

Слабая сходимость процессов, связанных с отношением правдоподобия дискретных наблюдений

А. Ф. ТАРАСКИН (Куйбышев)

Введение

С точки зрения теории статистических выводов, как известно, значительный интерес представляет асимптотическое (при неограниченном возрастании объема наблюдений) поведение некоторых процессов, связанных с отношением правдоподобия (о. п.). Специальные исследования в этом направлении начаты ЛеКамом [1] и продолжаются до настоящего времени. Монографии [2, 3] отражают результаты того этапа этих исследований, когда рассматривались только параметрические семейства мер и изучалось о. п., соответствующее двум сближающимся значениям параметра. При этом накладывались ограничения, приводящие, как правило, к гауссовскому предельному распределению логарифма о. п. В недавней работе [4] использован непараметрический подход к исследованию о. п. сближающихся некоторым образом мер. Однако и в этой работе предельными являются гауссовские процессы или смеси таких процессов. Негауссовские асимптотики в случае параметрических семейств мер, отвечающих процессам с непрерывным временем, рассматривались в работах автора [5, 6], а в непараметрическом случае для независимых наблюдений в [7].

В настоящей работе для дискретных во времени наблюдений произвольной природы устанавливаются условия асимптотической безграничной делимости логарифма о. п. как при справедливости «гипотезы», так и при справедливости «альтернативы». Показывается также, что рассматриваемые «гипотеза» и «альтернатива» будут при этом контигуальными. Эта работа является развернутым изложением результатов, анонсированных в [8]. Она состоит из четырех параграфов. Необходимые обозначения и постановка задачи даются в § 1. В § 2 приводятся используемые в дальнейшем предположения и условия, а также формулируются основные результаты. Доказательствам полученных результатов посвящены параграфы 3 и 4.

§ 1. Постановка задачи и обозначения

Пусть для каждого целого $n \geq 1$ задано измеримое пространство $(\Omega^n, \mathcal{F}^n)$ с неубывающим семейством σ -алгебр $F^n = (\mathcal{F}_k^n)_{k \geq 0}$, таких, что $\mathcal{F}_0^n = \{\emptyset, \Omega^n\}$ и $\mathcal{F}^n = \bigvee_{k \geq 0} \mathcal{F}_k^n$. Пусть P^n и $\tilde{P}^n$ — вероятностные меры на $\mathcal{F}^n$, а P_k^n и $\tilde{P}_k^n$ — сужения этих мер на σ -алгебру $\mathcal{F}_k^n$. Будем предполагать, что меры P^n и $\tilde{P}^n$ взаимно локально абсолютно непрерывны и пусть Z_k^n — производная Радона—Никодима меры $\tilde{P}_k^n$ по мере P_k^n :

$$(1) \quad Z_k^n(\omega^n) = d\tilde{P}_k^n/dP_k^n(\omega^n), \quad \omega^n \in \Omega^n.$$

Полагая $\alpha_0^n = Z_0^n = 1$ и для $k \geq 1$

$$(2) \quad \alpha_k^n = Z_k^n/Z_{k-1}^n,$$

будем иметь равенство

$$(3) \quad Z_k^n = \prod_{l=0}^k \alpha_l^n,$$

справедливое почти наверное (п. н.) по каждой из мер P^n и $\tilde{P}^n$. Введем в рассмотрение процесс L^n полагая для $t \in \mathbf{R}_+ = [0, \infty[$

$$(4) \quad L_t^n = \sum_{k=0}^{[nt]} \ln \alpha_k^n,$$

где символом $[\cdot]$ обозначена целая часть числа. Процесс $L^n = (L_t^n)_{t \in \mathbf{R}_+}$ является адаптированным к семейству σ -алгебр $G^n = (\mathcal{G}_t^n)_{t \in \mathbf{R}_+}$, где $\mathcal{G}_t^n = \mathcal{F}_{[nt]}^n$. Пусть $(D, \mathcal{D})$ — измеримое пространство непрерывных справа и имеющих пределы слева функций $x = (x_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ с топологией Скорохода, а $(D_T, \mathcal{D}_T)$ — такое же пространство функций, рассматриваемых на конечном промежутке $[0, T]$. Траектории процессов L^n , очевидно, принадлежат пространству D .

Целью этой работы является исследование слабой сходимости распределений, порождаемых на $(D, \mathcal{D})$ последовательностью процессов $\{L^n\}$ относительно мер P^n и $\tilde{P}^n$, к распределению некортного процесса с независимыми приращениями.

