

О полугрупповом условии Л. Фукса относительно линейной упорядочиваемости группы

С. Тодоринов, Н. Петрова (Пловдив)

В (1) Л. Фукс дает необходимое и достаточное условие продолжения частичного порядка P группы G до линейного порядка.

Частичный порядок P группы G тогда и только тогда может быть продолжен до линейного, когда для произвольного множества $a_1, \dots, a_n$ неединичных элементов G можно так подобрать числа $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, $\varepsilon_i = \pm 1$, что

$$P \cap S(a_1^{\varepsilon_1}, \dots, a_n^{\varepsilon_n}) = \emptyset.$$

Через S обозначена инвариантная подполугруппа, порожденная пересчисленными в скобках элементами.

Следствием этой теоремы является утверждение, что в группе G можно ввести линейный порядок тогда и только тогда, когда для произвольного конечного множества $a_1, \dots, a_n$ неединичных элементов можно так подобрать числа $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, $\varepsilon_i = \pm 1$, что

$$e \notin S(a_1^{\varepsilon_1}, \dots, a_n^{\varepsilon_n}).$$

Возникает следующий вопрос: возможно ли в общем случае утверждать, что если в группе G условие Фукса выполняется относительно какого-нибудь $m \in \mathbb{N}$, то отсюда следует, что оно выполняется и для любого n , $n \in \mathbb{N}$?

В некоторых случаях на этот вопрос дается положительный ответ — всякая нильпотентная группа без кручения линейно упорядочена. В общем случае, однако, как мы покажем в настоящей работе, ответ отрицательный.

Пример, рассматриваемый Блудовым В. В. (2), дает ответ на некоторые вопросы поставленные первым Всесоюзным симпозиумом по теории групп в 1965 г.

В (5) мы делаем модификацию этого примера и получаем группу, в которой условие Фукса выполняется относительно $n=1$ и 2 , а нарушается для $n=3$.

Мы доказываем, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ можно построить группу, в которой условие Фукса выполнено для всех натуральных чисел, не превышающих n , но для $n+1$ оно уже нарушено. Группа представляет собой следующую модификацию примера Блудова:

Пусть $F_1 = \langle x_1, \dots, x_{2^n} \rangle$ и $F_2 = \langle y_1, \dots, y_{2^n} \rangle$ — две свободные группы, каждая с 2^n порождающими элементами и $F = F_1 \times F_2$ является их прямым произведением.

Для элементов группы F_1 , как для слов над алфавитом $x_1, \dots, x_{2^n}, x_1^{-1}, \dots, x_{2^n}^{-1}$ вводим следующие числовые характеристики:

1) $l(v)$ — длина слова v (для пустого слова $\emptyset$ полагаем $l(\emptyset)=0$) и

$$(2) \quad m(v) = \begin{cases} l(v)-1 & \text{если } v = x_i v', \quad i = 1, \dots, 2^n \\ l(v) & \text{если } v = x_i^{-1} v', \quad i = 1, \dots, 2^n \\ 0 & \text{если } v = \emptyset \end{cases}$$

Здесь $\equiv$ означает лексикографическое равенство слов. Он используется только для слов, представленных в редуцированном (сокращенном) виде.

Если $f \in F$ и $f = uv$, где $v \in F_1, u \in F_2$, то полагаем $l(f) = l(v)$ и $m(f) = m(v)$.

Через $Z_+(F)$ обозначаем подмножество элементов целочисленного группового кольца над F со строго положительными коэффициентами. Аналогичный смысл имеют и обозначения $Z_+(F_1)$ и $Z_+(F_2)$.

Если $\sigma \in Z_+(F)$ и $\sigma = n_1 f_1 + \dots + n_k f_k$, то полагаем $l(\sigma) = \max l(f_i)$ и $m(\sigma) = \max m(f_i)$.

В группу F_2 вводим линейный порядок так, что $y_i > l, i = 1, \dots, 2^n$.

Рассмотрим свободную абелеву группу M с базисными элементами a_α и $b(k)_\alpha^\beta, k = 1, \dots, n$, где $\alpha \in F_2$ и $\beta \in F_1$, т. е.

$$M = \{a_\alpha, b(k)_\alpha^\beta, k = 1, \dots, n, m_1 + m_2 = m_2 + m_1, \alpha \in F_2, \beta \in F_1\}.$$

Образуем полупрямое (нормальное) произведение $G = M \lambda F$. Действие F на M задаем через следующие соотношения, причем для операции в M используем аддитивную запись, а для действия F над M — правую мультипликативную запись:

$$a_\alpha x_i = -a_\alpha + \sum_{k=1}^n \varphi_n(i, k) (b(k)_\alpha^e + b(k)_{y_i \alpha}^e)$$

$$a_\alpha y_i = a_{\alpha y_i}$$

$$b(k)_\alpha^\beta x_i = b(k)_\alpha^{\beta x_i},$$

$$b(k)_\alpha^\beta y_i = b(k)_{\alpha y_i}^\beta,$$

$i = 1, 2, \dots, 2^n, k = 1, \dots, n$, а функция $\varphi_n(i, k)$ задается рекуррентно следующим способом:

$$\varphi_1(1, 1) = -1; \quad \varphi_1(2, 1) = 1;$$

$$\varphi_{n+1}(i, k) = \begin{cases} \varphi_n(i, k), & i \leq 2^n, & k \leq n \\ \varphi_n(i - 2^n, k), & 2^n < i \leq 2^{n+1}, & k \leq n \\ -1, & i \leq 2^n, & k = n+1 \\ 1, & 2^n < i \leq 2^{n+1}, & k = n+1. \end{cases}$$

Пусть A означает подгруппу M , порожденную элементами a_α , а $B_k, k = 1, \dots, n$ — подгруппы M , порожденные соответственно элементами $b(k)_\alpha^\beta$.

Если $m \in M, \sigma \in Z_+(F)$, где $\sigma = p_1 f_1 + \dots + p_N f_N$, то $m\sigma$ означает

$$p_1 m f_1 + \dots + p_N m f_N.$$

Прежде всего сформулируем и докажем несколько лемм, аналогичных леммам из примера Блудова В. В. Затем с их помощью установим, что в построенной таким образом группе G условие Фукса выполнено для любого натурального числа, не превышающего n , а для $n+1$ оно уже нарушено.

Лемма 1. Пусть $a \in A$, $a \neq 0$ и $\sigma \in \mathbb{Z}_+(F_2)$. Тогда $a\sigma \neq 0$ и $a\sigma \in A$.

Доказательство. Принадлежность $a\sigma \in A$ вытекает непосредственно из соотношений, задающих действие F над M .

Пусть

$$a = n_1 a_{\alpha_1} + \dots + n_N a_{\alpha_N},$$

$$\sigma = p_1 u_1 + \dots + p_M u_M$$

и для определенности допустим, что

$$\alpha_1 > \alpha_i, \quad i = 2, \dots, N$$

$$u_1 > u_j, \quad j = 2, \dots, M.$$

Тогда

$$\begin{aligned} a\sigma &= n_1 a_{\alpha_1} p_1 u_1 + n_1 a_{\alpha_1} \sum_{j=2}^M p_j u_j + \sum_{i=2}^N n_i a_{\alpha_i} \sigma = \\ &= n_1 p_1 a_{\alpha_1 u_1} + \sum_{j=2}^M n_1 p_j a_{\alpha_1 u_j} + \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^M n_i p_j a_{\alpha_i u_j} \end{aligned}$$

Так как $p_1 n_1 \neq 0$ и $\alpha_1 u_1 > \alpha_i u_j$ для $j=2, \dots, M$; $\alpha_1 u_1 > \alpha_i u_j$ для $i=2, \dots, N$ и $j=1, \dots, M$, то $a\sigma \neq 0$.

Лемма 2. Пусть $a \in A$, $\sigma \in \mathbb{Z}_+(F)$ и в базисном развитии $a\sigma$ встречается базисный элемент $b(k)_\alpha^\beta$ с ненулевым коэффициентом. Тогда для $b(k)_\alpha^\beta$ выполняется неравенство $l(\beta) \leq m(\sigma)$.

