

Существование нормальных делителей у конечной группы

Я. Г. БЕРКОВИЧ (Ростов-на Дону)

Памяти проф. К. Бузаши

§ 1. Введение

Пусть G — (всегда в этой статье конечная) группа; $\text{Irr}(G)$ — множество всех неприводимых комплексных характеров группы G ; $\text{c. d. } G = \{\chi(1) | \chi \in \text{Irr}(G)\}$; $X(G)$ — таблица характеров группы G ; $X_1(G)$ — первый столбец таблицы $X(G)$ (в этом столбце стоят степени неприводимых характеров группы G с соответствующими кратностями). Известно несколько результатов о влиянии $\text{c. d. } G$ на строение группы G . Приведем некоторые из них.

Лемма 1.1. (1) (теорема 6.15 из [1]) (1) Если $n \in \text{c. d. } G$, то n делит $|G:A|$ для любой абелевой нормальной подгруппы A группы G .

(2) Группа G имеет инвариантное абелево p -дополнение тогда и только тогда, когда $\chi(1)$ -степень p для любого нелинейного $\chi \in \text{Irr}(G)$.

(3) Если G разрешима и p не делит $\chi(1)$ для всех $\chi \in \text{Irr}(G)$, то $P \in \text{Syl}_p(G)$ абелева и нормальна в G .

Доказательства (2) и (3) см. в [1] (это теоремы 6.9 и 12.34 соответственно).

В этой статье изучается влияние $\text{c. d. } G$ и $X_1(G)$ на строение G . Тройку групп (G, H, H_0) назовем W -тройкой, если $H_0 \triangleleft H < G$ и $H \cap H^x \leq H_0$ для всех $x \in G - H$.

Лемма 1.2. (первая теорема Виланда [2]). Пусть (G, H, H_0) — W -тройка. Тогда $G_0 = G - \left(\bigcup_{x \in G} (H - H_0)^x \right)$ — нормальная подгруппа в G , $HG_0 = G$ и $H \cap G_0 = H_0$.

Если $H_0 = 1$ в лемме 1.2, то $G = HG_0$ называется группой Фробениуса и обозначается $G = (H, G_0)$, H называется дополнительным множителем, а G_0 — ядром группы Фробениуса G .

В § 2 доказывается обращение теоремы Виланда, а также несколько обращений теоремы Фробениуса. В теореме 2.2 даны короткие доказательства двух других теорем Виланда. Отметим теорему 2.6, из которой следует, что по первому столбцу таблицы характеров группы можно узнать, является ли она группой Фробениуса. В § 3 изучаются группы G_1 , для которых $X_1(G_1) = X_1(G)$ и

G -минимальная ненильпотентная группа или содержит абелеву нормальную подгруппу простого индекса p . В § 4 обобщаются леммы 1.1 (2), (3). В § 5 приводится список нерешенных вопросов.

Введем дополнительные обозначения: $\text{Lin}(G)$ — множество всех линейных (одномерных) характеров в $\text{Irr}(G)$; $\text{Irr}_1(G)$ — множество всех нелинейных характеров в $\text{Irr}(G)$; если $H \leq G$, то $\text{Irr}(G, H) = \{\chi \in \text{Irr}(G) | H \not\leq \ker \chi\}$. Из доказываемой ниже леммы 1.3 следует, что если G неабелева и $1 < H < G$, то $\text{Irr}(G, H) \cap \text{Irr}_1(G)$ непусто. Если N нормальна в G (пишем $N \trianglelefteq G$), то множества $\text{Irr}(G/N)$ и $\{\chi \in \text{Irr}(G) | N \leq \ker \chi\}$ всегда отождествляются. Если $N \trianglelefteq G$, то $N = \bigcap_{\chi \in \text{Irr}(G/N)} \ker \chi$. Этот результат уточняется ниже.

Лемма 1.3. Пусть $N \trianglelefteq G$ и $G' \not\leq N$. Тогда $N = \bigcap_{\chi \in \text{Irr}_1(G/N)} \ker \chi$.

Доказательство. Переходя, если $N > 1$, к G/N , можем, не уменьшая общности считать, что $N = 1$.

Для $\lambda \in \text{Lin}(G)$, $\chi \in \text{Irr}_1(G)$ имеем $\lambda\chi \in \text{Irr}_1(G)$. Поэтому отображение $(\lambda, \chi) \rightarrow \lambda\chi$ из $\text{Lin}(G) \times \text{Irr}_1(G)$ в $\text{Irr}_1(G)$ определяет действие $\text{Lin}(G)$ на $\text{Irr}_1(G)$. Пусть Ω — одна из орбит относительно этого действия, и положим $D = \bigcap_{\chi \in \Omega} \ker \chi$. Допустим, что $D \not\leq G'$. Тогда существуют $\lambda \in \text{Lin}(G)$ и $x \in D - G'$ с $\lambda(x) \neq 1$. Но для этого x и $\chi \in \Omega$ имеем $\chi(x) = \chi(1) \neq 0$. Так как $\lambda\chi \in \Omega$, то $(\lambda\chi)(x) = (\lambda\chi)(1) = \lambda(1)\chi(1) = \chi(1)$. Но из

$$\chi(1) = (\lambda\chi)(x) = \lambda(x)\chi(x) = \lambda(x)\chi(1)$$

следует $(\lambda(x) - 1)\chi(1) = 0$, противоречие. Итак, $D \leq G'$. Тогда $M = \bigcap_{\chi \in \text{Irr}_1(G)} \ker \chi \leq G'$, и $M = M \cap G' = \bigcap_{\chi \in \text{Irr}(G)} \ker \chi = 1$. $\square$

Пусть G -минимальная ненильпотентная группа. Тогда $G = PQ$, $P \in \text{Syl}_p(G)$ циклическая порядка p^a , $Q \in \text{Syl}_q(G)$ нормальна в G . Если $Q \cap Z(G) = 1$, то Q элементарная. Если $Q \cap Z(G) > 1$, то $Q \cap Z(G) = Z(Q)$ и Q специальная (то есть ее центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают). Далее, $|G/Z(G)| = pq^b$, где b -порядок $q \pmod p$. Если $|Q \cap Z(G)| = q^c$, то G называется $S(p^a, q^b, q^c)$ -группой. Отметим, что если b нечетно, то $c = 0$. Если же b четно, то $c \leq \frac{1}{2}b$. Результаты этого абзаца принадлежат О. Ю. Шмидту,

Ю. А. Гольфанду, Л. Редери (эти же результаты без доказательства были сформулированы в известной статье Ф. Холла и Г. Хигмана о p -длине).

