = 2k$ четное, p делит $q^b - 1 = (q^k - 1)(q^k + 1)$. Так как b — порядок $q \pmod{p}$, то $p \mid (q^k + 1)$. Поэтому по лемме 1.4 имеем $p = 1 + q^k$, $q = 2$. Из этого результата вытекает утверждение об индексе. $\square$

Далее везде считаем $t < a$.

Введем обозначение с. д. $G = \{\chi(1) \mid \chi \in \text{Irr}(G)\}$.

Лемма 1.6. Пусть p -группа $G = S_1 \times \dots \times S_n$ — прямое произведение экстраспециальных групп S_i , $1 \leq i \leq n$. Если $Q \leq G$ и $|Q/Z(Q)| = |G/Z(G)|$, то $Q = G$.

Доказательство. Предположим, что $Q < G$. Тогда $QZ(G) = Q\Phi(G) < G$, откуда $|QZ(G)/Z(G)| < |G/Z(G)|$. Но $QZ(G)/Z(G) \cong Q/Q \cap Z(G)$. Так как $Q \cap Z(G) \leq Z(Q)$, это дает

$$|Q/Z(Q)| \leq |Q/Q \cap Z(G)| < |G/Z(G)|,$$

противоречие. $\square$

В § 2 доказывается, что группа G из отновной теоремы содержит секцию, являющуюся $H(p)$ -группой, а, следовательно, и $MH(p)$ -группой. Этот результат используется в § 3 при изучении $MH(p)$ -групп. Отметим, что лишь леммы 3.1 и 3.2 нужны в § 4 для завершения доказательства основной теоремы.

§ 2. Начало доказательства основной теоремы

Следующая лемма является ключевой.

Лемма 2.1. Если G , P , a , t такие же, как и в условии основной теоремы, $t < a$, P_t не нормальный делитель в G , то $H(p)$ -группа вкладывается в G .

Доказательство. Пусть лемма уже доказана для групп, чей порядок меньше $|G|$. Пусть χ — точный характер группы G наименьшей степени среди всех точных характеров высоты $h(G)$.

Предположим, что $|\pi(G)| > 2$. Для $q \in \pi(G) - \{p\}$ имеется в G $\{p, q\}$ -холловская подгруппа PQ , $Q \in \text{Syl}_q(G)$, p -длины 1. Если $P_t \triangleleft PQ$ при любом q , то $P_t \triangleleft G$, вопреки условию. Итак, пусть q выбрано так, что P_t не нормальный делитель в PQ . Так как $PQ < G$, $h(PQ) \leq h(G)$, по индукции $H(p)$ -группа вкладывается в PQ , а потому и в G . Далее считаем, что

$$(i) \quad G = PQ, \quad Q \in \text{Syl}_q(Q).$$

По условию $P \cong Q_{q,p}(G) = D \trianglelefteq G$. Так как P_t не нормальный делитель в G , то P_t не нормальный делитель в D . Поэтому, если $D < G$, то из $h(D) \leq h(G)$ следует, что $H(p)$ -группа вкладывается в D . Далее считаем, что $D = G$, так что

$$(ii) \quad Q \triangleleft G.$$

Возьмем в P циклическую подгруппу C порядка p^a . Если $C < P$, то $CQ < G$. Если C_t не нормальный делитель в CQ , то по индукции $H(p)$ -группа вкладывается в CQ . Если же $C_t \triangleleft CQ$ при любом выборе C , то P_t централизует Q , так что $N_G(P_t) \cong \langle P, Q \rangle = G$, вопреки условию. Далее считаем, что

$$(iii) \quad P \text{ циклическая порядка } p^a.$$

Понятно, что $G' \leq Q$. Если $G' < Q$, то G содержит нормальную подгруппу L индекса q . Из P_t не нормальный делитель в G следует P_t не нормальный делитель в L , так что по индукции, примененной к паре $\{L, \chi_L\}$, $H(p)$ -группа вкладывается в L . Поэтому далее считаем, что