Доказательство. Пусть $\sigma = p_1 f_1 + \dots + p_M f_M$. Для произвольного $j=1, \dots, M$, рассматриваем $ap_j f_j = p_j a u_j v_j = a' v_j$, где $u_j \in F_1$, $v_j \in F_1$, $u_j v_j = f_j$ и согласно Л. 1 $a' \in A$.

Используем индукцию по длине v_j . Для $l(v_j)=0$ предположение справедливо. (Тогда согласно Л. 1 $p_j a f_j \in A$ и элемент $b(k)_\alpha^\beta$ не будет участвовать в базисном разложении $p_j a f_j$.) Допустим, что оно справедливо для всех v_j , таких, что $l(v_j) < L$, $L \geq 1$.

Пусть $l(v_j)=L$. Представим v_j в виде $v_j = w v'_j$ так, что $l(w)=1$. Тогда $l(v'_j) < L$.

Полагаем

$$a = \sum_{i=1}^T n_i a_{\alpha_i}$$

и получаем

$$\begin{aligned} a' v_j &= a' w v_j' = \left(\sum_{t=1}^T n_t a_{\alpha_t} \right) w v_j' = \left[-a' + \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^n n_t \varphi_n(i, k) (b(k)_{\alpha_t}^{\beta} + b(k)_{y_i \alpha_t}^{\beta}) \right] v_j' = \\ &= -a' v_j + \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^n n_t \varphi_n(i, k) (b(k)_{\alpha_t}^{\beta v_j'} + b(k)_{y_i \alpha_t}^{\beta v_j'}), \end{aligned}$$

где $\beta = w$, если $w = x_i^{-1}$ и $\beta = e$, если $w = x_i$, $i = 1, \dots, 2^n$.

Очевидно, что

$$l(\beta v_j') = m(w v_j') = m(v_j) \leq m(\sigma).$$

Для $a' v_j'$ имеем $l(v_j') < L$ и, следовательно, в силе индукционное предположение.

Таким образом, утверждение доказано для произвольного члена $a\sigma$.

Лемма 3. Пусть $a \in A$, $\sigma \in Z_+(F)$ и в базисном выражении $a\sigma$ встречается базисный элемент $b(k)_{\alpha}^{\beta}$, $k = 1, \dots, n$ с ненулевым коэффициентом и с таким, что $l(\beta) = m(\sigma)$.

Тогда:

1) если $\beta = x_{\varepsilon} \beta'$, $\varepsilon = 1, \dots, 2^n$, то $\sigma = v\sigma_1 + \sigma_2$, где

$$v \in F_1, v = x_{\delta} \beta, \delta = 1, \dots, 2^n,$$

$$\sigma_1 \in Z_+(F_2), \sigma_2 \in Z_+(F).$$

2) Если $\beta = x_{\varepsilon}^{-1} \beta'$, $\varepsilon = 1, \dots, 2^n$, то $\sigma = v\sigma_1 + \sigma_2$, $v \in F_1$, $v = \beta$ или $v = x_{\delta} \beta$, $\delta = 1, \dots, 2^n$, $\delta \neq \varepsilon$, $\sigma_1 \in Z_+(F_2)$; $\sigma_2 \in Z_+(F)$.

Доказательство.

Пусть

$$a = n_1 a_{\alpha_1} + \dots + n_N a_{\alpha_N}$$

и

$$\sigma = p_1 f_1 + \dots + p_M f_M.$$

Тогда

$$a\sigma = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M n_i p_j a_{\alpha_i} f_j$$

Рассмотрим произвольное слагаемое этой суммы

$$n_i p_j a_{\alpha_i} f_j = n_i p_j a_{\alpha_i} u_j v_j = a' v_j,$$

где $v_j \in F$, $u_j \in F_2$, $u_j v_j = f_j$ и, согласно Л. 1, $a' \in A$. Пусть

$$a' = n'_1 a_{\beta_1} + \dots + n'_t a_{\beta_t}.$$

Если $l(v_j) = 0$, то утверждение справедливо.

Если $l(v_j) \neq 0$, представляем v_j в виде $v_j = w v_j'$, где $l(w) = 1$.

Рассмотрим элемент $b(k)_\alpha^\beta$, $k=1, \dots, n$ такой, что $l(\beta)=m(\sigma)$ и $\beta=x_\varepsilon\beta'$ ($x_\varepsilon^{-1}\beta'$) и допустим, что $v_j \neq x_\delta\beta$, $\delta=1, \dots, 2^n$

$$(v_j \neq \beta, \quad v_j \neq x_\delta\beta, \quad \delta \neq \varepsilon, \quad \delta = 1, \dots, 2^n).$$

Покажем, что в таком случае $b(k)_\alpha^\beta$, $k=1, \dots, n$ не встречается в базисном выражении $a'v_j$.

Имеем

$$a'v_j = a'wv_j' = -a'v_j' + \sum_{i=1}^t \sum_{k=1}^N n_i' \varphi_n(\xi, k) (b(k)_{p_i}^{\omega v_j'} + b(k)_{y_\xi y_i}^{\omega v_j'}),$$

$$\xi = 1, \dots, 2^n$$

$\omega = w$ если $w = x_\xi^{-1}$, $\omega = l$ если $w = x_\xi$.

Так как $\omega v_j' \neq \beta$, то элемент $b(k)_\alpha^\beta$, $k=1, \dots, n$ не встречается в двойной сумме. Для первого слагаемого имеем, или 1) $m(v_j') < m(\sigma) = l(\beta)$ и тогда, согласно Л. 2, $b(k)_\alpha^\beta$, $k=1, \dots, n$ не будет встречаться в базисном выражении $a'v_j'$; или 2) $m(v_j') = m(\sigma)$.

Из $l(v_j') < l(\sigma)$ следует, что $v_j' = x_\delta^{-1}v''$, $\delta=1, \dots, 2^n$, и тогда

$$a'v_j' = -a'v'' + \sum_{i=1}^t \sum_{k=1}^n n_i \varphi_n(\varepsilon, k) (b(k)_{y_i}^{v_j'} + b(k)_{y_\varepsilon y_i}^{v_j'}),$$

$$\varepsilon = 1, \dots, 2^n.$$

Снова $b(k)_\alpha^\beta$, $k=1, \dots, n$ не встречается в двойной сумме, а для первого слагаемого $a'v''$ имеем $m(v'') < m(v_j') = m(\sigma) = l(\beta)$. Это, согласно Л. 2 $b(k)_\alpha^\beta$, $k=1, \dots, n$, не будет встречаться в базисном выражении av'' . Вследствие полученных противоречий и произвольного выбора слагаемого $n_i p_j a_{\alpha_i} f_j$ лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $a \in A$, $a = n_1 a_{\alpha_1} + \dots + n_N a_{\alpha_N}$ и для определенности $\alpha_1 > \alpha_i$, $i=2, \dots, N$, $n_1 \neq 0$.

Пусть далее $\sigma = \sum_{j=1}^M p_j v_1 u_j + \sigma_2$, где

$$p_j \in \mathbb{Z}_+, \quad v_1 \in F_1, \quad m(v_1) = m(\sigma) = l(\sigma),$$

т. е. $v_1 = x_\varepsilon^{-1}v_1'$, $\varepsilon=1, \dots, 2^n$, $u_j \in F_2$ и для определенности $u_1 > u_j$, $j=2, \dots, M$; $\sigma_2 \in \mathbb{Z}_+(F)$ и v_1 не встречается в базисном выражении σ_2 .

Тогда в базисном развитии $a\sigma$ элементы $b(k)_{y_\varepsilon \alpha_1 u_1}^{\beta}$, $k=1, \dots, n$ встречаются с коэффициентами соответственно $\varphi_n(\varepsilon, k) n_1 p_1 \neq 0$ и для всех других базисных элементов $b(k)_\alpha^\beta$ этого разложения $\alpha < y_\varepsilon \alpha_1 u_1$.

