

Описание модулей с двумя образующими над ненётеровым кольцом нормирования

К. БУЗАШИ (Дебрецен)—Н. И. ВИШНЯКОВА (Харьков)

Пусть R —ненётерово кольцо нормирования (коммутативное кольцо с единицей, идеалы которого образуют цепь). Все рассматриваемые R -модули будут предполагаться унитарными.

Локально циклическим R -модулем будем называть R -модуль, каждый конечно порождённый подмодуль которого цикличесок. Если M R -модуль, то элемент $x \in M$, $x \neq 0$ называется регулярным, если циклический подмодуль (x) свободен. Модуль M назовём регулярным, если он содержит регулярный элемент. Эту терминологию будем использовать и для идеалов кольца R .

Будем употреблять следующие обозначения:

V — максимальный идеал кольца R ;

A — простой идеал кольца R , состоящий из всех нерегулярных элементов кольца;

R_A — полное кольцо частных кольца R (R_A совпадает с кольцом частных кольца по отношению к мультипликативной системе всех регулярных элементов в R).

Будем говорить, что ненулевые идеалы $I, J \subseteq R$ принадлежат к одному классу, если существуют такие элементы $a, b \in R$, что $aI = bJ \neq 0$.

Если R —целостное кольцо, то ненулевые аннуляторы его ненулевых элементов лежат в одном классе идеалов. Условимся считать, что идеал (0) образует класс идеалов, если R —целостное кольцо, и что (0) лежит в классе ненулевых аннуляторов ненулевых элементов кольца, если R нецелостно.

Если $I \neq 0$, то стабилизатором $S(I)$ идеала I назовём подмножество $S(I) = \{a \in R \mid aI = I\}$.

Стабилизатор $S(I)$ есть инвариант класса идеалов (см. [1]). Легко показать, что ненулевые аннуляторы ненулевых элементов произвольного локально циклического модуля M лежат в одном классе идеалов.

Идеал $I \subseteq R$ назовём регулярно главным, если I порождает в полном кольце частных R_A главный идеал.

Лемма 1. Пусть M —локально циклический модуль, $u \in M$, $u \neq 0$. Если $\lambda x = \lambda u = u$ ($\lambda \in R$), то $u = \Theta x$, где Θ —обратимый элемент кольца R .

Доказательство. Предположим, для определённости, что $(x) \subseteq (u)$. Пусть $x = \gamma u$, где $\gamma \in V$. Тогда $\lambda \gamma u = \lambda u$, откуда $\lambda(1 - \gamma)u = 0$, что ведёт к противоречию, ибо $(1 - \gamma)$ —обратимый в R элемент. Значит, γ —единица кольца R . Лемма доказана.

Следствие. Пусть $a, b, c \in R$ и $ab = ac \neq 0$. Тогда $b = \Theta c$, где Θ — единица R .

Лемма 2. Пусть $a, b \in R$ и $b = at$. Идеалы $\text{Ann } a$ и $\text{Ann } b$ совпадают тогда и только тогда, когда t — регулярный элемент кольца R .

Доказательство. Пусть $\text{Ann } a = \text{Ann } b$. Тогда

$$(1) \quad (b) \cap \text{Ann } t = 0.$$

В самом деле, пусть $(bc)t = 0$ и $bc \neq 0$. Так как

$$\text{Ann}(bc) = \frac{\text{Ann } b}{c} = \frac{\text{Ann } a}{c} = \text{Ann}(ac),$$

то $act = 0$, но с другой стороны $act = bc \neq 0$. Получили противоречие.

Если b регулярен, то элемент t также регулярен. Если же b нерегулярен, то из (1) вытекает, что t снова регулярен.

Наоборот, если t регулярен, то, очевидно, аннуляторы элементов a и b совпадают. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть R — кольцо нормирования, а $I \neq 0$ — идеал в R . Тогда каждый R -гомоморфизм $\varphi: I \rightarrow R$ задаётся формулой

$$(2) \quad \varphi(\lambda) = \Theta_\lambda \delta_\lambda,$$

где $\lambda \in I$, Θ_λ — единицы в R , а δ — фиксированный элемент из полного кольца частных R_A кольца R .