$$(iv) \quad G' = Q.$$

Пусть χ приводим и $\{\chi_j\}_1^s$ — полный набор его неприводимых компонент. Тогда $s > 1$ и $K_j = \ker \chi_j > 1$, $1 \leq j \leq s$. Пусть χ_1 — нелинейная неприводимая компонента χ . Так как G/K_1 неабелева, $PK_1 < G$. Пусть $P_t \leq K_1$. Из того, что P_t не нормальный делитель в G следует P_t не нормальный делитель в K_1 , так что P_t не нормальный делитель в PK_1 . Поэтому $H(p)$ -группа вкладывается в $PK_1 < G$ по индукции. Пусть P_1 не нормальный делитель в K_1 . Положим $|K_1| = p^c m$ с $(p, m) = 1$. Тогда $c < t$; поэтому из $\chi_1(1) \leq h(G) < p^{a-t+1} = p^{(a-c)-(t-c)+1}$, $|PK_1/K_1| = p^{a-c}$ следует, что $H(p)$ -группа вкладывается в G/K_1 или G/K_1 содержит нормальную подгруппу H/K_1 порядка p^{t-c} . Пусть имеет место вторая возможность. Тогда $P_t \in \text{Syl}_p(H)$, $H = P_t K_1$, $PH = PP_t K_1 = PK_1 < G$. Из того, что P_t не нормальный делитель в G следует $P_t \leq H$ и $P_t \trianglelefteq PH$. Поэтому в PH вкладывается по индукции $H(p)$ -группа.

Поэтому далее считаем, что

$$(v) \quad \chi \in \text{Irr}(G).$$

Предположим, что $U = O_p(G) > 1$. Из $P \leq C_G(U) \triangleleft G$ и (iv) следует $C_G(U) = G$, $U \leq Z(G)$. Имеем по лемме Шура и теореме Клиффорда $\chi_U = \chi(1)\mu$, где μ — линейный характер U . Пусть λ — линейный характер группы G/U с $\lambda_U = \bar{\mu}$. Тогда $(\lambda\chi)_U = \chi(1)1_U$, откуда $U \leq \ker \lambda\chi$, $\lambda\chi \in \text{Irr}(G)$. Из $P_t \leq G$ следует $U < P_t$. Пусть $|U| = p^c$. Тогда $c < t$, $|P/U| = p^{a-c}$, $(\lambda\chi)(1) = \chi(1) < p^{a-t+1} = p^{(a-c)-(t-c)+1}$. По индукции, примененной к паре $\{G/U, \lambda\chi\}$, $H(p)$ -группа вкладывается в G/U . Далее считаем, что

$$(vi) \quad O_p(G) = 1.$$

Так как $\chi(1) < p^{a-t+1} \leq p^{a-1+1} = p^a$, далее можем считать, что

$$(vii) \quad t = 1.$$

Если P не действует точно на Q/Q' , то, так как $Q' \cong \Phi(Q)$, подгруппа P_1 централизует Q по теореме Ф. Холла о p' -автоморфизмах p -групп. Это влечет $P_1 \triangleleft G$ вопреки (vi). Поэтому

(viii) P действует точно на Q/Q' .

Из (iv) и теоремы о сдвиге следует

$$(ix) \quad Z(G/Q') = 1.$$

Предположим, что G — не $H(p)$ -группа. Тогда

(x) В Q имеется G -допустимая подгруппа $Q_0 < Q$ с $Q_0 \not\cong Z(G)$.