Доказательство. Полагаем

$$a_1 = \sum_{i=2}^N n_i a_{\alpha_i} \quad \text{и} \quad \sigma_1 = \sum_{j=2}^M p_j v_1 u_j$$

Тогда

$$\begin{aligned} a\sigma &= (n_1 a_{\alpha_1} + a_1)(p_1 v_1 u_1 + \sigma_1 + \sigma_2) = n_1 p_1 a_{\alpha_1} v_1 u_1 + a_1 p_1 v_1 u_1 + a\sigma_1 + a\sigma_2 = \\ &= n_1 p_1 a_{\alpha_1} v'_1 u_1 + \sum_{k=1}^n n_1 p_1 \varphi_n(\varepsilon, k)(b(k)_{\alpha_1 u_1}^{v_1} + b(k)_{y_\varepsilon \alpha_1 u_1}^{v_1}) - \\ &- a_1 p_1 v'_1 u_1 + p_1 \sum_{i=2}^N \sum_{k=1}^n n_i \varphi_n(\varepsilon, k)(b(k)_{\alpha_i u_1}^{v_1} + b(k)_{y_\varepsilon \alpha_i u_1}^{v_1}) - \\ &- a_1 v'_1 \sum_{j=2}^M p_j u_j + \sum_{i=1}^N \sum_{j=2}^M \sum_{k=1}^n n_i p_j \varphi_n(\varepsilon, k)(b(k)_{\alpha_i u_j}^{v_1} + b(k)_{y_\varepsilon \alpha_i u_j}^{v_1}) + a\sigma_2. \end{aligned}$$

Рассмотрим часть этой суммы:

$$-n_1 p_1 a_{\alpha_1} v'_1 u_1 - a_1 p_1 v'_1 u_1 - a v'_1 \sum_{j=2}^M p_j u_j = a' v'.$$

Из Л. 1 следует, что $a' \in A$. Имеем еще $m(v'_1) < m(v_1) = l(v_1)$. Следовательно, согласно Л. 2 $b(k)_{\alpha}^{v_1}$, $k=1, \dots, n$ не встречается в базисном разложении $a' v'$.

Рассмотрим последнее слагаемое $a\sigma_2$ и, применив Л. 3, получим, что $b(k)_{\alpha}^{v_1}$ можно встретить в базисном разложении $a\sigma_2$ только если в базисном разложении σ_2 встречается v_1 или $x_\delta v_1$, $\delta=1, \dots, 2^n$, $\delta \neq \varepsilon$.

Первое невозможно по предположению, а второе невозможно, так как

$$l(x_\delta v_1) = l(v_1) + 1 > l(\sigma) \equiv l(\sigma_2).$$

Для слагаемых

$$\sum_{k=1}^n n_1 p_1 \varphi_n(\varepsilon, k) b(k)_{\alpha}^{v_1},$$

$$p_1 \sum_{i=2}^N \sum_{k=1}^n n_i \varphi_n(\varepsilon, k)(b(k)_{\alpha_i u_1}^{v_1} + b(k)_{y_\varepsilon \alpha_i u_1}^{v_1})$$

и

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=2}^M \sum_{k=1}^n n_i p_j \varphi_n(\varepsilon, k)(b(k)_{\alpha_i u_j}^{v_1} + b(k)_{y_\varepsilon \alpha_i u_j}^{v_1})$$

имеем $\alpha_i u_j \leq \alpha_1 u_1 < y_\varepsilon \alpha_1 u_1$ для $i=1, \dots, N$, $j=1, \dots, M$ и

$$y_\varepsilon \alpha_i u_j \leq y_\varepsilon \alpha_1 u_j < y_\varepsilon \alpha_1 u_1$$

для $i=1, \dots, N$, $j=2, \dots, M$.

В таком случае $b(k)_{y_\varepsilon \alpha_1 u_1}^{v_1}$, $k=1, \dots, n$ не встречается в этих слагаемых, а для всех других $b(k)_{\alpha}^{v_1}$ имеем $\alpha < y_\varepsilon \alpha_1 u_1$.

И так $b(k)_{y_\varepsilon \alpha_1 u_1}^{v_1}$, $k=1, \dots, n$ встречается только в сумме

$$\sum_{k=1}^n n_1 p_1 \varphi_n(\varepsilon, k) b(k)_{y_\varepsilon \alpha_1 u_1}^{v_1}, \text{ причем с коэффициентом } \varphi_n(\varepsilon, k) n_1 p_1.$$

Этим лемма доказана.

Лемма 5. Пусть

$$b = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n n_{ik} b(k)_{\alpha_i}^{\beta_1} + b_2,$$

где для всех $b(k)_{\alpha}^{\beta}$ из базисного разложения b_2

$$\beta \neq \beta_1, \quad l(\beta) \leq l(\beta_1).$$

Пусть

$$\sigma \in Z_+(F), \quad \sigma = \sum_{t=1}^T p_t u_1 v_t + \sigma_2,$$

где $p_t \in Z_+$, $v_1 \in F_1$, $u_t \in F_2$ и для определенности $u_1 > u_t$ при $t=2, \dots, T$.

Пусть еще v_1 не встречается в базисном развитии σ_2 и $l(v_1) \equiv m(v)$, $l(\beta_1 v_1) = l(\beta_1) + l(v_1)$ и для каждого другого v из базисного развития σ $l(\beta_1 v_1) \equiv l(\beta_1 v)$ для $t=1, \dots, T$.

Тогда элементы $b(k)_{\alpha_1 u_1}^{\beta_1 v_1}$, $k=1, \dots, n$ встречаются и то только с коэффициентами соответственно n_{1k} $p_1 \neq 0$ в базисном разложении $b\sigma$, а для всех других $b(k)_{\alpha}^{\beta_1 v_1}$ имеем $\alpha < \alpha_1 u_1$.

Доказательство. Полагаем

$$b_1 = \sum_{i=2}^N \sum_{k=1}^n n_{ik} b(k)_{\alpha_i}^{\beta_1}, \quad \sigma_1 = \sum_{t=2}^T p_t v_1 u_t$$

Тогда

$$\begin{aligned} b\sigma &= \left(\sum_{k=1}^n n_{1k} b(k)_{\alpha_1}^{\beta_1} + b_1 + b_2 \right) (p_1 v_1 u_1 + \sigma_1 + \sigma_2) = \\ &= p_1 \sum_{k=1}^n n_{1k} b(k)_{\alpha_1 u_1}^{\beta_1 v_1} + \sum_{k=1}^n \sum_{t=2}^T n_{1k} p_t b(k)_{\alpha_1 u_t}^{\beta_1 v_1} + \\ &+ \sum_{i=2}^N \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^T n_{ik} p_t b(k)_{\alpha_i u_t}^{\beta_1 v_1} + b_2 \sum_{t=1}^T p_t v_1 u_t + \\ &+ b_2 \sigma_2 + \sum_{t=1}^N \sum_{k=1}^n n_{ik} b(k)_{\alpha_i}^{\beta_1} \sigma_2. \end{aligned}$$

Очевидно, что $b(k)_{\alpha_1 u_1}^{\beta_1 v_1}$, $k=1, \dots, n$ встречается только в первой сумме и то с коэффициентами соответственно $n_{1k} p_1 \neq 0$. Покажем, что эти элементы не встречаются в базисном разложении остальных слагаемых и для всех других $b(k)_{\alpha}^{\beta_1 v_1}$, $k=1, \dots, n$ имеем $\alpha < \alpha_1 u_1$.

Рассмотрим слагаемое $b_2 \sum_{t=2}^T p_t v_1 u_t$. Базисные элементы его разложения имеют вид $b(k)_{\alpha u_j}^{\beta_1 v_1}$, $k=1, \dots, n$, где $b(k)_{\alpha}^{\beta}$ из базисного развития b_2 и, так как по условию для всех таких $b(k)_{\alpha}^{\beta}$, $\beta \neq \beta_1$, то $b(k)_{\alpha}^{\beta_1 v_1}$ не встречается в базисном выражении этого слагаемого.

Рассмотрим последнее слагаемое

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n n_{ik} b(k)_{\alpha_1}^{\beta_1} \sigma_2.$$

Его базисные элементы имеют вид $b(k)_{\alpha}^{\beta_1 v}$, где $v \neq v_1$ так как по условию v_1 не участвует в базисном развитии σ_2 . Следовательно $b(k)_{\alpha}^{\beta_1 v_1}$ не встречается в базисном развитии и этого слагаемого.