Доказательство. Покажем, что $\varphi(\lambda) = \delta_\lambda \lambda$, где $\delta_\lambda \in R_A$. Предположим сначала, что идеал I содержит регулярный элемент λ . Тогда все элементы $\mu \in I$, $(\mu) \supseteq (\lambda)$ также регулярны. Так как в кольце R_A все регулярные элементы обратимы, то для всех $\mu \in I$, $(\mu) \supseteq (\lambda)$ имеет место формула $\varphi(\mu) = \mu \delta_\mu$ где $\delta_\mu \in R_A$. Тогда, очевидно, эта формула справедлива для всех $\lambda \in I$.

Предположим теперь, что I — нерегулярный идеал. Пусть $\lambda \in I$, $\lambda \neq 0$ и $J = \text{Ann } \lambda$. Тогда $J\varphi(\lambda) = 0$. Применяя лемму 2, получим, что либо $\varphi(\lambda) = \delta_\lambda \lambda$, где $\delta_\lambda \in R$, либо $\lambda = \gamma \varphi(\lambda)$, где γ — регулярный элемент кольца. В любом случае $\varphi(\lambda) = \delta_\lambda \lambda$, где $\delta_\lambda \in R_A$. Фиксируем элемент $\lambda \in I$, $\lambda \neq 0$. Пусть $\varphi(\lambda) \neq 0$. Если $\mu \in I$, $(\mu) \supseteq (\lambda)$, то $\lambda = \mu \tau$ ($\tau \in R$) и

$$(3) \quad \varphi(\lambda) = \varphi(\tau \mu) = \tau \varphi(\mu) = \tau \mu \delta_\mu = \lambda \delta_\mu = \lambda \delta_\lambda.$$

На основании леммы 2 из (3) вытекает, что все элементы δ_μ обратимы в R_A , если δ_λ обратим в R_A , и все элементы δ_μ необратимые элементы кольца R , если $\delta_\lambda \in R$ и δ_λ — необратим в R . Предположим, что δ_λ — необратимый элемент в R . Тогда из (3), ввиду следствия из леммы 1, получаем $\delta_\mu = \delta_\lambda \Theta_\mu$ для всех $\mu \in I$, $(\mu) \supseteq (\lambda)$, где Θ_μ — единица кольца R . Пусть δ_λ обратим в R_A . Тогда один из элементов δ_λ ; $\frac{1}{\delta_\lambda}$ является регулярным элементом кольца R , и то же имеет

место для элементов δ_μ , $\frac{1}{\delta_\mu}$. Снова применяя (3) и следствие из леммы 1, получим, что один из элементов $\delta_\mu \cdot \delta_\lambda^{-1}$, $\delta_\lambda \cdot \delta_\mu^{-1}$ обратим в R . В любом случае $\delta_\mu = \Theta_\mu \delta_\lambda$, где Θ_μ — единица R .

Итак, для всех $\lambda \in I$ имеет место формула (2). Лемма доказана.

Следствие. Если I —регулярный идеал кольца R , а гомоморфизм $\varphi: I \rightarrow R$ отображает I на регулярный идеал кольца R , то $\varphi(\lambda) = \delta\lambda$ ($\lambda \in I$), где δ —фиксированный обратимый элемент в R_A .

Доказательство. Пусть λ и μ —регулярные элементы идеала I с регулярными образами $\varphi(\lambda)$ и $\varphi(\mu)$. Тогда в силу (3) $\lambda\delta_\lambda = \lambda\delta_\mu$, откуда $\delta_\lambda = \delta_\mu$. Значит формула (3) принимает вид $\varphi(\lambda) = \delta\lambda$, где δ —фиксированный обратимый элемент кольца R_A .

Лемма 4. Кольцо R -эндоморфизмов произвольного локально циклического модуля M локально.