§ 2. Обращения теорем Виланда и Фробениуса

1°. Пусть $H < G$ и $H = H_1, H_2, \dots, H_n$ -класс всех сопряженных с H подгрупп группы G , $D_1 = H_1 \cap (H_2 \cup \dots \cup H_n)$, $|G| = g$, $|H| = h$. Очевидно, $H_1 - D_1$ -Т. I. подмножество в $G \cdot D_1$ не обязательно является подгруппой группы H_1 даже в ситуации, рассмотренной в лемме 1.2. Случай $D_1 = H_1$ для нас неинтересен; пусть $D_1 < H_1$, и пусть $D_1 \leq H_0 < H$, $|H_0| = h_0$. Положим $G(H_0) =$

$= G - \left(\bigcup_{x \in G} (H - H_0)^x \right)$, $|G(H_0)| = g_0$. Мы имеем $g_0 = |G(H_0)| = g - n(h - h_0)$. По условию $n = g/hs$ с натуральным s . Вычислим

$$g_0 - \frac{g}{h} h_0 = g - \frac{g}{hs} (h - h_0) - \frac{g}{h} h_0 = g \left(1 - \frac{1}{s} \right) \left(1 - \frac{h_0}{h} \right) \geq 0.$$

Поэтому $g_0 \geq \frac{g}{h} h_0$. Нас интересует случай, когда $G(H_0)$ содержит минимально

возможное число элементов. Тогда $g_0 = \frac{g}{h} h_0$. Это дает $s = 1$, так что $N_G(H) = H$. Очевидно, $G(H_0) \cap H = H_0$; поэтому, если $G(H_0) < G$, то $H_0 < H$ (читается: H_0 -собственная подгруппа группы H). Если $G(H_0) \triangleleft G$, то $H_0 \triangleleft H$. Лемма 1.2 утверждает обратное: если $H_0 \triangleleft H$, то $G(H_0) \triangleleft G$. Мы видим, что между $H_0 \triangleleft H$ и $G(H_0) \triangleleft G$ существует взаимно однозначное соответствие: $H_0 \leftrightarrow G(H_0)$. Неизвестно, будет ли $G(H_0)$ подгруппой, если H_0 -подгруппа в H .

2°. Лемма 2.1. Пусть (G, H, H_0) — W -тройка. Тогда для любого неглавного $\varphi \in \text{Irr}(H/H_0)$ имеем $((\varphi - \varphi(1)1_H)^G)_H = \varphi - \varphi(1)1_H$.

Доказательство. Положим $\mu = \mu(\varphi) = \varphi - \varphi(1)1_H$. Тогда для $x_0 \in H_0$ имеем $\mu(x_0) = 0$. Для $x \in H$ имеем

$$\mu^G(x) = \frac{1}{|H|} \sum_{y \in G} \dot{\mu}(yxy^{-1}),$$

где $\dot{\mu}$ совпадает с μ на H и исчезает на $G - H$. Пусть $\dot{\mu}(yxy^{-1}) \neq 0$. Тогда $yxy^{-1} \notin H_0$ и $yxy^{-1} \in H \cap yHy^{-1}$; поэтому $y \in H$ и $\dot{\mu}(yxy^{-1}) = \mu(yxy^{-1}) = \mu(x)$. Если $x \in H - H_0$, то $yxy^{-1} \notin H_0$ для всех $y \in G$, и мы идем $\mu^G(x) = \mu(x)$. Если же $x \in H_0$, то $yxy^{-1} \in H_0$ или $yxy^{-1} \in G - H$ для $y \in G$, и тогда $\mu^G(x) = 0 = \mu(x)$. $\square$

Теорема 2.2. Пусть $H_0 \triangleleft H \leq N = N_G(H) < G$.

(1) Если для любого неглавного $\varphi \in \text{Irr}(H/H_0)$ имеем $((\varphi - \varphi(1)1_H)^G)_H = \varphi - \varphi(1)1_H$, то (G, H, H_0) — W -тройка.

(2) (вторая теорема Виланда). Пусть $H \cap H^x \leq H_0$ для всех $x \in G - N$ и $N = N_0H$ с $N_0 \triangleleft N$ и $N_0 \cap H = H_0$. Если $(|N:H|, |H:H_0|) = 1$, то (G, N, N_0) — W -тройка.

(3) (третья теорема Виланда) Пусть $H \cap H^x \leq H_0$ для всех $x \in G - N$. Положим $|H:H_0| = j$, $|G| = tj$ и пусть $(t, j) = 1$. Если число решений уравнения $x^t = 1$ в G равно t , то они составляют подгруппу в G .

Доказательство. (1) Для любого неглавного $\varphi \in \text{Irr}(H/H_0)$ положим, как и в доказательстве леммы 2.1, $\mu(\varphi) = \mu = \varphi - \varphi(1)1_H$. По предположению имеем

$$\langle \mu^G, \mu^G \rangle = \langle \mu, (\mu^G)_H \rangle = \langle \mu, \mu \rangle = 1 + \varphi(1)^2,$$

$$\langle \mu^G, 1_G \rangle = \langle \mu, 1_H \rangle = -\varphi(1),$$

так что $\mu^G = \varphi^0 - \varphi(1)1_G$ с $\langle \varphi^0, \varphi^0 \rangle = 1$ и $\langle \varphi^0, 1_G \rangle = 0$. Так как $\varphi^0(h) = \mu^G(h) + \varphi(1) = \mu(h) + \varphi(1) = \varphi(h)$, $h \in H$, и $\varphi^0(1) = \varphi(1) > 0$, то $\varphi^0 \in \text{Irr}(G)$ и φ^0 -продолжение φ на G . Положим $G_0 = \bigcap \ker \varphi^0 \triangleleft G$; здесь φ пробегает все неглавные характеры из $\text{Irr}(H/H_0)$. Если $x \in G_0 \cap H$, то $\varphi(x) = \varphi^0(x) = \varphi^0(1) = \varphi(1)$ и $x \in \ker \varphi$. Итак, $G_0 \cap H \leq H_0$. Так как $H_0 \leq \bigcap \ker \varphi^0 = G_0$, то $G_0 \cap H = H_0$. Положим $1_{H/H_0} \neq \varphi \in \text{Irr}(H/H_0)$, $D = G - \left(\bigcup_{x \in G} (H - H_0)^x \right)$. Так как $\mu^G(y) = \mu(y) = 0$

для всех $y \in H_0$, то μ^G исчезает на D по определению μ^G . Поэтому для $z \in D$ имеем $\varphi^0(z) = \mu^G(z) + \varphi(1) = \varphi(1) = \varphi^0(1)$, так что $z \in \ker \varphi^0$, и ввиду произвола в выборе $z \in D$ имеем $D \leq G_0$. Из рассуждений п. 1° следует, что $|D| \geq \frac{g}{h} h_0$.