Рассмотрим теперь слагаемые:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{t=2}^T n_{1k} p_t b(k)_{\alpha_1 u_t}^{\beta_1 v_1}, \quad \sum_{i=2}^N \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^T n_{ik} p_t b(k)_{\alpha_i u_t}^{\beta_1 v_1}.$$

Так как $\alpha_1 u_t < \alpha_1 u_1$ для $t=2, \dots, T$ и $\alpha_i u_t \leq \alpha_i u_1 < \alpha_1 u_1$ для $i=2, \dots, N, t=1, \dots, T$, то для всех $b(k)_{\alpha}^{\beta_1 v_1}$ из базисного выражения этих слагаемых $\alpha < \alpha_1 u_1$.

Рассмотрим теперь слагаемое $b_2 \sigma_2$ и допустим, что в базисном его выражении участвуют элементы $b(k)_{\alpha}^{\beta_1 v_1}$, $k=1, \dots, n$.

Это означает, что в базисном выражении b_2 встречается элемент $b(k)_{\alpha}^{\beta_1 r}$, а в базисном развитии σ_2 участвует такое v_s , что $\beta_r v_s = \beta_1 v_1$.

Так как $l(\beta_r v_s) \leq l(\beta_r v_s) \leq l(\beta_r) + l(v_s)$, то существуют две возможности:

$$(1) \quad l(\beta_r v_s) < l(\beta_r) + l(v_s)$$

Тогда

$$\begin{aligned} l(\beta_r v_s) &\leq l(\beta_r) + l(v_s) - 2 < l(\beta_r) + l(v_s) - 1 \leq l(\beta_r) + m(v_s) \leq \\ &\leq l(\beta_r) + m(\sigma) \leq l(\beta_1) + l(v_1) = l(\beta_1 v_1), \end{aligned}$$

т. е. $l(\beta_r v_s) < l(\beta_1 v_1)$. Следовательно невозможно $\beta_r v_s = \beta_1 v_1$.

$$(2) \quad l(\beta_r v_s) = l(\beta_r) + l(v_s).$$

Тогда $l(\beta_r) \leq l(\beta_1)$.

При $l(\beta_r) = l(\beta_1)$ следует, что $\beta_r = \beta_1$ ($\beta_r v_s = \beta_1 v_1$), а это противоречит условию леммы.

Остается $l(\beta_r) < l(\beta_1)$ и тогда должно быть $l(v_s) > l(v_1)$.

Но $l(v_1) \geq m(\sigma) \geq m(v_s) \geq l(v_s) - 1$. Следовательно $l(v_1) = l(v_s) - 1 = m(v_s)$.

Второе равенство показывает, что $v_s = x_{\delta} v'_s$, $\delta = 1, \dots, 2^n$.

По условию имеем $l(\beta_1 v_1) \geq l(\beta_1 v_s)$ и так как $l(v_s) > l(v_1)$, то

$$l(\beta_1 v_s) \leq l(\beta_1 v_1) = l(\beta_1) + l(v_1) < l(\beta_1) + l(v_s).$$

Это означает, что при умножении β_1 на v_s остается сокращение, т. е. $\beta_1 = \beta'_1 x_{\delta}^{-1}$ (такое же δ как при $v_s = x_{\delta} v'_s$). Ясно, что в элементе $\beta_1 v_1$ на $l(v_1) + 1$ месте справа находится элемент x_{δ}^{-1} , а в $\beta_r v_s$ на том же месте находится элемент x_{δ} .

Следовательно, невозможно $\beta_1 v_1 = \beta_r v_s$. Поэтому элементы $b(k)_{\alpha}^{\beta_1 v_1}$ не участвуют в базисном выражении рассматриваемых слагаемых.

Этим лемма доказана.

Лемма 6. Пусть $b_1 \in B$, $b_2 \in B$,

$$b_1 = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n n_{ik} (b(k)_{\alpha_i}^\beta + b(k)_{y_\varepsilon \alpha_i}^\beta),$$

$$b_2 = \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^n m_{jk} (b(k)_{\gamma_j}^\beta + b(k)_{y_\delta \gamma_j}^\beta),$$

$$\varepsilon = 1, \dots, 2^n, \quad \delta = 1, \dots, 2^n, \quad \varepsilon \neq \delta$$

и пусть $b_1 + b_2 = 0$. Тогда

$$\sum_{i=1}^N n_{ik} a_{\alpha_i} = 0$$

и $\sum_{j=1}^M m_{jk} a_{\gamma_j} = 0$ для каждого $k = 1, \dots, n$.

Доказательство. Допустим противное: пусть для определенности

$$\sum_{i=1}^N n_{ik} a_{\alpha_i} \neq 0.$$

Тогда после приведения подобных членов (если это несходимо) останутся коэффициенты $n_{ik} \neq 0$ для некоторых $i = 1, \dots, N$. Полагаем

$$l_1 = \max_{n_{ik} \neq 0} [l(\alpha_i), l(y_\varepsilon \alpha_i)].$$

Аналогично

$$l_2 = \max_{m_{jk} \neq 0} [l(\gamma_j), l(y_\delta \gamma_j)].$$

Если $\sum_{j=1}^M m_{jk} a_{\gamma_j} = 0$ для каждого $k = 1, \dots, n$, тогда $l_2 = 0$. (Здесь под $l(\alpha)$ подразумевается длина слова α .) Пусть α_s один из индексов α_i , $i = 1, \dots, N$, для которых $l(\alpha_s) = l_1$.

Тогда $\alpha_s = y_\varepsilon \alpha'$ или $y_\varepsilon^{-1} \alpha'$.

Аналогично для γ_r , такого, что $l(\gamma_r) = l_2$ имеем $\gamma_r = y_\delta \gamma'$ или $\gamma_r = y_\delta^{-1} \gamma'$.

Так как $\varepsilon \neq \delta$, то отсюда следует, что $\alpha_s \neq \gamma_r$.

Рассмотрим в b_1 базисный элемент $b(k)_{\alpha_s}^\beta$ с ненулевым коэффициентом ($n_{ik} \neq 0$). Если $l_1 \geq l_2$, то $b(k)_{\alpha_s}^\beta$ не встречается в базисном развитии b_2 и тогда $b_1 + b_2 \neq 0$, что противоречит условию.

Если $l_1 < l_2$, то $b_2 \neq 0$ и в базисном выражении b_2 будет участвовать элемент $b(k)_{\gamma_r}^\beta$ с ненулевым коэффициентом $m_{rk} \neq 0$, $l(\gamma_r) = l_2$. Элемент $b(k)_{\gamma_r}^\beta$ не будет встречаться в b_1 , и следовательно $b_1 + b_2 \neq 0$.

Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема. В построенной таким образом группе G условие Фукса выполняется для произвольных n пораздающих элементов.

Доказательство. Сначала покажем, что G имеет строго изолированную единицу. Это означает, что в G выполняется условие Фукса для $n=1$.

Так как $G/M \cong F$, а F имеет строго изолированную единицу, то отсюда следует, что M строго изолирована в G . Следовательно достаточно показать, что если $q \in M$ и $\sigma \in Z_+(F)$, то из $q\sigma=0$ следует, что $q=0$.

Рассмотрим два случая:

$$(1) \quad q = a \in A.$$

Пусть $a\sigma=0$. Представим σ в виде $\sigma=\sigma_1 v_1 + \sigma_2$, где $v_1 \in F_1$, $l(v_1)=l(\sigma)$, $m(v_1)=m(\sigma)$, $\sigma_1 \in Z_+(F_2)$, $\sigma_2 \in Z_+(F)$ и v_1 не встречается в базисном выражении σ_2 .

Если $l(v_1)=0$, то $l(\sigma)=0$ и $\sigma \in Z_+(F_2)$. Отсюда по Л. 1 следует, что $a=0$. Пусть $l(v_1)>0$. Полагаем $v_1=w_1 v'_1$ так, что $l(w_1)=1$. В таком случае

$$a\sigma = a\sigma_1 v_1 + a\sigma_2 = a_1 v_1 + a\sigma_2.$$

Пусть

$$a\sigma_1 = a_1 = \sum_{i=1}^N n_i a_{\alpha_i}.$$

Тогда

$$(1) \quad a\sigma = -a_1 v'_1 + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n n_i \varphi_n(\varepsilon, k) (b(k)_{\alpha_i}^{\omega v'_1} + b(k)_{y_\varepsilon \alpha_i}^{\omega v'_1}) + a\sigma_2$$

где $\omega=w_1$ если $w_1=x_\varepsilon^{-1}$, и $\omega=e$ если $w_1=x_\varepsilon$, $\varepsilon=1, \dots, 2^n$.