Доказательство. Пусть $M \neq 0$. Покажем, что разность двух необратимых эндоморфизмов модуля M также необратима. Пусть φ —произвольный необратимый эндоморфизм модуля M . Если для всех $x \in M$ выполняются включения $(x) \subseteq (\varphi(x))$, то φ —сюрьективное отображение и из $\varphi(x) = 0$ следует, что $x = 0$, то есть φ — R -автоморфизм модуля M . Следовательно, существует такой элемент $u \in R$, $u \neq 0$, что $\varphi(u) = \lambda u$. Тогда для любого $x \in M$ имеет место формула

$$(4) \quad \varphi(x) = \lambda \Theta_x x,$$

где Θ_x —единица кольца R . В самом деле, если $x \in (u)$, то $x = \mu u$ и $\varphi(x) = \mu\varphi(u) = \mu\lambda u = \lambda x$. Пусть $(u) \subset (x)$ и $u = \gamma x$; $\gamma \in R$. Тогда $\varphi(\gamma x) = \lambda \gamma x = \gamma \varphi(x)$. Так как $\varphi(u) \neq 0$, то ввиду леммы 1 имеем $\varphi(x) = \lambda \Theta_x x$, где Θ_x —единица кольца R , что устанавливает формулу (4).

Если для всех $x \neq 0$ выполняется равенство $\text{Ann } \varphi(x) = \text{Ann } x$, то φ — R -автоморфизм модуля M , так как тогда $(x) = (\varphi(x))$ для всех $x \in M$, и при этом φ —мономорфизм. Следовательно, эндоморфизм (4) необратим тогда и только тогда, когда имеет место строгое включение

$$(5) \quad \text{Ann } \varphi(x) \supset \text{Ann } x$$

для некоторого $x \in M$, $x \neq 0$.

Пусть $x_0 \in M$, $x_0 \neq 0$, $\text{Ann } x_0 = I \neq 0$ и φ —эндоморфизм вида (4). Предположим, что $\text{Ann } \varphi(x_0) = \text{Ann } x_0 = I$. Тогда $\lambda I = I$, то есть λ —элемент стабилизатора идеала I . Идеалы из одного класса идеалов имеют один и тот же стабилизатор. Так как ненулевые аннуляторы ненулевых элементов локально циклического модуля M лежат в одном классе идеалов, то включение (5) одновременно выполняется или не выполняется для всех $x \in M$, $x \neq 0$. Пусть теперь φ_1 и φ_2 —два необратимых эндоморфизма модуля M вида (4). Тогда для всех $x \in M$, $x \neq 0$ по доказанному выполняются строгие включения

$$\text{Ann } \varphi_1(x) \supset \text{Ann } x, \quad \text{Ann } \varphi_2(x) \supset \text{Ann } x.$$

Следовательно, для эндоморфизма $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$ также выполняются строгие включения

$$\text{Ann } \psi(x) \supset \text{Ann } x$$

для всех $x \in M$, $x \neq 0$.

Итак, разность двух необратимых R -эндоморфизмов модуля M является необратимым эндоморфизмом. Следовательно, кольцо R -эндоморфизмов локально циклического модуля локально. Лемма доказана.

Следствием леммы 4 и известных теорем единственности [2], [3], [4] является

Предложение 1. *Изоморфные любые два разложения R -модуля M в прямые суммы локально циклических модулей.*

В дальнейшем будут рассматриваться R -модули M с двумя образующими.

Пусть $M=(a, b)$ — R -модуль с двумя образующими, $I_1 = \text{Ann } a$, $I_2 = \text{Ann } b$ и, для определенности, $I_1 \subseteq I_2$. Тогда M можно рассматривать как точный модуль над кольцом $R_1 = R/I_1$. Поэтому в дальнейшем мы будем изучать точные циклические модули с двумя образующими.

Введём один существенный инвариант модуля M . Рассмотрим всевозможные идеалы I кольца R , такие, что модуль IM локально циклический. Объединение J всех таких идеалов очевидно является наибольшим (по включению) из идеалов I , для которых подмодуль IM локально циклический. Будем называть J идеалом-инвариантом модуля M , а иногда для краткости инвариантом. Если для всех идеалов $I \neq 0$ модуль IM не локально циклический, то инвариант J есть нулевой идеал.

Прежде всего покажем, что модуль M можно задать специальной системой образующих, связанной с инвариантом J .

Пусть M — точный циклический модуль с двумя образующими: $M=(a, b)$, $\text{Ann } a=0$. Пусть $I = \text{Ann } M/(a)$, $I \neq 0$. Тогда в силу леммы 3

$$(6) \quad \tau b = \Theta_\tau \delta \tau a$$

или

$$(7) \quad \tau b = \frac{\Theta_\tau \tau}{\varrho} a,$$

где $\tau \in I$, Θ_τ — единицы R , $\delta \in R$, $I \subset (\varrho)$ а ϱ — регулярный элемент.