Но из $|G_0 H| = \frac{|G_0| \cdot |H|}{|G_0 \cap H|} \geq \frac{|D| \cdot |H|}{|H_0|} \geq \frac{g h_0 h}{h_0 h} = g$ следует $G_0 H = G$, $|G_0| = \frac{g}{h} h_0 \leq |D|$. Вместе с доказанным выше это дает $D = G_0$, $|D| = \frac{g}{h} h_0$. Из 1° следует, что $N_G(H) = H$, $H \cap H^x \leq H_0$, $x \notin H$, $H - H_0$ — Т. I. подмножество в G , так что (G, H, H_0) — W -тройка.

(2) Пусть $x \in G - N$ и x нормализует N . Пусть π -множество всех простых делителей числа $|H:H_0|$, а N^π — подгруппа в N , порожденная всеми ее π -элементами. Тогда $N^\pi \leq H$ (так как $H \trianglelefteq N$ и $|N:H|$ — π' -число), и поэтому $(N^\pi)^\pi = N^\pi$. Поэтому $N^\pi \leq H \cap H^x \leq H_0$, противоречие. Итак, N самонормализуема в G . Пусть $a = a_\pi \cdot a_{\pi'} = a_{\pi'} \cdot a_\pi \in N \cap N^x$ для некоторого $x \in G - N$ (здесь $a_\pi, a_{\pi'}$ — π - и π' -части a соответственно). Тогда $a_\pi \in N^\pi \leq H$, $a_\pi \in (N^\pi)^x \leq H^x$. Это дает $a_\pi \in H \cap H^x \leq H_0 \leq N_0$. Из $a_{\pi'} \in N$ следует $a_{\pi'} \in N^{\pi'} \leq N_0$, и поэтому $a = a_\pi a_{\pi'} \in N_0$. Итак, $N \cap N^x \leq N_0$ и (G, N, N_0) — W -тройка.

(3) Пусть π -множество всех простых делителей числа m , и пусть x — не π -элемент в G . Тогда $x = x_p x_{p'} = x_{p'} x_p$ для $p \in \pi'$. Не уменьшая общности можем считать, что $x_p \in H$ (по теореме Силова). Тогда $x_p \in H \cap H^x$ и $x_p \notin H_0$; поэтому $x \notin N$. Тогда $G(N^\pi) = G - \left(\bigcup_{x \in G} (N - N^\pi)^x \right)$ состоит сплошь из π -элементов. Из рассуждений п. 1° следует $|G(N_0)| \geq |G(N^\pi)| = |G:N| \cdot |N^\pi| \geq |G:N| \cdot |N_0| = m$; здесь N_0 — π -холловская подгруппа в N . Тогда $N_0 \geq H_0$. Поэтому по условию $G(N_0) = G(N^\pi)$ имеет порядок m . Отсюда выводим $N_0 = N^\pi \triangleleft N$, и (3) теперь следует из (2). $\square$

Замечание. 1. Пусть G_0 — построенная в теореме 2.2 (1) подгруппа. Тогда из $x \in G_0 - H_0$ следует $C_G(x) \leq G_0$. Это же верно и в ситуации, рассмотренной в п. 1° при $g_0 = \frac{g}{h} h_0$.

2. Пусть снова (G, H, H_0) — W -тройка, а $G_0 = G(H_0)$. Пусть F -наименьшая нормальная подгруппа группы G , содержащая H_0 . Тогда $F = G_0$ или $G/F = (HF/F, G_0/F)$.

3. Теореме 2.2(1) можно, благодаря лемме 2.1, рассматривать как обращение леммы 1.2.

3°. Пусть $m > 1$ — собственный делитель $|G|$ — порядка группы G . Положим $\text{Irr}(G, m) = \{\chi \in \text{Irr}(G) \mid m \mid \chi(1)\}$, $N^{[m]} = \bigcap \ker \chi$, где χ пробегает все множество $\text{Irr}(G) - \text{Irr}(G, m)$.

Теорема 2.3. Пусть $m > 1$ — собственный делитель $|G|$.

(1) $|G:N^{[m]}| \equiv (m^2, |G|)$, где (a, b) — наибольший общий делитель натуральных чисел a и b .

(2) G — группа Фробениуса с ядром индекса m тогда и только тогда, когда $|G:N^{[m]}| = m$.

Доказательство. Пусть $\text{Irr}(G, m) = \{\chi^1, \dots, \chi^s\}$, $\text{Irr}(G) - \text{Irr}(G, m) = \{\tau^1, \dots, \tau^r\}$. Тогда $a = \sum_{i=1}^s \chi^i(1)^2 \equiv 0 \pmod{m^2}$, так что $a \equiv 0 \pmod{(m^2, |G|)}$. Поэтому

$$b = \sum_{i=1}^r \tau^i(1)^2 = |G| - a \equiv 0 \pmod{(m^2, |G|)}.$$

Из $1_G \notin \text{Irr}(G, m)$ следует $b \equiv (m^2, |G|)$. Так как $|G:N^{[m]}| \equiv b$, это доказывает (1).

Если G — группа Фробениуса с ядром индекса m , то $|G:N^{[m]}| = m$. (см. теорему 6.34 из [1]). Пусть теперь $|G:N^{[m]}| = m$. Тогда из (1) следует $(m^2, |G|) \equiv m$, откуда $(m^2, |G|) = m$, $(m, |G|/m) = 1$ и $N = N^{[m]}$ — холловская подгруппа в G . Возьмем в $\text{Irr}(N)$ неглавный характер φ , и пусть χ — неприводимая компонента индуцированного характера φ^G . По теореме Клиффорда (теорема 6.2 в [1]) $\varphi(1)$ делит $\chi(1)$. Так как $1_N \neq \varphi$ и φ -компонента χ_N , то $N \not\subseteq \ker \chi$, так что m делит $\chi(1)$ по условию. Из $(\varphi(1), m) \equiv (|N|, m) = 1$ следует, что $m\varphi(1) = |G:N|\varphi(1) = \varphi^G(1)$ делит $\chi(1)$. Поэтому $\varphi^G = \chi \in \text{Irr}(G)$ для любого неглавного $\varphi \in \text{Irr}(N)$.