Если $\omega=w_1=x_\varepsilon^{-1}$, то $m(v'_1)<l(\omega v'_1)$ и согласно Л. 2 $b(k)_{\alpha_i}^{\omega v'_1}$, $k=1, \dots, n$ не будут встречаться в базисном разложении $a_1 v'_1$. Согласно Л. 3 $b(k)_{\alpha_i}^{\omega v'_1}$ могут встречаться в базисном выражении $a\sigma_2$ только в случае, если $\sigma_2=v_2 \sigma_3 + \sigma_4$, где $\sigma_3 \in Z_+(F_2)$, $\sigma_4 \in Z(F)$ и $v_2=v_1$ или $v_2=x_\delta v_1$, $\delta=1, \dots, 2^n$, $\delta \neq \varepsilon$.

Первое невозможно, так как v_1 по предположению не участвует в базисном выражении σ_2 , а второе невозможно, так как $l(x_\delta v_1)>l(v_1)=l(\sigma)$.

Поэтому из $a\sigma=0$ следует

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n n_i \varphi_n(\varepsilon, k) (b(k)_{\alpha_i}^{\omega v'_1} + b(k)_{y_\varepsilon \alpha_i}^{\omega v'_1}) = 0$$

и согласно Л. 6 получаем, что $a_1=0$. Но $a_1=a\sigma_1$, следовательно $a=0$.

Пусть теперь $\omega=e$.

Если $l(v'_1)=0$, то согласно Л. 1 $b(k)_{\alpha_i}^{v'_1}$ не встречается в базисном разложении $a_1 v'_1$ и, как в предыдущем случае, из $a\sigma=0$ следует что $a=0$.

Действительно, из (1) имеем

$$a\sigma = -a_1 v'_1 + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n n_i \varphi_n(b(k)_{\alpha_i}^l + b(k)_{y_\varepsilon \alpha_i}^l) + a\sigma_2$$

и, применив Л. 6, получим, что $a_1=0$ и следовательно и $a=0$.

Если $l(v'_1) \neq 0$ и $l(v'_1)>m(v'_1)$, то $l(\omega v'_1)=l(v'_1)>m(v'_1)$ и согласно Л. 2 $b(k)_{\alpha_i}^{\omega v'_1}$, $k=1, \dots, n$ не встречаются в базисном выражении $a_1 v'_1$.

Пусть $b(k)_{\alpha_i}^{\omega v}$ встречаются в базисном выражении $a\sigma_2$. Тогда согласно Л. 3 $\sigma_2 = v_2\sigma_3 + \sigma_4$, где $v_2 \in F_1$ и или $v_2 = v'_1$, или $v_2 = x_\delta v'_1$, $\delta = 1, \dots, 2^n$, $\delta \neq \varepsilon$ ($v'_1 = x_\varepsilon^{-1} v''_1$), $\sigma_3 \in Z_+(F_2)$, $\sigma_4 \in Z_+(F)$ и v_2 не встречается в базисном выражении σ_4 .

Так как $v_2 \neq v_1$, из этого следует, что $v_2 = x_\delta v'_1$, $\delta \neq \varepsilon$.

Имеем

$$a\sigma = a_1 v_1 + a(v_2 \sigma_3 + \sigma_4) = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a\sigma_4.$$

Полагаем $a_2 = a\sigma_3 = \sum_{j=1}^M m_j a_{\gamma_j}$ и получаем

$$\begin{aligned} a\sigma = & -a_1 v'_1 - a_2 v'_1 + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^n n_i \varphi_n(\varepsilon, k) (b(k)_{\alpha_i}^{v'_1} + b(k)_{y_\varepsilon \alpha_i}^{v'_1}) + \\ & + \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^n m_j \varphi_n(k, \delta) (b(k)_{\gamma_j}^{v'_1} + b(k)_{y_\delta \gamma_j}^{v'_1}) + a\sigma_4. \end{aligned}$$

Согласно Л. 2 и Л. 3 $b(k)_{\alpha_i}^{v'_1}$ не встречаются в базисном разложении $(a_1 + a_2)v'_1 + a\sigma_4$.

В таком случае из $a\sigma = 0$ следует, что

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n n_i \varphi_n(\varepsilon, k) (b(k)_{\alpha_i}^{v'_1} + b(k)_{y_\varepsilon \alpha_i}^{v'_1}) + \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^n m_j \varphi_n(\delta, k) (b(k)_{\gamma_j}^{v'_1} + b(k)_{y_\delta \gamma_j}^{v'_1}) = 0.$$

Но тогда из Л. 6 следует, что $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ и следовательно $a = 0$.

Пусть теперь $l(v'_1) = m(v'_1) > 0$.

Тогда $v'_1 = x_\delta^{-1} v''_1$ и $\delta \neq \varepsilon$ ($v = x_\varepsilon v'_1 = x_\varepsilon x_\delta^{-1} v''_1$). Согласно Л. 3 $b(k)_{\alpha_i}^{v'_1}$ будут встречаться в базисном выражении $a\sigma_2$ если $\sigma_2 = \sigma_3 v_2 + \sigma_4$, где $v_2 = v'_1$ или $v_2 = x_\delta v'_1$, $\delta = 1, \dots, 2^n$, $\delta \neq \varepsilon$ (если $\delta = \varepsilon \neq \delta$, получим $v_2 = v_1$, что противоречит предположениям).

а) Пусть $v_2 = v'_1$.

Положим, что σ_3 и σ_4 выбраны как в вышеуказанном случае. Имеем

$$a\sigma = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a\sigma_4,$$

где $a_1 = a\sigma_3$ и

$$\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 &= a_1 x_\varepsilon v'_1 + a_2 v'_1 = \\ &= (a_2 - a_1) v'_1 + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n n_i \varphi_n(\varepsilon, k) (b(k)_{\alpha_i}^{v'_1} + b(k)_{y_\varepsilon \alpha_i}^{v'_1}). \end{aligned}$$

Полагаем

$$a_2 - a_1 = a_3 = \sum_{j=1}^M m_j a.$$

Тогда

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = -a_3 v_1'' + \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^n m_j \varphi_n(\delta, k) (b(k)_{\gamma_j}^{v_1'} + b(k)_{y_{\delta} \gamma_j}^{v_1'}) + \\ + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n n_i \varphi_n(\varepsilon, k) (b(k)_{\alpha_i}^{v_1'} + b(k)_{y_{\varepsilon} \alpha_i}^{v_1'}).$$

Так как $m(v_1'') < l(v_1')$, то согласно Л. 2 $b(k)_{\alpha}^{v_1'}$ не встречаются в базисном выражении $a_3 v_1''$. Применив снова Л. 6, получим, что из $a\sigma = 0$ следует $a = 0$.