Пусть подгруппа Q_0 из (x). Тогда $PQ_0 < G$. Если P_1 не нормальный делитель в PQ_0 , то по индукции, примененной к паре $\{PQ_0, \chi_{PQ_0}\}$, $H(p)$ -группа вкладывается в PQ_0 . Поэтому пусть $P_1 \triangleleft PQ_0$. Тогда $C_G(Q_0) > P_1 = P_1$. Из $P_1 \trianglelefteq G$ следует $P_1 \trianglelefteq C_G(Q_0) (\triangleleft G)$. Поэтому $P_1 \trianglelefteq PC_G(Q_0)$. Если $PC_G(Q_0) < G$, то по индукции, примененной к паре $\{PC_G(Q_0), \chi_{PC_G(Q_0)}\}$, $H(p)$ -группа вкладывается в $PC_G(Q_0)$. Поэтому далее считаем, что

(xi) $PC_G(Q_0) = G$ для любой G -допустимой подгруппы $Q_0 < Q$. Для каждой такой Q_0 имеем $P_1 < C_G(Q_0)$.

Снова пусть Q_0 из (x). Так как $Q_0 \not\cong Z(G)$, то $\chi_{C_G(Q_0)}$ приводим. Так как $Q < C_G(Q_0)$, то и χ_Q приводим. Пусть H -подгруппа индекса p в G . Тогда χ_H приводим по 1.2 (1). Далее, $P_1 \trianglelefteq H$, так как $H \triangleleft G$. Поэтому $\chi_H = \theta_1 + \dots + \theta_r$, где различные $\theta_i \in \text{Irr}(H)$ сопряжены относительно G . Мы имеем $h(\chi_H) = h(\chi)/p < p^{a-1+1}/p = p^{a-1} = |P \cap H|$. Если $a-1 \neq t=1$, то $H(p)$ -группа вкладывается в H по индукции, примененной к паре $\{H, \chi_H\}$. Пусть $a-1=t=1$. Тогда $a=2$. Если $H' \neq Q$, то $C_G(H') \cong \langle Q, P_1 \rangle = H$ по (xi), откуда следует, что H нильпотентна, а так как P_1 характеристична в $H \triangleleft G$, то $P_1 \triangleleft G$, вопреки (vi). Итак, $H' = Q$. Тогда P_1 действует на Q/Q' без неподвижных точек по теореме о сдвиге. Так как P циклическая, то и P не имеет неподвижных точек на Q/Q' . Итак, группа G удовлетворяет условиям (H1)—(H3) определения $H(p)$ -групп и поэтому сама является $H(p)$ -группой. Это завершает доказательство леммы. $\square$

§ 3. Свойства $H(p^a, q^m, q^n)$ -групп

В этом параграфе $G = PQ$ — $H(p^a, q^m, q^n)$ -группа (обозначения — из определения $H(p)$ -группы), $ES(p, m)$ экстраспециальная группа порядка p^{1+2m}

1°. В этом разделе $Z(Q)$ циклический.

Лемма 3.1. Если $G = PQ$ — $H(p^a, q^m, q^n)$ -группа с циклическим $Z(Q)$, то $n=1$ и справедливо одно и только одно из утверждений:

$$(1) \quad p^a = 9, \quad q^m = 2^6, \quad Q = ES(2, 3), \quad |Q| = 2^7, \quad \chi(1) = 8,$$

$$Z(Q) = Z(G).$$

$$(2) \quad p = 2, \quad q = 2^a - 1, \quad Q = ES(q, 1), \quad |Q| = q, \quad \exp Q = q^3, \quad \chi(1) = q,$$

$$Z(Q) = Z(G).$$

- (3) $p = 2, a = 4, q^m = 3^4, Q = ES(3, 2), |Q| = 3^5, \exp Q = 3,$
 $\chi(1) = 9, Z(Q) = Z(G).$
- (4) $p = 2, q = 2^{a-1} + 1, Q = ES(q, 1), \exp Q = q, |Q| = q^3,$
 $\chi(1) = q, Z(Q) = Z(G).$
- (5) $p = 2, q = 2^{a-1} - 1, Q = ES(q, 1), \exp Q = q,$
 $|Q| = q^3, \chi(1) = q, Z(Q) = Z(G).$
- (6) То же что и в (5), но $Z(G) = 1, \chi(1) = 2q.$