Возьмем $x \in N^\#$ и предположим, что $C_G(x) \not\subseteq N$. Тогда $x^y = x$ для некоторого $y \in C_G(x) - N$. Для $n \in N$ имеем $(x^n)^y = (x^y)^{y^{-1}ny} = x^{y^{-1}ny}$, а так как $y^{-1}ny \in N$, то x и x^{ny} сопряжены в N . Ввиду произвола в выборе $n \in N$ это означает, что y нормализует N -класс, содержащий $x \in N^\#$. Поэтому по лемме Брауэра (теорема 6.32 в [1]) в $\text{Irr}(N)$ имеется неглавный характер φ с $\varphi^y = \varphi$, то есть группа инерции φ в G шире N . Поэтому по теореме 6.11 из [1] характер φ^G приводим. Так как это противоречит доказанному в предыдущем абзаце, $C_G(x) \subseteq N$ для всех $x \in N^\#$, и G -группа Фробениуса с ядром $N = N^{[m]}$. $\square$

Следствие 2.4. Пусть N -подгруппа индекса $m > 1$ в G . Тогда и только тогда G -группа Фробениуса с ядром N , когда m делит $\chi(1)$ для всех $\chi \in \text{Irr}(G, N)$.

Доказательство. Если G -группа Фробениуса с ядром N индекса m , $\text{Irr}(G, N) = \text{Irr}(G, m)$ (это легко усмотреть из доказательства теоремы 2.3(2); см. также теорему 6.34 из [1]). Обратно, пусть m делит $\chi(1)$ для всех $\chi \in \text{Irr}(G, N)$. Но $N \subseteq \bigcap \ker \chi = D \triangleleft G$ (здесь χ пробегает все множество $\text{Irr}(G) - \text{Irr}(G, N)$). Так как $|G:D| \equiv m$ по теореме 2.3(1), это дает $D = N = N^{[m]}$, и результат следует из теоремы 2.3(2). $\square$

Следствие 2.5. Пусть N -подгруппа индекса $m > 1$ в G . Тогда и только тогда G -группа Фробениуса с ядром N , когда $\varphi^G \in \text{Irr}(G)$ для всех неглавных $\varphi \in \text{Irr}(N)$.

Доказательство. Если G -группа Фробениуса с ядром N , результат следует из теоремы 6.34 в [1]. Докажем обратное. Пусть $\chi \in \text{Irr}(G, N)$; тогда χ_N имеет неприводимую компоненту $\varphi \neq 1_N$. По условию $\varphi^G \in \text{Irr}(G)$; поэтому

$\varphi^G = \chi$ и m делит $m\varphi(1) = \varphi^G(1) = \chi(1)$. Результат теперь следует из следствия 2.4. $\square$

Теорема 2.6. (1) Пусть $m > 1$ — собственный делитель $|G|$ и $m = \Sigma \chi(1)^2$, где χ пробегает все множество $\text{Irr}(G) - \text{Irr}(G, m)$. Тогда G — группа Фробениуса с ядром индекса m . Обратное тоже верно.

(2) Пусть $G = (H, N)$ и $X_1(G) = X_1(G_1)$. Тогда $G_1 = (H_1, N_1)$, $X_1(H_1) = X_1(H)$, $X_1(N_1) = X_1(N)$.

Доказательство. (1) По теореме 2.3(1) имеем $m = \Sigma \chi(1)^2 \cong (m^2, |G|)$ (здесь χ пробегает все множество $\text{Irr}(G) - \text{Irr}(G, m)$); поэтому $(m^2, |G|) = m$ и $(m, |G|/m) = 1$. Итак, m -холловский делитель $|G|$. Пусть π -множество всех простых делителей числа $|G|/m$. Для $p \in \pi$ пусть $P \in \text{Syl}_p(G)$. Рассмотрим разложение

$$(1_P)^G = a_1 \chi^1 + \dots + a_s \chi^s + b_1 \tau^1 + \dots + b_k \tau^k,$$

попарно различные $\chi^i \in \text{Irr}(G, m)$, $\tau^i \in \text{Irr}(G) - \text{Irr}(G, m)$. Положим $a = (a_1 \chi^1 + \dots + a_s \chi^s)(1)$, $b = (b_1 \tau^1 + \dots + b_k \tau^k)(1)$. Из $a \equiv 0 \pmod{m}$ и $|G:P| \equiv 0 \pmod{m}$ следует $b \equiv 0 \pmod{m}$. По закону взаимности $b_i \leq \tau_i(1)$. Поэтому

$$b \leq \tau^1(1)^2 + \dots + \tau^k(1)^2 \leq m.$$

Из $1_G \in \{\tau^1, \dots, \tau^k\}$ следует $b > 0$. Поэтому $b = m$. Это дает $b_i = \tau^i(1)$ для всех $i \in \{1, \dots, k\}$. Поэтому $\tau_P^i = b_i 1_P$ и $P \leq \bigcap_{i=1}^k \ker \tau^i = D \triangleleft G$. Так как это верно для

всех $p \in \pi$, то $|G:D|$ делит m . Из $\sum_{i=1}^k \tau^i(1)^2 = m \leq |G:D|$ следует $|G:D| = m$, $N = N^{[m]} = D$. Так как $\text{Irr}(G/N) = \text{Irr}(G) - \text{Irr}(G, m)$, следствие 2.4 дает нужный результат. Обратное утверждение следует из теоремы 6.34 в [1].

(2) Пусть $X_1(G_1) = X_1(G)$, где $G = (H, N)$. Тогда

$$\Sigma \tau^i(1)^2 = \Sigma \chi^i(1)^2 = m,$$

где τ^i пробегает все множество $\text{Irr}(G_1) - \text{Irr}((G_1, m)$, а χ^i пробегает все множество $\text{Irr}(G) - \text{Irr}(G, m)$. Поэтому G_1 -группа Фробениуса по утверждению (1) этой теоремы. Остальные утверждения из (2) следуют из только что доказанного. $\square$

Теорема 2.7. Пусть $1 < N \trianglelefteq H < G$, и пусть степени всех характеров из $\text{Irr}(H/N)$ меньше степеней всех характеров из $\text{Irr}(H, N)$. Если $\varphi_1^G \in \text{Irr}(G)$ для всех $\varphi_1 \in \text{Irr}(H, N)$, то $N \triangleleft G$.

