

Аналог теоремы Лагранжа для локально циклических модулей над кольцом нормирования

К. БУЗАШИ (Дебрецен) и Н. И. ВИШНЯКОВА (Харьков)

К пятидесятилетию юбилею профессора Золтана Дароци

Кольцом нормирования называется ненулевое коммутативное кольцо с единицей, идеалы которого образуют цепь.

В дальнейшем буква R везде обозначает кольцо нормирования, а I — его максимальный идеал.

Ненулевой R -модуль M назовем локально циклическим, если любой его конечно порожденный подмодуль цикличесен.

В настоящей работе доказывается теорема, являющаяся аналогом теоремы Лагранжа для конечных групп. Формулировка теоремы опубликована в [1].

В дальнейшем будем пользоваться следующими определениями и обозначениями:

Будем говорить, что ненулевые идеалы $I, J \subset R$ принадлежат к одному классу, если существуют такие элементы $a, b \in R$, что $aI = bJ \neq 0$.

Легко видеть, что множество всех ненулевых идеалов кольца R распадается на непересекающиеся подмножества, каждое из которых образует класс. Введем дополнительное соглашение, что нулевой идеал образует также класс идеалов, если R — целостное кольцо. Если R — нецелостное кольцо, то ненулевые аннуляторы его элементов принадлежат к одному классу. Условимся считать, что идеал 0 также лежит в этом классе.

Стабилизатором идеала $I \neq 0$ кольца R (обозначение: $S(I)$) будем называть совокупность всех элементов $a \in R$, для которых $aI = I$. Очевидно, $S(I)$ — подполугруппа мультипликативной полугруппы кольца R , причем $0 \notin S(I)$.

Пусть P — простой идеал кольца R . Идеал $I \subset R, I \neq 0$ назовем P -чистым, если $S(I) \subseteq S(P)$. В [2] доказано, что это эквивалентно условию $aI = I$ для всех $a \notin P$. Ясно, что каждый P -чистый идеал I содержится в идеале P . Если $a \in P, a \neq 0$, то P -главным идеалом, порожденным элементом a (обозначение: $(a)_P$) будем называть объединение всех главных идеалов $\tau^{-1}(a)$, где τ пробегает все элементы из $S(P) = R \setminus P$. Очевидно, идеал $(a)_P$ является пересечением всех P -чистых идеалов, содержащих элемент a , а каждый P -чистый идеал есть объединение P -главных идеалов.

Каждый ненулевой идеал I кольца R и любой фактор-модуль I/J (I, J — идеалы $R, I \supset J$) локально циклические модули над R .

Легко видеть, что R -модуль M локально циклический тогда и только тогда, когда M можно представить в виде объединения циклических подмодулей $M = \bigcup_{\alpha} (x_{\alpha})$, где индекс α пробегает некоторое вполне упорядоченное множество и $(x_{\alpha}) \supset (x_{\beta})$ при $\alpha > \beta$.

Пусть M — локально циклический модуль. Введем для M следующие обозначения: $I = I(u)$ — аннулятор ненулевого элемента $u \in M$; $H = H(u) = \{\lambda \in R \mid \lambda x = u; x \in M\}$; $W = W(u) = \bigcap (\lambda), \lambda \in H(u)$ — высота элемента u в M .

Легко показать, что множество $H(u)$ наряду с каждым элементом λ содержит все его делители. Отсюда сразу следует.

Лемма 1. Если модуль M нециклический, то $H(u) = R \setminus W(u)$. Если M — циклический модуль, то $W(u) = (\mu)$ — главный идеал кольца R , а множество $H(u)$ состоит из всех делителей элемента μ .

Замечание. Пусть M — локально циклический модуль, $u \in M$, $u \neq 0$. Если $\lambda x = \lambda y = u$ ($x, y \in M$), то $y = \theta x$, где θ — обратимый элемент R .

В самом деле, предположим, что имеет место строгое включение $(x) \subset (y)$. Тогда $x = \gamma y$, где $\gamma \in V$. Имеем $\lambda \gamma y = \lambda y = u$, откуда $\lambda(1 - \gamma)y = 0$, что ведет к противоречию, ибо $(1 - \gamma) \in R$ — обратимый элемент.

Укажем ряд инвариантов локально циклического модуля.