б) Пусть $v_2 = x_{\varrho} v_1'$, $\varrho = 1, \dots, 2^n$,

$$\varrho \neq \varepsilon, \quad \varrho \neq \delta, \quad \varepsilon \neq \delta.$$

Имеем $a\sigma = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a\sigma_4$. Полагаем $a_2 = a\sigma_3 = \sum_{j=1}^M m_j a_{\gamma_j}$. Тогда

$$a\sigma = -a_1 v_1' + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n n_i \varphi_n(\varepsilon, k) (b(k)_{\alpha_i}^{v_1'} + b(k)_{y_{\varepsilon} \alpha_i}^{v_1'}) - \\ - a_2 v_1' + \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^n m_j \varphi_n(\varrho, k) (b(k)_{\gamma_j}^{v_1'} - b(k)_{y_{\varrho} \gamma_j}^{v_1'}) + a\sigma_4 = \\ = (a_1 + a_2) v_1'' + a\sigma_4 + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n n_i \varphi_n(\delta, k) (b(k)_{\alpha_i}^{v_1'} + b(k)_{y_{\delta} \alpha_i}^{v_1'}) + \\ + \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^n m_j \varphi_n(\delta, k) (b(k)_{\gamma_j}^{v_1'} + b(k)_{y_{\delta} \gamma_j}^{v_1'}) + \\ + \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^n m_j \varphi_n(\varepsilon, k) (b(k)_{\alpha_i}^{v_1'} + b(k)_{y_{\varepsilon} \alpha_i}^{v_1'}) + \\ + \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^n m_j \varphi_n(\varrho, k) (b(k)_{\gamma_j}^{v_1'} + b(k)_{y_{\varrho} \gamma_j}^{v_1'}).$$

Теперь уже $m(v_1'') < l(v_1')$ и согласно Л. 2 $b(k)_{\alpha}^{v_1'}$ не встречаются в базисном выражении $(a_1 + a_2) v_1''$. По предположению v_1' не встречается в базисном выражении σ_4 . Следовательно сумма последних четырех слагаемых равна нулю и так как $\delta \neq \varrho \neq \varepsilon$, то и сумма последних двух слагаемых равна нулю. Если допустим противное, то после приведения останется базисный элемент вида $b(k)_{\alpha}^{v_1'}$, который не сократится с соответствующим элементом из других слагаемых, поскольку $\varepsilon \neq \varrho$ и $\delta \neq \varrho$. (Делаются рассуждения, аналогичные примененным при доказательстве Л. 6.) Тогда не будет справедливо утверждение, что сумма последних четырех слагаемых равна нулю. Применив Л. 6 для последних двух слагаемых, получим, что $a_1 = a_2 = 0$ и следовательно $a = 0$.

Этим первый случай полностью рассмотрен.

2) Пусть теперь $q \in M$, $q = a + b$

$$a \in A, \quad b \in B, \quad b = \sum_{i=1}^n b_i, \quad b \in B_i$$

($B_i = \langle b(i)_{\alpha}^{\beta} \rangle$) и хотя бы одно $b_i \neq 0$ (т. е. $b \neq 0$).

Если $l(\sigma) = 0$, то $q\sigma \neq 0$ только тогда, когда $q \neq 0$ т. е. из $q\sigma = 0$ следует $q = 0$.

Пусть для таких σ , для которых $m(\sigma) + l(\sigma) < L$, строгая изолированность единицы доказана. Рассмотрим σ — такое, для которого $m(\sigma) + l(\sigma) = L$ и $q\sigma = 0$. Найдем q_1 и σ_1 такие, что $m(\sigma_1) + l(\sigma_1) < L$ и $q_1\sigma_1 = 0$ когда $q\sigma = 0$, а $q_1 \neq 0$, тогда и только тогда, когда $q = 0$. Таким образом строгая изолированность единицы в группе G будет полностью доказана.

И так, пусть $\sigma \in Z_+(F)$ и $l(\sigma) > 0$.

Представим σ в виде $\sigma = v_1\sigma_1 + \sigma_2$, где $v_1 \in F_1$, $m(v_1) = m(\sigma)$, $\sigma_1 \in Z_+(F_2)$, $\sigma_2 \in Z_+(F)$ и v_1 не встречается в базисном выражении σ_2 .

Ненулевое слагаемое b $q = a + b$ представим в виде

$$b = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n n_{ik} b(k)_{\alpha_{ik}}^{\beta_{1k}} + b_2$$

так, чтобы $b(k)_{\alpha_{ik}}^{\beta_{1k}}$ не встречалось в базисном выражении b_2 , и $l(\beta_{1k}) \geq l(\beta_{jk})$, $k = 1, \dots, n$ для всех β_{jk} , для которых $b(k)_{\alpha}^{\beta_{jk}}$ встречается в базисном выражении b_2 .

Пусть для определенности $\alpha_{ik} > \alpha_{ik}$ для $i = 2, \dots, N$, $k = 1, \dots, n$ и $n_{ik} \neq 0$.

Представим σ_1 в виде

$$\sigma_1 = p_1 u_1 + \dots + p_T u_T,$$

так, что $u_1 > u_t$ для $t = 2, \dots, T$, $p_1 > 0$.

Рассмотрим два случая:

а) $v_1 = x_{\varepsilon} v'_1$, $\varepsilon = 1, \dots, 2^n$.

В этом случае $l(v_1) = l(\sigma) = m(\sigma) + 1$. Если $l(\beta_{1k} v_1) = l(\beta_{1k}) + l(v_1)$ для некоторого k , то, имея ввиду, что $l(\beta_{1k}) \geq l(\beta_{jk})$ и $l(v_1) \geq l(v_s)$ для всех β_{jk} таких, что $b(k)_{\alpha}^{\beta_{jk}}$ встречается в базисном выражении b и для всех v_s из базисного разложения σ , применим Л. 5, можем в разложении $b\sigma$ найти базисный элемент $b(k)_{\alpha}^{\beta_{1k} v_1}$ с отличным от нуля коэффициентом.

С другой стороны имеем

$$l(\beta_{1k} v_1) = l(\beta_{1k}) + l(v_1) = l(\beta_{1k}) + m(v_1) + 1 > m(\sigma)$$

и согласно Л. 2 $b(k)_{\alpha}^{\beta_{1k} v_1}$ не будет встречаться и в базисном выражении $a\sigma$. Так как оно не встречается и в b_i , $i \neq k$, то $(a+b)\sigma \neq 0$.

Полученное противоречие условию показывает, что $l(\beta_{1k} v_1) < l(\beta_{1k}) + l(v_1)$ для всех $k = 1, \dots, n$ т. е. $\beta_{1k} = \beta'_{1k} x_{\varepsilon}^{-1}$ и следовательно $l(\beta_{1k}) > 0$.

Покажем, что для произвольного элемента $b(k)_{\alpha}^{\beta_{1k}}$ из базисного выражения b , такого, что $l(\beta_{1k}) = l(\beta_{1k})$ и для произвольного v_s из разложения σ , такого, что $l(v_s) = l(v_1)$ должно быть также выполнено $l(\beta_{1k} v_s) < l(\beta_{1k}) + l(v_s)$, так как в противном случае будут налицо условия из Л. 5 и в базисном выра-

жении $b\sigma$ будет участвовать базисный элемент $b(k)\alpha^{\beta_{ik}v_s}$ с отличным от нуля коэффициентом. Этот элемент, однако, не будет встречаться в базисном выражении $a\sigma$ согласно Л. 2 и тогда $(a+b)\sigma \neq 0$. Поэтому для всех таких β_{ik} и v_s выполняется

$$l(\beta_{ik}v_s) < l(\beta_{ik}) + l(v_s)$$

и следовательно

$$\beta_{ik} = \beta'_{ik}x_e^{-1}, v_s = x_e v'_s.$$

Пусть в базисном выражении σ встречается элемент v_r , такой, что $l(v_r) = l(\sigma) - 1$ и $l(v_r) = m(\sigma)$. Для этого элемента снова должно быть выполнено $v_r = x_e v'_r$. В противном случае $l(\beta_{1k}v_r) = l(\beta_{1k}) + l(v_r)$ и

$$(1) \quad l(\beta_{1k}v_r) \geq l(\beta_{1k}v_q)$$

для всех β_{ik} из базисного выражения b и v_q из разложения σ . Действительно $l(\beta_{1k}v_r) \leq l(\beta_{1k}) + l(v_1) - 1$ и если $l(\beta_{ik}) \leq l(\beta_{1k}) - 1$ или $l(v_q) \leq l(v_1) - 1$, то неравенство (1) будет справедливо.

Если же $l(\beta_{ik}) = l(\beta_{1k})$ и $l(v_q) = l(v_1)$, то по доказанному выше будем иметь

$$l(\beta_{ik}v_q) < l(\beta_{ik}) + l(v_q).$$

В таком случае

$$l(\beta_{ik}v_q) \leq l(\beta_{ik}) + l(v_q) - 2 < l(\beta_{1k}) + l(v_1) - 1.$$

Тогда из Л. 5 получаем противоречие. Действительно:

$$l(\beta_{1k}v_r) = l(\beta_{1k}) + l(v_1) - 1 = l(\beta_{1k}) + m(\sigma) > m(\sigma),$$

так как $l(\beta_{1k}) > 0$.

Тогда, согласно Л. 2, $(a+b)\sigma \neq 0$.