Если в (6) δ — необратимый элемент, то сделаем замену $\bar{b} = b + a$. Тогда

$$(8) \quad \tau \bar{b} = \tau(1 + \Theta_\tau \delta) a,$$

где $\Theta'_\tau = 1 + \Theta_\tau \delta$ — единицы кольца R и $\text{Ann } \bar{b} = 0$.

Пусть имеет место формула (7). Тогда

$$\text{Ann } b = 0; \text{Ann } M/(b) = \frac{I}{\varrho} = I_1.$$

Действительно, если $\lambda a = \mu b$, то в силу (7) $\mu = \tau \gamma \in I$ и

$$\lambda = \frac{\Theta_\tau \cdot \tau}{\varrho} \tau \quad (\gamma \in R).$$

Таким образом, для элементов $\tau' \in I_1$ имеют место формулы

$$(9) \quad \tau'a = \Theta_{\tau'} \tau' b.$$

Сравнивая (6), (7), (8) и (9), окончательно получаем, что модуль M либо свободен, либо может быть задан двумя свободными образующими так, что

$$(10) \quad \begin{aligned} \tau b &= \theta_{\tau} \tau a; \quad \tau \in I = \text{Ann } M/(a) \\ I &\neq 0; \quad \text{Ann } a = 0; \quad \text{Ann } b = 0. \end{aligned}$$

Назовем элементы a, b , участвующие в записи (10), канонической системой образующих.

Покажем теперь, что идеал I в (10) совпадает с инвариантом J модуля M . В самом деле, из (10) следует, что $Ib = Ia = IM$. Значит, модуль IM локально цикличесок. Предположим, что $R \supset I' \supset I$ и покажем, что модуль $I'M$ не локально цикличесок. Действительно, Ib — собственный подмодуль модуля $I'b$, так как модуль (b) свободен. Далее

$$I'M = (I'b, I'a).$$

Пусть $x \in I'b \cap I'a$. Тогда

$$x \in Ib \cap I'a = Ia \cap I'a = Ia,$$

и, следовательно, $I'b \cap I'a = Ib = Ia$. Значит, фактор-модуль $I'M/Ib$ разлагается в прямую сумму циклических подмодулей

$$(11) \quad I'M/Ib = I'b/Ib \dot{+} I'a/Ia.$$

Отсюда сразу вытекает, что подмодуль $I'M$ не является локально циклическим, ибо каждый фактор-модуль локально циклического модуля локально цикличесок. Таким образом, I — наибольший по включению идеал, для которого модуль IM локально цикличесок, то есть $I = J$.

Теорема 1. Пусть M — точный нециклический модуль с двумя образующими и инвариантом J . Модуль M свободен тогда и только тогда, когда $J = 0$. Все модули M с ненулевым инвариантом J задаются автоморфизмом φ идеала J вида:

$$(12) \quad \varphi(\tau) = \Theta_{\tau} \tau,$$

где Θ_{τ} — единицы кольца R . Модули M и M' , соответствующие автоморфизмам φ и φ' , изоморфны тогда и только тогда, когда существует такая обратимая над R матрица

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix},$$

что

$$(13) \quad (\gamma_{11} + \gamma_{21} \Theta_{\tau}) \Theta'_{\tau} \equiv (\gamma_{12} + \gamma_{22} \Theta_{\tau}) \pmod{\text{Ann } \tau}$$

для всех $\tau \in J$.

Доказательство. Если модуль M свободен, то, очевидно, $J=0$. Пусть $J \neq 0$. Зададим модуль M образующими a, b , где $\text{Ann } a = 0$ и $b \notin (a)$. Пусть $I = \text{Ann } M/(a)$. Если $I = 0$, то M свободен, а если $I \neq 0$, то, как показано выше, модуль M обладает системой образующих a_1, b_1 такой, что $\text{Ann } a_1 = 0$, $\text{Ann } b_1 = 0$ и

$$\text{Ann } M/(a_1) = I_1 \neq 0,$$

причем $I_1 = J$. Значит, модуль с ненулевым инвариантом J свободен.

