

Eine spezielle Klasse von Abweichungsmitteln

Von PETER VOLKMANN (Karlsruhe)

Es bezeichne R den Bereich der reellen Zahlen, und es seien $a, b \in R$, $a < b$. Ist

$$f: [a, b] \times [a, b] \rightarrow R$$

eine bezüglich beider Veränderlichen streng wachsende Funktion, so wird dafür kurz $f(\uparrow, \uparrow)$ geschrieben. Entsprechend bedeutet $f(\uparrow, \downarrow)$ eine bezüglich der ersten Veränderlichen streng wachsende und bezüglich der zweiten Veränderlichen streng fallende Funktion.

Nun sei $E: [a, b] \times [a, b] \rightarrow R$ eine *Abweichung* im Sinne von Z. DARÓCZY [1], womit folgendes gemeint ist: Es gelte

$$(1) \quad E(x, x) = 0 \quad (a \leq x \leq b),$$

und für jedes x aus $[a, b]$ sei

$$E(x, \cdot): [a, b] \rightarrow R$$

stetig und streng fallend. Nach [1] wird dann durch

$$(2) \quad E(x, M(x, y)) + E(y, M(x, y)) = 0 \quad (x, y \in [a, b])$$

in eindeutiger Weise eine Funktion

$$M: [a, b] \times [a, b] \rightarrow R$$

definiert, und diese ist ein (symmetrisches) Mittel, d.h. sie besitzt die Eigenschaften

$$\min \{x, y\} \leq M(x, y) \leq \max \{x, y\} \quad (x, y \in [a, b])$$

und

$$M(x, y) = M(y, x) \quad (x, y \in [a, b]).$$

Ist noch $E: [a, b] \times [a, b] \rightarrow R$ stetig und setzt man

$$E(\cdot, y): [a, b] \rightarrow R$$

für jedes y aus $[a, b]$ als streng wachsend voraus (es ist dann $E(\uparrow, \uparrow)$), so kann leicht gezeigt werden, daß M stetig ist und $M(\uparrow, \uparrow)$ gilt. Nachstehender Satz liefert eine Umkehrung dieser Tatsache.

Satz. Es sei $M(\uparrow, \uparrow): [a, b] \times [a, b] \rightarrow R$ ein stetiges, symmetrisches Mittel. Dann existiert eine stetige Funktion $E(\uparrow, \uparrow): [a, b] \times [a, b] \rightarrow R$ mit $E(x, x) \equiv 0$ und

$$E(x, M(x, y)) + E(y, M(x, y)) = 0 \quad (x, y \in [a, b]).$$

BEWEIS. Für $a \leq y \leq b$ ist

$$M(\cdot, y): [a, b] \rightarrow [M(a, y), M(b, y)]$$

bijektiv. Damit wird durch

$$(3) \quad f(M(x, y), y) = x \quad (a \leq x \leq b)$$

auf eindeutige Weise

$$f(\cdot, y): [M(a, y), M(b, y)] \rightarrow [a, b]$$

festgelegt, und es ist

$$(4) \quad f(y, y) = y$$

sowie $f(M(a, y), y) = a$, $f(M(b, y), y) = b$. Setzt man noch

$$f(x, y) = b + x - M(b, y) \quad (M(b, y) \leq x \leq b),$$

$$f(x, y) = a + x - M(a, y) \quad (a \leq x \leq M(a, y)),$$

so erhält man also $f: [a, b] \times [a, b] \rightarrow R$. Es ist leicht einzusehen, daß f stetig ist und

$$(5) \quad f(\uparrow, \uparrow)$$

gilt. Wegen (3) ist für $x, y \in [a, b]$

$$x - f(M(x, y), y) = 0 = f(M(x, y), x) - y,$$

also gilt

$$[x - f(M(x, y), x)] + [y - f(M(x, y), y)] = 0,$$

d. h. (2) ist erfüllt, wenn

$$E(x, y) = x - f(y, x) \quad (x, y \in [a, b])$$

gesetzt wird. Diese Funktion $E: [a, b] \times [a, b] \rightarrow R$ ist stetig, wegen (4) gilt (1), und wegen (5) gilt $E(\uparrow, \uparrow)$.

Bemerkung. Ist $E(\uparrow, \uparrow): [a, b] \times [a, b] \rightarrow R$ eine stetige Abweichung, so läßt sich außer dem durch (2) gegebenen Mittel M noch ein weiteres Mittel $N: [a, b] \times [a, b] \rightarrow R$ durch die Forderung

$$E(N(x, y), x) + E(N(x, y), y) = 0 \quad (x, y \in [a, b])$$

definieren. Nimmt man statt $[a, b] \times [a, b]$ den Bereich $R_+^2 = (0, \infty) \times (0, \infty)$, so erzeugt beispielsweise die Abweichung

$$E(x, y) = \frac{x}{\sqrt{y}} - \sqrt{y} \quad (x, y > 0)$$

sowohl das arithmetische als auch das geometrische Mittel:

$$E(x, M) + E(y, M) = 0 \quad \text{gilt für} \quad M = \frac{x+y}{2},$$

$$E(N, x) + E(N, y) = 0 \quad \text{gilt für} \quad N = \sqrt{xy}.$$

Literatur

- [1] Z. DARÓCZY, Über eine Klasse von Mittelwerten. *Publ. Math. (Debrecen)* **19** (1972), 211—217.

MATHEMATISCHES INSTITUT I DER UNIVERSITÄT
POSTFACH 6980, 7500 KARLSRUHE 1, WESTDEUTSCHLAND

(Eingegangen am 3. Juli 1986)