Аннуляторы всех ненулевых элементов модуля M принадлежат одному классу идеалов. Действительно, пусть $a, b \in M$; $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $a = \mu b$. Если $\text{Ann } b \neq 0$, то $\text{Ann } b = \mu \text{Ann } a$. Если же $\text{Ann } b = 0$, то $\text{Ann } a = \text{Ann } \mu$. Значит, $\text{Ann } a$ и $\text{Ann } b$ лежат в одном классе идеалов. Итак, первый естественный инвариант локально циклического модуля: класс аннуляторов его ненулевых элементов.

Вторым очевидным инвариантом локально циклического модуля, как и любого R -модуля, является его аннулятор.

Наконец высоты всех элементов локально циклического модуля M также принадлежат к одному классу идеалов. Это вытекает из равенства

$$(1) \quad \mu \bigcap_i (\lambda_i) = \bigcap_i (\mu \lambda_i).$$

Докажем эту формулу. Ясно, что

$$(2) \quad \mu \bigcap_i (\lambda_i) \subseteq \bigcap_i (\mu \lambda_i).$$

Если правая часть (2) равна нулю, то сразу получаем (1). Пусть теперь $\bigcap_i (\mu \lambda_i) \neq 0$ и $y \in \bigcap_i (\mu \lambda_i)$; $y \neq 0$. Тогда

$$(3) \quad y = \delta_i \mu \lambda_i.$$

Так как μ делит y , то имеет место равенство

$$(4) \quad y = \mu s,$$

где s фиксированный элемент R . Сравнивая (3) и (4), по замечанию к лемме 1 получаем, что $s = \theta_i \delta_i \lambda_i$, где θ_i — единицы в R . Значит, $s \in \bigcap_i (\lambda_i)$, откуда $\mu \bigcap_i (\lambda_i) \supseteq \bigcap_i (\mu \lambda_i)$, а это доказывает формулу (1).

Пусть теперь a, b — два ненулевых элемента локально циклического модуля M , $a = \mu b$. $W(b) = \cap (\lambda_x)$, где $\lambda_x x = b$, $x \in M$. Тогда $a = \mu \lambda_x x$ и $W(a) = \cap (\mu \lambda_x) = \mu \cap (\lambda_x) = \mu W(b)$ на основании формулы (1). Значит, $W(a)$ и $W(b)$ лежат в одном классе идеалов.

Итак, если $a, b \in M$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $a = \mu b$, то

$$(5) \quad \text{Ann } b = \mu \text{Ann } a,$$

$$(6) \quad W(a) = \mu W(b).$$

Из (5) и (6) легко получить, что произведение высоты любого ненулевого элемента $u \in M$ на его аннулятор не зависит от выбора элемента u , то есть это произведение однозначно определяется модулем M .

Докажем более сильное утверждение, которое можно назвать теоремой Лагранжа для локально циклических модулей. Предварительно введем еще один инвариант локально циклического модуля M .

Пусть $I = I(u)$ — ненулевой аннулятор элемента $u \in M$; $u \neq 0$ и пусть $P = P(I) = R \setminus S(I)$. В [2] показано, что стабилизатор $S(I)$ есть инвариант класса идеалов, следовательно, идеал P один и тот же для всех элементов $u \neq 0$ с ненулевыми аннуляторами. Будем обозначать P через $P(M)$.

Теорема 1. Пусть M — локально циклический модуль, $C = \text{Ann } M$ и $P = P(M)$, если M модуль с кручением. Пусть $u \neq 0$ — произвольный элемент модуля M , $I = \text{Ann } u$, $W = W(u)$. Одновременно для всех элементов $u \in M$, $u \neq 0$ произведение $IW = C$ или $IW = PC$. Если идеал C есть P -главный, а идеал I не P -главный, или если идеалы C и I являются P -главными, но W лежит в одном классе с P , то $IW = PC$. В остальных случаях $IW = C$.

Доказательство. Ясно, что $I \supseteq C$. Докажем включение $IW \subseteq C$. Пусть $x \in M$. Если $x \in (u)$, то $IWx = 0$. Пусть $x \notin (u)$. Тогда $\lambda_x x = u$, $\lambda_x \in H(u)$. Если $\alpha \in IW$, то $\alpha = \beta\gamma$ (см. [2]), где $\beta \in I$, $\gamma \in W$. Но $\gamma \equiv 0 \pmod{\lambda_x}$ и поэтому $\alpha x = \beta \lambda_x \mu_x x = \beta(\mu_x u) = 0$. Итак,

$$(7) \quad IW \subseteq C \subseteq I.$$

Если $C = 0$, то в силу (7) $IW = 0$. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что $C \neq 0$. Ввиду (5) имеет место формула

$$(8) \quad C = \bigcap_{\lambda \in H(u)} I\lambda.$$

Из (8) сразу следует, что

$$(9) \quad S(I) \subseteq S(C),$$

то есть идеал C является P -чистым.