Сделаем некоторые замечания об используемых обозначениях. Слабая сходимость процессов в пространстве $(D, \mathcal{D})$ относительно мер P^n и $\tilde{P}^n$ обозначается символами « $\xrightarrow{d(P^n)}$ » и « $\xrightarrow{d(\tilde{P}^n)}$ », соответственно, а слабая сходимость сужений этих процессов на $(D_T, \mathcal{D}_T)$ символами « $\xrightarrow{d_T(P^n)}$ » и « $\xrightarrow{d_T(\tilde{P}^n)}$ ». Сходимость по вероятности P , как обычно, обозначается символом « $\xrightarrow{P}$ ». Символами M и $\tilde{M}$ обозначаются усреднения по мерам P^n и $\tilde{P}^n$, соответственно. Индикаторная функция множества A обозначается $I(A)$. Иногда без специальных оговорок мы будем записывать соотношения, если они выполняются лишь п. н. относительно рассматриваемых мер. Все предельные соотношения, если особо не оговорено, рассматриваются при $n \rightarrow \infty$.

§ 2. Формулировка результатов

В дальнейшем изложении величины $M \ln^2 \alpha_k^n$ и $\tilde{M} \ln^2 \alpha_k^n$ предполагаются конечными для каждого $n \geq 1$ и всех $k \geq 0$. При этом будут существовать условные математические ожидания $M(\ln^2 \alpha_k^n | \mathcal{F}_{k-1}^n)$ и $\tilde{M}(\ln^2 \alpha_k^n | \mathcal{F}_{k-1}^n)$, $n \geq 1$, $k \geq 0$ (полагаем $\mathcal{F}_{-1}^n = \mathcal{F}_0^n$). Введем ряд условий, которые будут использоваться в последующем.

$$A. \quad \sup_{k \geq 0} M(\ln^2 \alpha_k^n | \mathcal{F}_{k-1}^n) \xrightarrow{p^n} 0.$$

$$\tilde{A}. \quad \sup_{k \geq 0} \tilde{M}(\ln^2 \alpha_k^n | \mathcal{F}_{k-1}^n) \xrightarrow{p^n} 0.$$

Рассмотрим неслучайную вещественную функцию $K = \{K(t, x), t \in \mathbf{R}_+, x \in \mathbf{R}\}$ неубывающую по каждому из аргументов и непрерывную слева по x , обладающую кроме того свойствами: 1) $K(t, -\infty) = 0$, $t \in \mathbf{R}_+$; 2) $K(t, +\infty) = V(t)$ — непрерывная функция на $\mathbf{R}_+$; 3) для любых $x_1 < x_2$ разность $K(t, x_2) - K(t, x_1)$ является неубывающей на $\mathbf{R}_+$ функцией. Такую функцию K по понятным из дальнейшего изложения соображениям будем называть функцией Колмогорова. По функции Колмогорова K для каждого $t \in \mathbf{R}_+$ определим комплекснозначную функцию $\varphi_t(z; K)$ полагая

$$(5) \quad \varphi_t(z; K) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{zx} - 1 - zx)x^{-2} dK(t, x)$$

для тех комплексных z , для которых интеграл в правой части (5) сходится.

B. Существует функция Колмогорова K такая, что для всех $t \in \mathbf{R}_+$ выполняется соотношение

$$\sum_{k=0}^{[nt]} M \{ \ln^2 \alpha_k^n I(\ln \alpha_k^n < x) | \mathcal{F}_{k-1}^n \} \xrightarrow{p^n} K(t, x)$$

для $x \in C_t$ (C_t — множество точек непрерывности $K(t, \cdot)$ с присоединенной к нему точкой $\{+\infty\}$).

$\tilde{B}$. Выполняется условие *B* с функцией Колмогорова K , для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^x dK(t, x) < \infty \quad \text{для} \quad \forall t \in \mathbf{R}_+.$$

Заметим, что условие $\tilde{B}$ совпадает с *B* в случаях, когда функция Колмогорова $K(t, \cdot)$ имеет ограниченное множество точек роста для каждого $t \in \mathbf{R}_+$.

C. Для каждого $t \in \mathbf{R}_+$ при $N \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=0}^{[nt]} M \{ (\alpha_k^n - 1 - \ln \alpha_k^n) I(|\ln \alpha_k^n| > N) | \mathcal{F}_{k-1}^n \} \xrightarrow{p^n} 0$$

равномерно по $n \geq 1$.

С. Для каждого $t \in \mathbf{R}_+$ при $N \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=0}^{[nt]} M \{ [(\alpha_k^n - 1 - \ln \alpha_k^n) I(\alpha_k^n < N^{-1}) + \alpha_k^n \ln^2 \alpha_k^n I(\alpha_k^n > N)] | \mathcal{F}_{k-1}^n \} \xrightarrow{P^n} 0$$

равномерно по $n \geq 1$.