Пусть $J \neq 0$. Выберем в M две канонические системы образующих a, b и a', b' , где

$$(14) \quad \tau b = \Theta_\tau \tau a; \quad \tau b' = \Theta'_\tau \tau a' \quad (\tau \in J).$$

Тогда

$$(15) \quad a' = \gamma_{11} a + \gamma_{21} b; \quad b' = \gamma_{12} a + \gamma_{22} b$$

и

$$(16) \quad \tau a' = (\gamma_{11} + \gamma_{21} \Theta_\tau) \tau a; \quad \tau b' = (\gamma_{12} + \gamma_{22} \Theta_\tau) \tau a.$$

Ввиду (14) и (16)

$$\Theta'_\tau (\gamma_{11} + \gamma_{21} \Theta_\tau) \tau a = (\gamma_{12} + \gamma_{22} \Theta_\tau) \tau a,$$

откуда

$$(17) \quad \Theta'_\tau (\gamma_{11} + \gamma_{21} \Theta_\tau) \equiv (\gamma_{12} + \gamma_{22} \Theta_\tau) \pmod{\text{Ann } \tau}, \quad (\tau \in J).$$

Из (11) следует, что

$$(18) \quad \begin{aligned} M/JM &= (a)/Ja \dot{+} (b)/Jb \\ M/JM &= (a')/Ja' \dot{+} (b')/Jb'. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу предположения 1 определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$$

обратим по модулю J , а тогда и обратим в R .

Мы установили необходимость условий теоремы. Они также и достаточны, ибо, если матрица

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$$

обратима и выполняются сравнения (17), то элементы a' и b' , заданные формулами (15), дают каноническую систему образующих для модуля M , причем $\tau b' = \Theta'_\tau \tau a'$. Теорема доказана.

Лемма 5. Пусть J — нерегулярный неглавный идеал кольца R со счетным числом образующих, не являющийся регулярно главным. Тогда группа R -автоморфизмов модуля J вида $\tau \rightarrow \Theta_\tau \tau$ ($\tau \in J$, Θ_τ — единица R) имеет по меньшей мере мощность континуума.

Доказательство. Так как J — не главный и не регулярно главный идеал, то J можно представить в виде объединения строго возрастающей цепочки главных идеалов

$$(a_1) \subset (a_2) \subset \dots$$

где

$$\text{Ann } a_{i+1} \subset \text{Ann } a_i \quad (i = 1, 2, \dots)$$

(см. лемму 2), и идеал $\text{Ann } a_{i+1}$ не является максимальным в $\text{Ann } a_i$.

Фиксируем индекс i . Пусть Θ_i — единица кольца R . Так как $\text{Ann } a_{i+1}$ не максимален в $\text{Ann } a_i$, то существуют такие главные идеалы (c_1) и (c_2) ; что

$$\text{Ann } a_i \supset (c_1) \supset (c_2) \supset \text{Ann } a_{i+1}.$$

Пусть $c_2 = c_1 a$ ($a \in V$). Положим

$$\Theta'_{i+1} = \Theta_i + c_1 b_1, \quad \Theta''_{i+1} = \Theta_i + c_1 b_2,$$

где b_1 и b_2 — такие элементы кольца R , что $b_1 \not\equiv b_2 \pmod{a}$. Тогда

$$\Theta'_{i+1} \equiv \Theta''_{i+1} \equiv \Theta_i \pmod{\text{Ann } a_i}$$

и $\Theta'_{i+1} a_{i+1} \neq \Theta''_{i+1} a_{i+1}$. Значит каждый автоморфизм $a_i \rightarrow \Theta_i a_i$ идеала (a_i) по крайней мере двумя способами продолжается до автоморфизма идеала (a_{i+1}) , а отсюда сразу следует, что существует по меньшей мере континуальное множество различных автоморфизмов идеала J . Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть M — нециклический точный R -модуль с двумя образующими, а $J \neq 0$ — инвариант модуля M . Если J — главный, регулярный или нерегулярный, но регулярно главный идеал, то модуль M разложим.

Если R — счетное кольцо, то существует континуум попарно неизоморфных точных модулей, соответствующих нерегулярному неглавному и не регулярно главному инварианту J , и среди них точно один разложимый.