Пусть $q_1 = qx_e$, $\sigma_1 = x_e^{-1}\sigma$. Тогда $q_1\sigma_1 = q\sigma = 0$ и $q_1 = 0$ только если $q = 0$, а из условий (они основываются на доказанном о виде β_{ik} и v_s)

$$l(\sigma_1) \leq m(\sigma) < l(\sigma)$$

и

$$m(\sigma_1) < l(\sigma_1) < m(\sigma)$$

следует, что $m(\sigma_1) + l(\sigma_1) < m(\sigma) + l(\sigma) = L$.

б) $v_1 = x_e^{-1}v'_1$.

Пусть снова $\sigma = v_1\sigma_1 + \sigma_2$, где $\sigma_1 \in Z_+(F_2)$, v_1 не встречается в базисном развитии σ_2 и $l(v_1) = m(\sigma)$. Следовательно $m(v_1) = m(\sigma)$.

Покажем, что $l(v_1) = l(\sigma)$.

Если в базисном выражении σ есть какое-то такое v_s , что $l(v_s) > l(v_1)$, то, так как $m(v_s) \leq m(\sigma) = m(v_1) = l(v_1)$, получаем, что $m(v_s) < l(v_s)$ и следовательно $v_s = x_\delta v'_s$, $\delta = 1, \dots, 2^n$. Но, согласно выше рассмотренному случаю, невозможно, чтобы в базисном выражении σ встречался такой элемент v_1 , что

$$l(v_1) = m(\sigma) = l(\sigma) - 1 \quad \text{и} \quad v_1 = x_e^{-1}v'_1.$$

Следовательно $l(v_1) = l(\sigma)$.

Пусть в базисном выражении σ встречается элемент v_s такой, что $l(v_s) = l(v_1) = m(\sigma)$ и $v_s = x_\delta^{-1}v'_s$. Покажем, что $\delta = e$.

Имеем $m(\sigma) = l(\sigma)$ (мы убедились в том, что нет элемента с длиной, большей длины v_1 и, следовательно, $l(\sigma) = l(v_1)$).

Пусть $q = a + b$ и

$$b = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n n_{ik} b(k)_{\alpha_{ik}}^{\beta_{1k}} + b_2.$$

В таком случае, если $l(\beta_{1k} v_1) = l(\beta_{1k}) + l(v_1)$, то

$$l(\beta_{1k}) + l(v_1) \cong l(\beta_{1k}) + l(v_s)$$

для всех β_{1k} , таких, что $b(k)_{\alpha_{ik}}^{\beta_{1k}}$ участвует в базисном выражении b и для всех v_s из разложения $b\sigma$. Тогда согласно Л. 5 в разложении $b\sigma$ найдется элемент $b(k)_{\alpha_{ik}}^{\beta_{1k} v_1}$ с ненулевым коэффициентом. Согласно Л. 2 $b(k)_{\alpha_{ik}}^{\beta_{1k} v_1}$ будет встречаться в базисном разложении $a\sigma$ только если $l(\beta_{1k} v_1) = m(\sigma)$. Но это возможно только если $l(\beta_{1k}) = 0$. Тогда b можно представить в виде

$$b = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n n_{ik} b(k)_{\alpha_{ik}}^e.$$

Пусть $a = p_1 a_{\psi_1} + \dots + p_l a_{\psi_l}$, $\psi_1 > \psi_j$, $j = 2, \dots, l$. Если использовать Л. 4, можно найти в разложении $a\sigma$ базисный элемент $b(k)_{\alpha_{\psi_1 u_1}}^{\psi_1}$ с отличным от нуля коэффициентом.

Согласно Л. 5 можем найти в разложении $a\sigma$ базисный элемент $b(k)_{\alpha_{\psi_1 u_1}}^{\psi_1}$ с отличным от нуля коэффициентом, но тогда $(a+b)\sigma = 0$ только если $y_e \psi_1 u_1 = \psi_1 u_1$ т. е. $\alpha_{1k} = y_e \psi_1$.

Представим σ в виде $\sigma = \sigma_3 v_s + \sigma_4$, где $v_s = x_\delta^{-1} v'_s$ и $l(v_s) = m(\sigma)$. Используя снова Л. 4 и Л. 5, получим, что $\alpha_{1k} = y_\delta \psi_1$ и, следовательно, $\varepsilon = \delta$.

Пусть теперь $l(v_s) = m(\sigma)$, но $v_s = x_\delta v'_s$, $\delta = 1, \dots, 2^n$.

Тогда из Л. 5 следует, что в базисном выражении $b\sigma$ встречается $b(k)_{\alpha}^{\psi_s}$. Согласно Л. 3 $b(k)_{\alpha}^{\psi_s}$ будет встречаться в базисном выражении $a\sigma$ только если в разложении σ найдется такой элемент v_r , что $v_r = x_\xi v'_s$, $\xi = 1, \dots, 2^n$, а это невозможно, так как в таком случае будем иметь $l(v_r) > l(\sigma)$.

Остается рассмотреть случай

$$l(\beta_{1k} v_1) < l(\beta_{1k}) + l(v_1).$$

Но тогда $\beta_{1k} = \beta' x_e$. Если в разложении σ найдется элемент v_r , такой, что $v_r = x_\delta^{-1} v'_r$; $\varepsilon \neq \delta$ и $l(v_r) = m(\sigma)$, то $l(\beta_{1k} v_r) = l(\beta_{1k}) + l(v_r)$ и $l(\beta_{1k} v_r) \cong l(\beta_{1k} v_e)$ для всех β_{1k} , таких, что $b(k)_{\alpha}^{\beta_{1k}}$ будет из разложения b и v_e из разложения σ . Согласно Л. 5 $b(k)_{\alpha}^{\beta_{1k} v_r}$ встретится в разложении $b\sigma$ с отличным от нуля коэффициентом, но не встретится в разложении $a\sigma$, так как $l(\beta_{1k} v_r) > m(\sigma)$ (Л. 2).

Следовательно можем положить $q_1 = q x_e^{-1}$ и $\sigma_1 = x_e \sigma$. Тогда $l(\sigma_1) + m(\sigma_1) < l(\sigma) + m(\sigma) = L$.

Этим строгая изолированность единицы в группе G доказана. Этот факт означает, что в G выполняется условие Фукса для $n=1$.

Установим, что условие Фукса выполняется и для всех натуральных чисел, не превышающих n . И так как M является абелевой группой без кручения, причем строго изолированной в G и F свободная группа с конечным числом образующих, то утверждение будет иметь следующий вид:

Для произвольно выбранных $m_1, \dots, M_s \in M$, $m_i \neq 0$ существует набор $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, \dots, s$, $s \leq n$, такой, что при любых $\sigma_1, \dots, \sigma_s \in \mathbb{Z}_+(F)$, $\sigma_i \neq e$ выполняется $\varepsilon_1 m_1 \sigma_1 + \dots + \varepsilon_s m_s \sigma_s \neq 0$. Так как

$$m_i = a_i + \sum_{k=1}^n b_{ki}, \quad a_i \in A,$$

$$b_{ki} = \sum_{t=1}^{N_{ki}} \sum_{j=1}^{M_{ki}} b(k)_{\alpha_t}^{\beta_j},$$

и $i = 1, \dots, s \leq n$, то, на основании доказательства утверждения относительно $i = 1$, все возможные случаи сводятся к

$$\varepsilon_1 a_1 \sigma_1 + \dots + \varepsilon_s a_s \sigma_s,$$

и

$$\varepsilon_k b_{k1} \sigma_1 + \dots + \varepsilon_s b_{ks} \sigma_s, \quad k = 1, \dots, n$$