Для циклического модуля M теорема тривиальным образом справедлива. Будем далее считать, что модуль M не циклический. Заметим, что равенство $C = I$ имеет место тогда и только тогда, когда $W \supseteq P$. Действительно, если $W \supseteq P$ и $\alpha x = u$, то $\alpha \in H(u) = R \setminus W \subseteq S(P) = S(I)$ (см. [2]). Тогда $\text{Ann } x = \alpha I = I$. Наоборот, если $C = I$, то $\text{Ann } x = I$, то есть $\alpha I = I$, откуда $\alpha \in S(I)$. Значит $W = \bigcap_{\alpha \in H(u)} (\alpha) \supseteq \bigcap_{\lambda \in S(I)} (\lambda) = P$.

Предположим теперь, что C и I суть P -главные идеалы, а $W \neq 0$ лежит в одном классе с P . Тогда $W = \lambda P$, ибо $\frac{P}{\gamma} = P$ при $\gamma \notin P$. Так как $\lambda \notin W$, то $\lambda x = u$ для некоторого $x \in M$ и $W(x) = P$. Полагая $u = x$, можно теперь считать $\text{Ann } M = \text{Ann } u = I$ и $W(u) = P$. Если идеал P не является P -главным, то равенство $C = IW = IP$ невозможно, ибо идеал IP максимальный P -чистый идеал в P -главном идеале $I = C$. Пусть идеал P есть P -главный. Так как все P -главные идеалы лежат в одном классе (см. доказательство леммы 8 в [2]), то $I = \mu P$. Тогда $IW = \mu PP = \mu P^2 \neq \mu P = I = \text{Ann } M$, ибо для P -главного идеала имеет место строгое включение $P^2 \subset P$. Итак, если C и I являются P -главными идеалами, а $W \neq 0$ лежит в одном классе с P , то $IW \neq C$.

Пусть C' обозначает идеал C , если C не P -главный идеал, или если C и I суть P -главные идеалы, а W не лежит в одном классе с P , и пусть C' обозначает идеал PC , если C есть P -главный идеал, а I не P -главный идеал, или если C и I суть P -главные идеалы, а W лежит в одном классе с P .

В [2] доказана следующая теорема: Пусть I, J — ненулевые идеалы кольца R , $I \subseteq J$ и $P = P(J)$. Равенство $I = JL$, где L — некоторый идеал кольца R , выполняется тогда и только тогда, когда I есть P -чистый идеал, и при этом J является P -главным идеалом, если I есть P -главный идеал.

Используя предыдущие рассуждение, формулу (7) и эту теорему, имеем

$$(10) \quad IW \subseteq C' \subseteq I$$

и $C' = IL$, где L — идеал в R . Если $L \subseteq W$, то в силу (10) $C' = IW$. Предположим, что $L \not\subseteq W$. Так как W не является идеалом вида aV , $a \neq 0$, то существует элемент α такой, что $W \subset (\alpha) \subset L$ (см. [2]). Имеем $I\alpha = C$.

С другой стороны, из того, что $\alpha \in H(u) = R \setminus W$, следует, что $I\alpha$ есть аннулятор элемента $x \in M$, $\alpha x = u$. Значит $C = I\alpha$. Возьмем в качестве элемента u элемент x и снова обозначим $\text{Ann } x$ через I , а $W(x)$ через W . Тогда по доказанному $W \supseteq P$. Следовательно, $IW \supseteq IP$. Но в силу определения идеала C' во всех случаях

$$(11) \quad IP = C'.$$

Из (10) и (11) получаем $IW = C'$. Теорема доказана.

Литература

- [1] Н. И. Вишнякова и С. Д. Берман, О модулях над ненётеровыми кольцами нормирования. Доклады АН Армянской ССР, 60 № 3 (1975), 144—148.
- [2] С. Д. Берман и Н. И. Вишнякова, О мультипликативной полугруппе идеалов кольца нормирования. Publ. Math. Debrecen, 29 (1982), 171—176.

(Поступило 1. X. 1986 г.)