Доказательство. Из леммы 1.3 следует, что $\text{Irr}(H, N)$ непусто. Пусть $\varphi_1 \in \text{Irr}(H, N)$, $\varphi_1^G = \chi \in \text{Irr}(G)$ и

$$(1) \quad \chi_H = a_1 \varphi_1 + \dots + a_k \varphi_k$$

где все $a_i > 0$, попарно различные $\varphi_i \in \text{Irr}(H)$. По закону взаимности $a_1 = 1$.

Пусть $i > 1$. Тогда $|G:H|\varphi_i(1) = \varphi_i^G(1) \cong a_i \chi(1) = a_i |G:H|\varphi_1(1)$, так что $\varphi_i(1) \cong a_i \varphi_1(1)$ и $\varphi_i \in \text{Irr}(H, N)$ по условию. Но тогда $\varphi_i^G \in \text{Irr}(G)$, так что

$a_i = 1$, $\varphi_i^G = \chi$ для всех $i \in \{1, \dots, k\}$. Поэтому разложение (1) принимает вид

$$(2) \quad \chi_H = \varphi_1 + \dots + \varphi_{|G:H|}$$

где попарно различные $\varphi_i \in \text{Irr}(H, N)$.

Если $\psi \in \text{Irr}(H, N) - \{\varphi_1, \dots, \varphi_{|G:H|}\}$, то $\psi^G \in \text{Irr}(G)$, а из (2) следует $\psi^G \neq \chi$. Поэтому $\text{Irr}(H, N) = X_1 \cup \dots \cup X_s$ — разбиение, при этом $X_i = \{\varphi_i^\alpha \mid 1 \leq \alpha \leq |G:H|\}$, $(\varphi_i^\alpha)^G = (\varphi_i^\beta)^G = \chi^i \in \text{Irr}(G)$, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq \alpha \leq |G:H|$, $\beta \leq |G:H|$, характеры $\chi^1, \dots, \chi^s$ непериодичны, $(\varphi_i^\alpha)^G = (\varphi_i^\beta)^G = \chi^i \in \text{Irr}(G)$, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq \alpha \leq |G:H|$, $\beta \leq |G:H|$, характеры $\chi^1, \dots, \chi^s$ неприводимы и попарно различны. Мы имеем

$$(3) \quad |H| - |H:N| = \sum_{i=1}^s \varphi_i^1(1)^2 = |G:H|(\varphi_1^1(1)^2 + \dots + \varphi_s^1(1)^2)$$

$$(4) \quad \chi^1(1)^2 + \dots + \chi^s(1)^2 = |G:H|(\varphi_1^1(1)^2 + \dots + \varphi_s^1(1)^2) = |G| - |G:N|.$$

Из условия, а также из уже доказанного получается, что в разложении τ_H нет характеров из $\text{Irr}(H, N)$, и поэтому $N \leq \ker \tau$ для всех $\tau \in I$. Так как по (4) имеем $\sum_I \tau(1)^2 = |G:N|$, то $N = \bigcap_I \ker \tau \triangleleft G$. $\square$

Так как ядро группы Фробениуса нильпотентно по теореме Томпсона, то в теореме 2.7 всегда $N \neq H$.

Следствие 2.8. Пусть $m > 1$ — собственный делитель $|G|$, а $\text{Irr}(G) = \text{Lin}(G) \cup \text{Irr}(G, m)$. Тогда $|G:G'| \equiv (m^2, |G|)$. Если же $|G:G'| = m$, то G -группа Фробениуса с ядром G' .

§ 3. Решение уравнения $X_1(G) = X_1(G_1)$ для некоторых данных G_1 с несложным строением

1°. Предварительно докажем такой вспомогательный результат.

Лемма 3.1. Пусть $G = S(p^a, q^b, q^c)$ — группа. Тогда $\text{Irr}(G) = M_G(1) \cup \dots \cup M_G(p) \cup M_G(q^{b/2})$, где $M_G(k)$ — множество всех тех $\chi \in \text{Irr}(G)$, для которых $\chi(1) = k$. Более того, $|M_G(1)| = p^a$, $|M_G(p)| = p^{a-2}(q^b - 1)$. Если $c = 0$, то $M_G(q^{b/2})$ пусто. Если $c > 0$, то $|M_G(q^{b/2})| = p^a(q^c - 1)$.

Доказательство. Пусть обозначения приняты такие же, как и в определении $S(p^a, q^b, q^c)$ -группы. Пусть $\chi \in \text{Irr}(G)$. Если $Q \cap Z(G) \leq \ker \chi$, то $\chi(1) = p$ по лемме 1.1(1). Пусть $Q \cap Z(G) \not\leq \ker \chi$. Не уменьшая общности можем положить $\ker \chi = 1$. Тогда $Z(Q)$ циклический. Поэтому и подгруппа $Q \cap Z(G) = Z(Q)$ тоже циклическая. Так как $Z(Q)$ элементарная абелева, то $|Z(Q)| = q$ и Q экстраспециальная. Тогда, как хорошо известно, с. d. $Q = \{1, q^{b/2}\}$. Далее, χ_Q не содержит линейных компонент; поэтому $q^{b/2}$ делит $\chi(1)$ по теореме Клиффорда. Но $\chi(1)^2 \leq |G/Z(G)| = pq^b$, и поэтому $\chi(1) = q^{b/2}$. Остальное очевидно. $\square$

Теорема 3.2. Пусть $G_1 = S(p^a, q^b, q^c)$ и $X_1(G) = X_1(G_1)$. Тогда $G = S(p^a, q^b, q^c) * A$ -центральное произведение. Здесь A -абелева p -группа.