Сначала рассмотрим случай

$$\varepsilon_1 a_1 \sigma_1 + \dots + \varepsilon_s a_s \sigma_s,$$

где

$$a_i = n_{i1} a_{\alpha_{i1}} + \dots + n_{iN_i} a_{\alpha_{iN_i}}$$

и для определенности

$$\alpha_{i1} > \alpha_{1j_1}$$

(1')

$$i = 1, \dots, s, j_i = 2, \dots, N_i$$

и

$$\sigma_i = p_{i1} u_{i1} v_{i1} + \dots + p_{ir_i} u_{ir_i} v_{ir_i}$$

и снова для определенности

(2)

$$u_{i1} > u_{i\delta_i}$$

$$i = 1, \dots, s', \quad \delta_i = 2, \dots, r_i.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 a_1 \sigma_1 + \dots + \varepsilon_s a_s \sigma_s &= \sum_{i=1}^s \varepsilon_i (n_{i1} a_{\alpha_{i1}} + a'_i) (p_{i1} u_{i1} v_{i1} + \sigma'_i) = \\ &= \sum_{i=1}^s (\varepsilon_i n_{i1} p_{i1} a_{\alpha_{i1}} v_{i1} + \varepsilon_i a'_i \sigma_1 + \varepsilon_i a_i \sigma'_i) = \\ &= \sum_{i=1}^s (\varepsilon_i n_{i1} p_{i1} a_{\alpha_{i1}} u_{i1} v_{i1} + \varepsilon_i \sum_{j=2}^{N_i} n_{ij} a_{\alpha_{ij}} \sum_{q=1}^{r_i} p_{iq} u_{iq} v_{iq} + \\ &\quad + \varepsilon_i \sum_{j=1}^{N_i} \sum_{q=2}^{r_i} n_{ij} a_{\alpha_{ij}} p_{iq} u_{iq} v_{iq}) = \\ &= \sum_{i=1}^s (\varepsilon_i n_{i1} p_{i1} u_{i1} v_{i1} + \varepsilon_i \sum_{j=2}^{N_i} \sum_{q=1}^{r_i} n_{ij} p_{iq} a_{\alpha_{ij}} u_{iq} v_{iq} + \\ &\quad + \varepsilon_i \sum_{j=1}^{N_i} \sum_{q=2}^{r_i} n_{ij} p_{iq} a_{\alpha_{ij}} u_{iq} v_{iq}) \end{aligned}$$

Из неравенств (1') и (2) ясно, что

$$\alpha_{i1} u_{i1} < \alpha_{ij} u_{i1} \quad \text{для } j = 2, \dots, N_i;$$

$$\alpha_{i1} u_{i1} < \alpha_{ij} u_{iq} \quad \text{для } j = 1, \dots, N_i$$

и $q = 1, \dots, r_i$.

Если $\alpha_{i1} u_{i1} \neq \alpha_{k1} u_{k1}$; $i = 1, \dots, s$, $k = 1, \dots, s$, $i \neq k$, то независимо от выбора $\varepsilon_i = \pm 1$ будем иметь

$$\sum_{i=1}^s \varepsilon_i a_i \sigma_i \neq 0.$$

Если для некоторого $i \neq k$ имеем

$$\alpha_{i11} u_{i11} = \alpha_{ik1} u_{ik1}, \quad 2 \leq k \leq s,$$

то ε_{i1} и ε_{ik} выбираем так, чтобы $\varepsilon_{i1} n_{i11}$ и $\varepsilon_{ik} n_{ik1}$ имели одинаковые знаки. Тогда при любых $\sigma_i \in \mathbb{Z}_+(F)$ будем иметь

$$\sum_{i=1}^s \varepsilon_i a_i \sigma_i \neq 0.$$

Рассмотрим случай

$$\sum_{i=1}^s \varepsilon_i b_{ki} \sigma_i,$$

где

$$b_{ki} = \sum_{\delta_i=1}^{N_i} \sum_{q_i=1}^{M_i} n_{q_i \delta_i}^i b(k)_{\alpha_i \delta_i}^{\beta_i q_i} = n_{11}^i b(k)_{\alpha_{i1}}^{\beta_{i1}} + b'_{ki},$$

$$\sigma_i = p_{i1} u_{i1} v_{i1} + \dots + p_{ir_i} u_{ir_i} v_{ir_i} = p_{i1} u_{i1} v_{i1} + \sigma'_i.$$

Имеем

$$\sum_{i=1}^s \varepsilon_i b_{ki} \sigma_i = \sum_{i=1}^s (\varepsilon_i n_{11}^i b(k)_{\alpha_{i1}}^{\beta_{i1}} + b'_{ki})(p_{i1} u_{i1} v_{i1} + \sigma'_i) = \sum_{i=1}^s \varepsilon_i n_{11}^i p_{i1} b(k)_{\alpha_{i1} u_{i1}}^{\beta_{i1} v_{i1}} + b''.$$

В базисном выражении b'' будут участвовать элементы вида

$$b(k)_{\alpha_i \delta_i u_{i\gamma_i}}^{\beta_i \delta_i v_{i\gamma_i}},$$

где хотя бы один из индексов q_i , δ_i , γ_i больше 1.

В таком случае

$$\alpha_{i1} u_{i1} > \alpha_{iq_i} u_{i\gamma_i}$$

или

$$\beta_{i1} v_{i1} < \beta_{i\delta_i} v_{i\gamma_i}.$$

(О последнем соотношении будем считать, что в группе F_1 введен линейный порядок, при котором $x_i > l$, $i = 1, \dots, 2^n$.)

Если $\alpha_{i1}u_{i1} \neq \alpha_{k1}u_{k1}$ или же $\beta_{i1}v_{i1} \neq \beta_{k1}v_{k1}$ при $i \neq k$, $i=1, \dots, s$, $k=1, \dots, s$, то при любом выборе $\varepsilon_i = \pm 1$, $i=1, \dots, n$ будем иметь

$$\sum_{i=1}^s \varepsilon_i b_{ki} \sigma_i \neq 0.$$

Если $\alpha_{i1}u_{i1} = \dots = \alpha_{ik1}u_{ik1}$ и $\beta_{i1}v_{i1} = \dots = \beta_{ik1}v_{ik1}$, то $\varepsilon_{i1}, \dots, \varepsilon_{ik}$ выбираем так, чтобы $\varepsilon_{i1}n_{11}^{i1}, \dots, \varepsilon_{ik}n_{11}^{ik}$ имели одинаковые знаки. Тогда

$$\sum_{i=1}^s \varepsilon_i b_{ki} \sigma_i \neq 0$$

при любом выборе $\sigma_i \in \mathbb{Z}_+(F)$.

Теорема. *Группа G неупорядочиваемая группа.*

Доказательство: Допустим противное пусть группа G имеет линейный порядок p и для определенности $a_e \in p$ (если $a_e \notin p$ будем рассматривать противоположный p порядок). Каждому из базисных элементов $b(k)_i^e$ соответствует целое число $\varepsilon_k = \pm 1$ такое, что

$$\varepsilon_k b(k)_e^e \notin p.$$

Рассмотрим упорядоченную n -торку $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Из свойств функции $\varphi_n(i, k)$ следует, что для некоторого $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq 2^n$ обе n -торки $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ и $(\varphi_n(i, 1), \dots, \varphi_n(i, n))$ совпадают. Для этого значения i непосредственно из способа задания действия F над M следует равенство

$$a_e + a_e x_i = \sum_{k=1}^n \varphi_n(i, k) (b(k)_e^e + b(k)_e^e \cdot y_i) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_k (b(k)_e^e + b(k)_e^e y_i).$$

Тогда

$$0 = a_e - a_e x_i + \sum_{k=1}^n (-\varepsilon_k) (b(k)_e^e + b(k)_e^e \cdot y_i) \in p$$

— противоречие, из которого следует справедливость теоремы.

Непосредственно из приведенного доказательства видно, что в группе G существуют $n+1$ неединичных поражающих элементов, относительно которых условие Фукса не выполняется, поскольку для произвольных s элементов $s=1, \dots, n$ оно выполнено.

Литература

- [1] Л. Фукс, Частично упорядоченные алгебраические системы. М., Мир, 1965.
- [2] В. В. Блудов, Пример неупорядочиваемой группы со строго изолированными единицей. *Алгебра и логика*, 11 (1972), 619—632.
- [3] А. И. Кокорин, В. М., Копытов, Линейно упорядоченные группы, М., Наука, 1972.
- [4] Коуровская тетрадь, 1, 47, Новосибирск, 1969.
- [5] С. А. Тодоринов, Н. Л. Петрова, Върху една теорема на Фукс, Годишник на висшето учебно заведение, *Приложна математика*, т. 18, (1982).

(Поступило 8. XI. 1985 г.)