Доказательство. Предположим, что $n > 1$. Тогда Q содержит нормальную подгруппу $R \cong C(p) \times C(p)$. Из $R \cap Z(Q) > 1$ следует, что $R \cap Z(Q) = Z_0 \cong \cong C(p)$. Положим $L = \langle R | R \text{ — нормальная подгруппа типа } (p, p) \text{ в } Q \rangle$. Тогда L характеристична в Q , так что L нормальна в G . Кроме того, L/Z_0 элементарная и $L \not\cong Z(Q)$, так как L нециклическая, а $Z(Q)$ циклическая. Из (H1) следует $L = Q$. Если $q > 2$, то $\exp L = q$, что противоречит $n > 1$. Пусть $q = 2$. Тогда $Z(Q) = Z(G)$, $Q' = Z_0$ и P централизует $Z(Q)/Q'$, что противоречит (H1). Итак, $n = 1$. Так как $Q/Z(Q)$ элементарная и $|Z(Q)| = q$, то $Q' = \Phi(Q) = Z(Q)$, $Q = ES(q, m/2)$ — экстраспециальная группа порядка q^{1+m} . По (H1) и (H2) группа P действует на $Q/Z(Q)$ точно и неприводимо. Поэтому $G/Z(Q)$ -группа Фробениуса с ядром $Q/Z(Q)$. Это дает $p^a | (q^m - 1)$, $q^m - 1 = (q^k - 1)(q^k + 1)$, $m = 2k$. Так как с. д. $Q = \{1, q^k\}$ и χ_Q не имеет линейный компонент по теореме Клиффорда, $q^k | \chi(1) < p^a$. Поэтому $p^a \equiv q^k + 1$, так что $p^a \nmid (q^k - 1)$.

(i) p^a делит $q^k + 1$. Так как $p^a \equiv q^k + 1$, это дает $p^a = q^k + 1$. Отметим, что $a > 1$.

Пусть $k > 1$. Тогда $p^a = 9, q^k = 8$, и G типа (1).

Пусть $k = 1$. Тогда $q = p^a - 1, p = 2$ и q — простое число Мерсенна. Получается группа типа (2); если мы докажем, что центр Q совпадает с центром группы G . Предположим, что $C_G(Z(Q)) = H < G$. Тогда $|G:H| = 2$, χ_H приводим. Поэтому $\chi(1) \equiv 2q^k > p^a$, противоречие. Итак, $Z(Q) = Z(G)$. Кроме того, если $k > 1$, то $\chi(1) = 8$; если же $k = 1$, то $\chi(1) = q$.

(ii) p^a не делит $q^k + 1$.

Так как $p^a | (q^k + 1)(q^k - 1)$, то $p | (q^k + 1), p | (q^k - 1)$, откуда $a = p = (q^k - 1, q^k + 1) = 2$. Теперь мы видим, что

$$p^a = 2^a \in \{2(q^k - 1), 2(q^k + 1)\}.$$

Пусть $2^a = 2(q^k - 1)$. Тогда $q^k = 1 + 2^{a-1}$. Если $k > 1$, то $q^k = 9, 2^{a-1} = 8, 2^a = 16, Q = ES(3, 2)$ — экстраспециальная группа порядка 3^5 . Как и в (i), показывается, что центр Q совпадает с центром G . Если $k = 1$, то $q = 1 + 2^{a-1}$ — простое число Ферма, Q — неабелева группа порядка q^3 и экспоненты q . Предположим, что $H = C_G(Z(Q)) < G$. Тогда χ_H приводим, так что и χ_Q приводим. Отсюда выводим $\chi(1) \equiv 2q^k$. Так как $\chi(1) < p^a$, это влечет $q^k = q = 2^{a-1} - 1$. Так как $|G:H|$ делит $q - 1 = 2(2^{a-2} - 1)$, то $|G:H| = 2$. Легко проверить, что

$$\text{с.д. } H = \{1, 2^{a-1}, q\}, \quad \chi(1) \equiv 2q = 2^a - 2,$$

и теперь ясно, что $\chi(1)=2^a-2$. Пусть $r(G)$ — число классов сопряженных элементов группы G . Мы имеем