Доказательство. Из $|G_1| = X_1(G_1) \cdot X_1(G_1) = X_1(G) \cdot X_1(G) = |G|$ следует $|G| = |G_1| = p^a q^{b+c}$. Из $|M_{G_1}(1)| = |G_1:G'_1| = |M_G(1)| = |G:G'|$ следует $|G:G'| = p^a$. Пусть $G = PQ$, $P \in \text{Syl}_p(G)$, $Q \in \text{Syl}_q(G)$, $Q = G'$. Пусть Q_0 -наибольшая нор-

мальная подгруппа группы G , собственено содержащаяся в Q . Мы знаем, что $c \leq \frac{1}{2}b$ и b -порядок $q \pmod{p}$. Так как $G' = Q$, это дает $|Q_0| = q^c$ и $PQ_0 = P \times Q_0$ по теореме Силова. Из $G' = Q$ следует, что $\langle P^x | x \in G \rangle = G$; поэтому $Q_0 \leq Z(G)$, и даже $Q_0 = Q \cap Z(G)$. По лемме 1.1(1) и условию имеем с. d. $G/Q_0 = \{1, p\}$. Из результата Айзекса—Пасмана (см. гл. 12 в [1] или [3]) следует, что G/Q_0 содержит абелеву подгруппу A/Q_0 индекса p . Тогда подгруппа A нильпотентная. Отсюда следует, что $|P: P \cap Z(G)| = p$. Пусть H -минимальная ненильпотентная подгруппа в G . Мы покажем, что $H_1 = H(P \cap Z(G)) = G$. Очевидно, $H(P \cap Z(G))Q = G$. Предположим, что $H_1 = H(P \cap Z(G)) < G$. Тогда $Q_0 > 1$ и H_1Q_0/Q_0 имеет силовскую q -подгруппу порядка q^b . Поэтому $p^a || H_1|$, $q^{b+c} || H_1Q_0|$, откуда $H_1Q_0 = G$, $G' < H_1$, что противоречит равенству $G' = Q$. Итак, $G = H_1 = H(P \cap Z(Q))$. $\square$

2°. В этом пункте G_1 -неабелева группа с абелевой нормальной подгруппой индекса p , $X_1(G) = X_1(G_1)$. Тогда с. d. $G = \text{с. d. } G_1 = \{1, p\}$ по лемме 1.1(1). Поэтому по [3] (см. также гл. 12 в [1]) группа G содержит абелеву нормальную подгруппу индекса p или $G|Z(G)$ порядка p^3 и экспоненты p .

Отметим, что если неабелева группа H содержит абелеву нормальную подгруппу индекса p , то $|H| = p|H'| \cdot |Z(H)|$.

Предположим вначале, что G содержит абелеву нормальную подгруппу индекса p . Тогда из $|G| = p|G'| |Z(G)| = |G_1| = p|G| \cdot |Z(G_1)|$ следует $|Z(G)| = |Z(G_1)|$. Обратно, если G содержит абелеву нормальную подгруппу индекса p и $|Z(G)| = |Z(G_1)|$, то $X_1(G) = X_1(G_1)$.

Пусть теперь G не содержит абелеву нормальную подгруппу индекса p . Тогда $G|Z(G)$ порядка p^3 и экспоненты p . Положим $|G| = g$, $|G'| = g'$, $|Z(G)| = z$, $|Z(G_1)| = z_1$. Мы имеем $|\text{Irr}(G_1)| = \frac{g}{g'} + \frac{g - g/g'}{p^2} = pz_1 + \frac{g - pz_1}{p^2}$, $|\text{Irr}(G)| = z + \frac{g - z}{p^2}$. Из $|\text{Irr}(G)| = |\text{Irr}(G_1)|$ выводим $z = pz_1$, то есть $|G:Z(G)| = p^3 < p^4 = |G_1:Z(G_1)|$.

Пусть G_1 ненильпотентная, а G нильпотентная. Тогда по доказанному выше G содержит абелеву нормальную подгруппу индекса p . Это означает, что все силовские q -подгруппы из G при $q \neq p$ абелевы. Но тогда $|G:Z(G)|$ -степень p . Так как $|G_1:Z(G_1)| = |G:Z(G)|$, то G_1 нильпотентна вопреки предположению. Итак, G должна быть в этом случае ненильпотентной. Полученные результаты формулируем в виде теоремы.

Теорема 3.3. Пусть неабелева группа G_1 содержит абелеву нормальную подгруппу индекса p . Тогда справедливы такие утверждения ($X_1(G) = X_1(G_1)$):

(1) Если G не содержит абелеву подгруппу индекса p , то G и G_1 нильпотентны, $|Z(G)| = p|Z(G_1)| = |G|/p^3$.

(2) Тогда и только тогда G содержит абелеву нормальную подгруппу индекса p , когда $|Z(G)| = |Z(G_1)|$.

(3) Если G_1 ненильпотентная, то и G ненильпотентна.

§ 4. Условие, необходимое и достаточное для существования инвариантного абелева π -дополнения у обобщенно разрешимой группы

Пусть π -некоторое множество простых чисел. Предположим, что $\chi(1)$ является π -числом для всех $\chi \in \text{Irr}(G)$. Группу, обладающую этим свойством, назовем I_π -группой. Очевидно, свойство I_π переносится на факторгруппы и нормальные делители. До сих пор не найдено примера I_π -группы, содержащей подгруппу, не являющуюся I_π -группой. Интересно было бы рассмотреть эту ситуацию, не используя классификацию простых групп. В этом параграфе мы укажем обширный класс I_π -групп, у которых все подгруппы являются I_π -группами.

Следующие определения принадлежат С. А. Чунихину. Группа G называется π -разрешимой, если ее композиционные индексы равны простым числам из π или π' -числам. Группа G называется π -отделимой, если π -часть любого ее композиционного индекса равна 1 или степени простого числа.

Lemma 4.1. Пусть $H < G$. Если для любого $\chi \in \text{Irr}(G)$ ограничение $\chi_H \in \text{Irr}(H)$, то любой H -класс является G -классом. В частности, любая нормальная в H подгруппа нормальна также и в G .

Доказательство. По условию и закону взаимности

$$(1_H)^G = \lambda^1 + \dots + \lambda^{|G:H|}, \quad \lambda^1 = 1_G,$$

попарно различные $\lambda^i \in \text{Lin}(G)$. Так как $\lambda_H^i = 1_H$, то $H \cong \bigcap_{i=1}^{|G:H|} \ker \lambda^i = D < G$. Так как λ^i -попарно различные характеры в $\text{Lin}(G/D)$, то $|G/D| \cong |G:H|$, и теперь ясно, что $H = D < G$ (попутно мы установили, что G/H абелева). По условию и закону взаимности все G -орбиты в $\text{Irr}(H)$ одноэлементны. Поэтому по лемме Брауэра (теорема 6.32 в [1]) группа G нормализует все H -классы, что и требовалось доказать.