Доказательство. Предположим, что J — регулярно главный идеал. Тогда совпадают аннуляторы всех элементов $\tau \in J$, $\tau \neq 0$ (лемма 2). Значит, в формулах (10) единицы Θ_τ могут быть заменены одной единицей Θ : $\tau b = \Theta \tau a$ для всех $\tau \in J$. Тогда модуль $M = (a, b)$ допускает прямое разложение

$$(19) \quad M = (a) \dot{+} (b - a\Theta).$$

Если J — регулярный идеал, то в силу леммы 3 каждый его автоморфизм имеет вид $\tau \rightarrow \tau \varrho$ или $\tau \rightarrow \frac{\tau}{\varrho}$, где ϱ — фиксированный регулярный элемент кольца R . Следовательно, для регулярного идеала J формулы (10) принимают вид $\tau b = \Theta \tau a$ (Θ — единица R) и снова получаем разложение вида (19).

Наконец, если J — главный идеал, то модуль M конечно представим. Его разложение очевидно.

Предположим теперь, что R — счетное кольцо, а J — нерегулярный, неглавный и не регулярно главный идеал. Тогда в силу леммы 5 существует континуум автоморфизмов $\varphi: J \rightarrow J$, определяющих модули M по формуле (10). С другой стороны, ввиду счетности кольца R и (13) существует не более чем

счетное множество модулей, изоморфных фиксированному модулю M вида (10). Следовательно, существует континуум попарно неизоморфных модулей M с инвариантом J . Докажем, что среди этих модулей (с точностью до изоморфизма) существует точно один разложимый. В самом деле, пусть модуль M разложим $M = M_1 + M_2$. Тогда

$$(20) \quad JM = JM_1 + IM_2$$

(прямая сумма, быть может, с нулевыми слагаемыми). Так как модуль JM локально циклический, то точно одно слагаемое в правой части должно быть нулевым, например, $JM_2 = 0$. Тогда $JM = JM_1$. По доказанному ранее M/JM есть прямая сумма двух циклических модулей с аннулятором J (см. (18)). С другой стороны

$$M/JM \cong (M_1 + M_2)/JM = (M_1 + M_2)/JM_1 \cong M_1/JM_1 + M_2.$$

В силу предложения 1 об изоморфизме прямых разложений, M_2 — циклический модуль с аннулятором J . Пусть $M = (\lambda_1 a + \lambda_2 b)$. Если λ_2 — обратимый элемент R , то $M = (a, \lambda_1 a + \lambda_2 b)$. Более того, $M = (a) + M_2$, ибо если $\delta(\lambda_1 a + \lambda_2 b) \in (a)$, то $\delta \in J$, и тогда $\delta(\lambda_1 a + \lambda_2 b) = 0$. Значит, $M_1 = M/M_2 \cong (a)$. Предположим, что $\lambda_2 \in V$. Тогда λ_1 — единица R , так как прямое слагаемое M_2 не содержится собственным образом в объемлющем циклическом подмодуле. Имеем для $\tau \in J$

$$\tau(\lambda_1 a + \lambda_2 b) = \tau\lambda_1 a + \tau\lambda_2 \Theta_\tau a = \tau(\lambda_1 + \lambda_1 \Theta) a = 0.$$

Но $\lambda_1 + \lambda_2 \Theta_\tau$ — единица R и, значит, последнее равенство противоречит тому, что (a) — свободный модуль.

Итак, если $M = M_1 + M_2$, то (после перенумерации) $M_1 \cong (a)$, $M_2 \cong R/J$. Теорема доказана.

Замечание. Мы не использовали счетность кольца R для доказательства единственности разложения модуля M с фиксированным инвариантом J .

Литература

- [1] С. Д. Берман—Н. И. Вишнякова, О мультипликативной полугруппе идеалов кольца нормирования. Publ. Math. (Debrecen), **29** (1982), 171—176.
- [2] C. AZUMAYA, Corrections and supplementories to my paper concerning Krull—Remark—Schmidt's theorem. Nagoya Math. J. (1950), 117—124.
- [3] R. SWAN, Algebraic K-theory. Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 76.
- [4] R. B. WARFIELD, Krull—Schmidt theorem for infinite sums of modules. Proc. Amer. Math. Soc., **22** (1969), 460—465.

(Поступило: 30. X. 1984 г.)