$$\begin{aligned} r(G) &= |G/G'| + \frac{q^2-1}{2^a} + \frac{q-1}{2} + (2^{a-1}-1) \cdot \frac{q-1}{2} = \\ &= 2^a + \frac{q^2-1}{2(q-1)} + 2^{a-2}(q-1)2^{a-2}(q+3) + \frac{q-1}{2}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} |\text{Irr}(G)| &= 2^a + \frac{q^2-1}{2^a} + \frac{|G|-|G/Z(Q)|}{(2q)^2} = 2^a + \frac{q^2-1}{2(q+1)} + \frac{2^a q^3(q-1)}{4q^2} = \\ &= 2^{a-2}(q+3) + \frac{q-1}{2}. \end{aligned}$$

Равенство $|\text{Irr}(G)|=r(G)$ выполнено.

$$2^{a-2}q + 2^{a-2} + \frac{q+1}{2} = 2^{a-2}q + 3 \cdot 2^{a-2} + \frac{q-1}{2}$$

Итак, во всех случаях

$$Z(Q) = Z(G), \quad \square$$

Из леммы 3.1 следует, что $H(p)$ -группа PQ с циклическим $Z(Q)$ является $MH(p)$ -группой.

2°. В этом разделе мы классифицируем все $MH(p)$ -группы PQ с нециклическим $Z(Q)$.

Лемма 3.2. Пусть $G=PQ$ — $MH(p)$ -группа (обозначения — из определения $H(p)$ -групп) с нециклической подгруппой $Z(Q)$. Тогда $a=2$, $p-1=2^r$, $q=2$, $\chi(1)=p(p-1)$.

Доказательство. Из нециклическости $Z(Q)$ следует приводимость χ_Q . Пусть H — подгруппа индекса p в G . Тогда χ_H приводим по лемме 1.2(1). Поэтому $h(\chi_H)=\chi(1)/p < p^{a-1}$. Так как $H(p)$ -группа не вкладывается в H и $P_1 \trianglelefteq H$, это по лемме 2.1 влечет $a-1=t=1$, $a=2$, и теперь применение леммы 1.5 дает $h(\chi_H)=p-1=2^r$, $q=2$. Поэтому $\chi(1)=p(p-1)$. $\square$

Далее пусть H всегда означает подгруппу индекса p в G . Положим $\chi_H = \theta_1 + \dots + \theta_r$, где различные $\theta_i \in \text{Irr}(H)$ сопряжены относительно G . Так как $(|H/Q|, \theta_i(1)) = (p, p-1) = 1$, то $(\theta_i)_Q \in \text{Irr}(Q)$.

Лемма 3.3. $m=2rp$, где $p-1=2^r$.

Доказательство. Пусть S — минимальная ненильпотентная подгруппа в H . Так как $h(\chi_S) \cong h(\chi_H) = p-1$ и χ_S имеет нелинейную неприводимую компоненту, а по лемме 1.4 имеем с. d. $S \subseteq \{1, p, 2^r\}$, то $h(\chi_S) = p-1 = 2^r$, так что S — $S(p, 2^{2r}, 2^e)$ -подгруппа с $e > 0$. Пусть $P_1 \in \text{Syl}_p(S)$, $P_1 < P$. P -модуль $Q/Z(Q)$ равен прямой сумме $s \leq p$ P_1 -модулей, P -сопряженных P_1 -модулю $S'Z(Q)/Z(Q)$ (из некоммутативности S' следует $S' \not\subseteq Z(Q)$). Поэтому $|Q/Z(Q)| = 2^{2rS}$, $s \leq p$.

Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что $S' \cap Z(Q) = Z(S')$. Очевидно, $S' \cap Z(Q) \leq Z(S')$. Допустим, что $S' \cap Z(Q) < Z(S')$. Тогда $S'Z(Q)/Z(Q) \cong S'/S' \cap Z(Q)$ некоммукативна, а это противоречит коммутативности $Q/Z(Q)$. Итак, $S' \cap Z(Q) = Z(S')$ и размерность $Q/Z(Q)$ над $GF(2)$ равна $2rs$. Так как $G/Z(Q)$ -группа Фробениуса по (H1), имеем

$$|Q/Z(Q)| = 2^{2rs} \equiv 1 \pmod{p^2}, \quad p = 1 + 2^r.$$

Поэтому $(2^{2r} - 1)(1 + 2^{2r} + \dots + 2^{2r(s-1)}) \equiv 0 \pmod{(1 + 2^r)^2}$, откуда $1 + 2^{2r} + \dots + 2^{2r(s-1)} \equiv 0 \pmod{1 + 2^r}$. Но $2^{2r} \equiv 1 \pmod{1 + 2^r}$. Поэтому

$$1 + 2^{2r} + \dots + 2^{2r(s-1)} \equiv s \equiv 0 \pmod{1 + 2^r}.$$

Итак, $s = p$, $m = 2rp$. $\square$

Лемма 3.4. $Z(H) = Z(Q)$, $H' = Q$.

Доказательство. Из $h(\chi_H) = p - 1$ следует $h(\chi_{P_1Z(Q)}) < p$, так что $P_1Z(Q)$ абелева по лемме 1.2 (2). Это доказывает первое равенство. Если $H' < Q$, то $C_G(H') \cong \langle Q, P_1 \rangle = H$, и H нильпотентна. Тогда $P_1 < G$, что противоречит (H2). $\square$

Лемма 3.5. $\ker \theta_i \not\leq Z(Q)$, $H/\ker \theta_i \cong S(p, 2^{2r}, 2^1)$.

Доказательство. Мы знаем, что $(\theta_i)_Q \in \text{Irr}(Q)$. Понятно, что $\ker \theta_i \leq Q$. Отсюда следует цикличность $Z(Q/\ker \theta_i)$,

$$|Q/\ker \theta_i : Z(Q/\ker \theta_i)| = \theta_i(1)^2 = 2^{2r} < 2^{2rp} = |Q/Z(Q)|.$$

Пусть $M < Z(Q)$ такова, что $Z(Q/M)$ циклическая. Так как $Q/Z(Q)$ элементарная, это дает

$$|Q/M : Z(Q/M)| \geq 2^{2rp-1} > 2^{2r} = |Q/\ker \theta_i : Z(Q/\ker \theta_i)|.$$

Поэтому $\ker \theta_i \not\leq Z(Q)$. Пусть $\bar{F} = F/\ker \theta_i$ — минимальная ненильпотентная подгруппа в $\bar{H} = H/\ker \theta_i$. Так как

$$|Q/\ker \theta_i : Z(Q/\ker \theta_i)| = 2^{2r}$$

то F — $S(p, 2^{2r}, 2^c)$ -подгруппа с $c > 0$. Но $(\theta_i)_F$ точен, поэтому $c = 1$. Так как $\bar{F}Z(\bar{Q}) = \bar{Q}$, то $\bar{F}$ — $S(p, 2^{2r}, 2^1)$ -группа. Теперь ясно, что $\bar{H} = \bar{F}Z(\bar{H})$. Все доказано, если $|Z(\bar{H})| = 2$. Пусть, однако, $|Z(\bar{H})| = 2^s$ с $s > 1$. Тогда $|Z(\bar{Q})| = 2^s$. Так как $\bar{Q}$ класса 2 с циклическим центром, это дает $|\bar{Q}'| = 2$. Так как у $\bar{H}/\bar{Q}'$ силовская 2-подгруппа абелева, по теореме о сдвиге имеем $\bar{H}' < \bar{Q}'$. Это дает $H' < Q$, вопреки лемме 3.4. Итак, $|Z(\bar{H})| = 2$, и тогда $\bar{H} = \bar{F}$, $\bar{H}$ — $S(p, 2^{2r}, 2^1)$ -группа. $\square$

Лемма 3.6. $Q = Q^1 \times \dots \times Q^p$, где экстраспециальные Q^i , $1 \leq i \leq p$, порядка 2^{1+2r} сопряжены относительно G .