Замечания. 1. При условии леммы 4.1 в [7] доказано, что $G' = H'$.

2. Если $H \cong G$, то все H -классы в H являются G -классами тогда и только тогда, когда $C_G(x)H = G$ для всех $x \in H$. Если к тому же H -холловская подгруппа в G , то H выделяется в G прямым множителем.

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Докажем второе утверждение. По теореме Шура—Цассенхауза $G = HD$ с $H \cap G = 1$, и все подгруппы порядка $|D|$ сопряжены в G . По первому утверждению этого замечания D централизует по крайней мере один элемент каждого H -класса из H . Пусть $x_1, \dots, x_k$ -представители H -классов, централизуемые подгруппой D . Положим $F = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$. Так как подгруппы, сопряженные с F в H , покрывают H , то $F = H$ (это легко следует из рассуждений п. 2.1^о). Так как D централизует $F = H$, все доказано. $\square$

Теорема 4.2. Пусть π -некоторое множество простых чисел, группа G π -отделима или π' -разрешима. Если $\chi(1)$ — π -число для любого $\chi \in \text{Irr}(G)$, то G содержит нормальное абелево π -дополнение. Обратное тоже верно.

Доказательство. Обратное утверждение верно благодаря лемме 1.1(1). Предположим, что теорема уже доказана для групп, чей порядок меньше $|G|$.

(i) Если $H \triangleleft G$ и $|G:H|$ — π -число, то теорема верна.

Доказательство. Так как H — I_π -группа, она по индукции содержит инвариантную абелеву π' -холловскую подгруппу D . Но $D \triangleleft G$ и D — π' -холловская подгруппа в G . $\square$

(ii) Если $1 \neq H \triangleleft G$, при этом H — π' -подгруппа, то теорема верна.

Доказательство. Так как G/H — I_π -группа, она по индукции содержит нормальную π' -холловскую подгруппу D/H . По теореме Клиффорда степени неприводимых характеров группы D делят степени неприводимых характеров группы G . Поэтому степени всех неприводимых характеров группы D равны 1 по лемме 1.1(1), так что D абелева. $\square$

Ввиду (i) — (ii) далее считаем, что $O^\pi(G) = G$, $O_{\pi'}(G) = 1$.

(iii) Если группа G простая, теорема верна.

Доказательство. Если G π' -разрешима, то $|G| = p \in \pi'$ или же G является π -группой. В этом случае все доказано. Пусть G — π -отделимая группа. Тогда $\pi \cap \pi(G) = \{p\}$ (здесь $\pi(G)$ — множество всех простых делителей $|G|$), G имеет инвариантное абелево p -дополнение по лемме 1.1(1), и снова $|G| = p$. $\square$

Далее считаем, что группа G непростая.

Пусть M — максимальная нормальная подгруппа в G . Так как M — I_π -подгруппа, применение индукции и (ii) показывает, что M — π -подгруппа. Так как G/M простая и G — не π -группа (в противном случае нечего доказывать), то по (i) и (iii) группа G/M является π' -группой. Для $\chi \in \text{Irr}(G)$ имеем по теореме Клиффорда

$$\chi_M = e(\theta_1 + \dots + \theta_t),$$

где попарно различные $\theta_i \in \text{Irr}(M)$ сопряжены относительно G . Так как $\chi(1) = e \cdot t \cdot \theta_1(1)$ — π -число по условию и $t = |G:I_G(\theta_1)|$ — π' -число (так как делит $|G/M|$), то $t = 1$. Из теории проективных представлений следует, что π -число e делит π' -число $|I_G(\theta_1):M|$; поэтому $e = 1$ и $\chi_M \in \text{Irr}(M)$. По лемме 4.1 группа G/M абелева, так что $|G/M| = p \in \pi'$, $G = PM$, где $P \in \text{Syl}_p(G)$ порядка p . Из леммы 4.1 и замечания 2, следующего после доказательства леммы 4.1, получаем $G = P \times M$. $\square$

Следствие 4.3. Пусть H -собственная подгруппа разрешимой группы G . Если простое число p делит $\phi(1)$ для некоторого $\phi \in \text{Irr}(H)$, то p делит $\chi(1)$ для некоторого $\chi \in \text{Irr}(G)$.

Доказательство. Предположим, что такого χ не существует. Тогда по теореме 4.2 с $\pi' = p$ в G имеется абелева инвариантная силовская p -подгруппа P . Но $P \cap H \in \text{Syl}_p(H)$ и $P \cap H \triangleleft H$. По лемме 1.1(1) для любого $\phi \in \text{Irr}(H)$ число $\phi(1)$ делит p' -число $|H:P \cap H|$, что противоречит условию. $\square$

Конечно, в следствии 4.3 разрешимость группы G можно заменить p -разрешимостью. Для доказательства этого следствия без предположения о строении G следует привлечь классификацию простых групп.

§ 5. Список нерешенных вопросов

5.1. Пусть M -некоторое множество натуральных чисел, содержащее 1. Известно, что не для всякого M существует группа G с с. д. $G=M$ (так, если $M=\{1\}$ состоит из простых чисел и с. д. $G=M$, то из [4] следует, что $|M|\leq 3$). Указать необходимые и (отдельно) достаточные условия для существования группы G с с. д. $G=M$.

5.2. Пусть $X_1(G_1)=X_1(G_2)$, и G_1 обладает одним из свойств: разрешимость, p -разрешимость, p -нильпотентность, p -замкнутость, простота. Будет ли и G_2 обладать соответствующим свойством? Если в одном из этих случаев ответ отрицательный, то представляет интерес изучение строения G_2 , не обладающего соответствующим свойством.

5.3. Пусть $H < G$. Изучить расположение H в G , если для любого $\chi \in \text{Irr } G$ имеем $\chi_H = e(\theta_1 + \dots + \theta_k)$, где $\theta_i \in \text{Irr } (H)$ имеют одну и ту же степень. Нетрудно построить пример пары $H < G$ с инвариантной H .

5.4. Пусть G -прямое произведение минимальных ненильпотентных групп попарно взаимно простых порядков, $X_1(G)=X_1(G_1)$. Изучить строение G_1 .