Доказательство. Положим $Q^i = Q/\ker \theta_i$. Тогда Q^i экстраспециальная порядка 2^{1+2r} по лемме 3.5. Из $\bigcap_i \ker \theta_i = 1$ следует, что Q изоморфна подгруппе из $F = Q^1 \times \dots \times Q^p$. Тогда $|Q/Z(Q)| = 2^{2rp} = |F/Z(F)|$, так что $Q = F$ по

лемме 1.6 (мы отождествили Q с подходящей подгруппой из F). Положим $P = \langle x \rangle$ (тогда $x^p \in N_G(Q^1)$), $U^2 = (Q^1)^x$, ..., $U^p = (U^{p-1})^x$. Подгруппа $D = Q^1 U^2 \dots U^p$ нормальна в G . Так как $D \not\leq Z(Q)$, это дает $D = Q$. Но $|Q| = |Q^1| |U^2| \dots |U^p|$ и $Q^1, U^2, \dots, U^p \triangleleft Q'$. Это дает $Q = Q^1 \times U^2 \times \dots \times U^p$. $\square$

В частности, все $Q/\ker \theta_i$ изоморфны по теореме Ремака—Шмидта.

§ 4. Завершение доказательства основной теоремы

Пусть G удовлетворяет условию основной теоремы. Благодаря 1.4 можем считать, что $t < a$.

Для $q \in \pi(G) - \{p\}$ возьмем в G существующую по условию $\{p, q\}$ — холловскую подгруппу $T(p, q) = PQ$, $Q \in \text{Syl}_p(G)$, такую, что $I_p(PQ)$ — p -длина $T(p, q) = PQ$ равна 1.

Пусть $p = 2$. Если q — не простое число Ферма или Мерсенна, то $H(2)$ -группа не вкладывается в $T(p, q)$ по леммам 3.1 и 3.2, так что по лемме 2.1 имеем $P_t \triangleleft T(p, q)$ и q не делит $|G: N_G(P_t)|$.

Пусть $p > 2$. Если p — не простое число Ферма или $q > 2$, то $H(p)$ -группа не вкладывается в $T(p, q)$ по леммам 3.1 и 3.2. Поэтому $P_t \triangleleft T(p, q)$ по лемме 2.1, так что q не делит $|G: N_G(P_t)|$. Так как P_t не нормальный делитель в G , то при некотором q в PQ вкладывается $H(p)$ -группа, так что p — простое число Ферма, а $|G: N_G(P_t)|$ — степень 2 по леммам 3.1 и 3.2.

Неизвестно, можно ли в условии теоремы M_p^1 заменить на M_p . В доказательстве условие M_p^1 используется существенно.

В качестве следствия доказательства леммы 2.1 получается такой результат:

Следствие. Пусть G, P, a, t такие же, как и в условии основной теоремы. Если $h(G) < p^{a-t}(p-1)$ и p нечетное, то $P_t \triangleleft G$.

В случае, когда P циклическая, Д. Винтер [1] доказал, что $P_t \triangleleft G$, если G — линейная группа степени, меньшей $p^{a-t}(p-1)$. При этом утверждается в [1], что это верно при любом p . Однако при $p = 2$ его рассуждение недостаточно для доказательства такого утверждения*.

Цитированная литература

- [1] D. L. WINTER, Finite p -solvable linear groups with a cyclic Sylow p -subgroup, Proc. AMS 18 (1967), 341—343.

(Поступило 26, IX, 1984 г.)

* Добавлено при корректуре 2. I. 1987. Пусть G -группа из леммы 3.1. Так как G/Q изоморфна подгруппе из $SL(2, p)$ в п. п. (4) и (5), то $q = 3$ в п. (4), группы из п(5) не существуют.