5.5. Пусть группа G обладает следующими свойствами:

(а) Если $\chi \in \text{Irr } (G)$ и $\chi(1) = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ (каноническое разложение), то $\chi = \chi_1 \dots \chi_k$ с $\chi_i \in \text{Irr } (G)$ и $\chi_i(1) = p_i^{a_i}$ $1 \leq i \leq k$.

(б) Если $\chi, \tau \in \text{Irr } (G)$ с $(\chi(1), \tau(1)) = 1$, то $\chi\tau \in \text{Irr } (G)$.

(в) Если $P_1, \dots, P_t$ -представители классов силовских подгрупп группы G , то $|\text{Irr } (G)| = \prod_{i=1}^t |\text{Irr } (P_i)|$.

Всегда ли такая группа G нильпотентна?

5.6. Пусть $P_1, \dots, P_t$ такие же, как и в 5.5(в). Всегда ли $|\text{Irr } (G)| \leq \prod_{i=1}^t |\text{Irr } (P_i)|$? Верно ли, что G , удовлетворяющая 5.5(в), нильпотентна?

5.7. Пусть $X_1(G)=X_1(S_n)$. Верно ли, что $G \cong S_n$? Это так, если $n \leq 6$ (это вытекает из полученной автором классификации всех G с $|\text{Irr } (G)| \leq 12$).

5.8. Пусть $X_1(G)=X_1(A_n)$. Верно ли, что $G \cong A_n$? Это так при $n \leq 7$. Аналогичные вопросы можно ставить и для других интересных серий групп. Можно ли решать такие вопросы, не апеллируя к классификации простых групп?

Отметим, что положительное решение предыдущих двух вопросов дало бы существенное усиление результатов Нагао [5] и Оямы [6] об определяемости S_n и A_n их таблицами характеров.

5.9. Существуют ли какие-либо тесные связи между $\exp G_1$ и $\exp G_2$, если $X(G_1)=X(G_2)$? Таких связей наверняка нет в случае $X_1(G_1)=X_1(G_2)$ (кроме того, что вытекает из равенства порядков групп G_1 и G_2).

Отметим, что проф. С. Д. Берман построил две группы G_1 и G_2 с $X_1(G_1)=X_1(G_2)$, у которых различные наборы длин классов сопряженных элементов

(устное сообщение). Кроме того, Г. Хигман показал, что таблица характеров определяет состав простых делителей порядков элементов группы, но не их порядки, разумеется (независимо и несколько ранее этот результат появился в неопубликованной кандидатской диссертации А. И. Саксонова (Минск 1967)).

5.10. Изучить детальное строение подгрупп, участвующих в формулировке первой теоремы Виланда.

5.11. Можно ли в теореме 2.7 удалить предположение о степенях характеров из $\text{Irr}(H)$?

5.12. Пусть G — p -группа максимального класса, $X_1(G_1) = X_1(G)$. Верно ли, что и G_1 тоже максимального класса? Ответ положителен при $p=2$

5.13. Несет ли $X_1(G)$ какую-либо информацию о порядке $Z(G)$?

5.14. Пусть M — некоторое множество натуральных чисел, $a, b \in M$. Скажем, что a, b связаны в M , если существует такая последовательность $a_0 = a, a_1, \dots, a_n = b$ чисел из M , что $(a_i, a_{i+1}) > 1$ для всех $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Отношение связности является отношением эквивалентности, и относительно него M разбивается на $\sigma(M)$ компонент связности. Нетрудно показать, что для разрешимой группы G имеем $\sigma(\text{c. d. } G) \leq 3$. Существует ли такое натуральное число, c , что $\sigma(\text{c. d. } G) \leq c$ для любой конечной группы G ? Вероятно, чаще всего $\sigma(\text{c. d. } G) = 2$ или 3. Вычислить $\sigma(\text{c. d. } G)$ для $G = A_n, S_n, GL_n$ и т. д. По-видимому, если G разрешима и $\sigma(\text{c. d. } G) = 3$, то нильпотентная длина G невелика.

5.15. Пусть обозначения такие же, как и в п. 2.1. Верно ли, что всегда $G(H_0)H = G$?

5.16. Пусть A — абелева группа, B — регулярная группа перестановок. Найти $\text{c. d. } (\text{Awg } B)$.

Вопрос 5.16 возник из таких рассуждений. Пусть χ — точный неприводимый характер p -группы G , $\chi(1) = p^n$. Тогда $\chi = \lambda^G$, где λ — линейный характер подгруппы H индекса p^n в G . Так как G — мономиальная группа, то $G \leq \text{Awg } \Sigma_n$, где $\Sigma_n \in \text{Syl}_p(S_{pn})$, A абелева, так что $\max \{\varphi(1) | \varphi \in \text{Irr}(G)\} \leq \max \{\tau(1) | \tau \in \text{Irr}(\text{Awg } \Sigma_n)\}$. Имеется гипотеза, что $\max \{\varphi(1) | \varphi \in \text{Irr}(G)\} \tau = |\Sigma_n|$. Эта гипотеза опровергается, если $\max \{\tau(1) | \tau \in \text{Irr}(\text{Awg } \Sigma_n)\} < |\Sigma_n|$ для абелевой A .

Цитированная литература

- [1] I. M. ISAACS, Character theory of finite groups, *Academic Press. New York*, 1976.
- [2] H. WIELANDT, Über die Existenz von Normalteilern in endlichen Gruppen, *Math. Nachr.* **18** (1958), 274—280.
- [3] I. M. ISAACS, D. S. PASSMAN, A characterization of groups in terms of the degrees of their characters, *Pacific J. Math.* **15** (1965), 877—903.
- [4] I. M. ISAACS, D. S. PASSMAN, A characterization of groups in terms of the degrees of their characters II, *Pacific J. Math.* **24** (1968), 467—510.
- [5] H. NAGAO, On the groups with the same table of characters as symmetric groups, *J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. Ser. A.* **8** (1957), 1—8.
- [6] T. OYAMA, On the groups with the same table of characters as alternating groups, *Osaka J. Math.* **1** (1964), 91—101.
- [7] Я. Г. БЕРКОВИЧ, Соотношения между числами классов группы и подгруппы, в сб. «Вопросы теории групп и гомологической алгебры», *Ярославль*, 1985.

Я. Г. БЕРКОВИЧ
СССР, 344006, РОСТОВ-НА-ДОНУ, ЭНГЕЛЬСА 111, КВ. 18

(Поступило 11, IV. 1986 г.)