Основные результаты работы заключены в следующих теоремах.

Теорема 1. Если выполняются условия A, B, C , то

a. $L^n \xrightarrow{d(P^n)} L$, где L — начинающийся из нуля процесс с независимыми приращениями с характеристической функцией

$$\psi_t(\lambda) = \exp \{ -i\lambda \varphi_t(1; K) + \varphi_t(i\lambda; K) \};$$

b. последовательности мер $(P_{[nt]}^n)$ и $(\tilde{P}_{[nt]}^n)$ контигуальны для $\forall t \in \mathbf{R}_+$.

Теорема 2. Если выполняются условия $A, \tilde{B}$ и C , то конечномерные распределения процессов L^n относительно мер $\tilde{P}^n$ слабо сходится к соответствующим распределениям исходящего из нуля процесса с независимыми приращениями $\tilde{L}$ с характеристической функцией вида

$$\tilde{\psi}_t(\lambda) = \exp \{ i\lambda \varphi_t(-1; \tilde{K}) + \varphi_t(i\lambda; \tilde{K}) \},$$

где $d\tilde{K}(t, x) = e^x d\tilde{K}(t, x)$, $t \in \mathbf{R}_+$; если выполняются условия $A, \tilde{A}, \tilde{B}$ и $\tilde{C}$, то имеет место сходимость

$$L^n \xrightarrow{d(\tilde{P}^n)} \tilde{L}.$$

Выделим следующий частный случай, вытекающий из теорем 1 и 2.

Теорема 3. Пусть выполняются условия A, B и C , причем функция K в условии B имеет вид: $K(t, x) = 0$ для $x \leq 0$ и $K(t, x) = V(t)$ для $x > 0$. Тогда последовательности мер $(P_{[nt]}^n)$ и $(\tilde{P}_{[nt]}^n)$ контигуальны для $\forall t \in \mathbf{R}_+$ и имеет место сходимость

$$L^n \xrightarrow{d(P^n)} L,$$

где $L_t = \Delta_t - V(t)/2$, причем $\Delta = (\Delta_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ — начинающийся в нуле непрерывный гауссовский процесс с независимыми приращениями с нулевым средним и дисперсией $V(t)$. Если дополнительно выполняются условия $\tilde{A}$ и $\tilde{C}$, то имеет место сходимость

$$L^n \xrightarrow{d(\tilde{P}^n)} \tilde{L},$$

где $\tilde{L} = \Delta' + V(t)/2$.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Сначала докажем утверждение *a*. В соответствии с результатами [9, 10] сходимость в *a* будет установлена, если будет доказана сходимость

$$(6) \quad L^n \xrightarrow{d_T(P^n)} L$$

для произвольного $T > 0$. Теперь заметим, что в условиях теоремы для каж-

дого $n \geq 1$ существуют условные математические ожидания $M(\ln \alpha_k^n | \mathcal{F}_{k-1}^n)$, $k \geq 0$, и, следовательно, процесс L^n можно представить в виде

$$(7) \quad L_t^n = A_t^n - \varphi_t^n,$$

где

$$(8) \quad \varphi_t^n = - \sum_{k=0}^{[nt]} M(\ln \alpha_k^n | \mathcal{F}_{k-1}^n)$$

и

$$(9) \quad A_t^n = \sum_{k=0}^{[nt]} \{\ln \alpha_k^n - M(\ln \alpha_k^n | \mathcal{F}_{k-1}^n)\}.$$

Для выполнения (6) согласно теореме 4.4 из [11] и с учетом представления (7) достаточно установить для произвольного $T > 0$ следующие два соотношения: во-первых,

$$(10) \quad \varphi^n \xrightarrow{P^n} \varphi(1; K),$$

означающее сходимость по вероятности случайных элементов φ^n со значениями в пространстве D_T с метрикой Скорохода; во-вторых,

$$(11) \quad A^n \xrightarrow{d_T(P^n)} A,$$

где $A = (A_t)_{t \in [0, T]}$ — процесс с независимыми приращениями, начинающийся в нуле, с характеристической функцией $\exp\{\varphi_t(i\lambda; K)\}$. Приступим к доказательству (10). Для этого нам потребуется ряд лемм.

Лемма 1. В условиях теоремы 1 для любого $t \in \mathbf{R}_+$ P^n -п. н.

$$(12) \quad \varphi_t^n = \int_{-\infty}^{\infty} (e^x - 1 - x)x^{-2} dK_n(t, x),$$

где

$$(13) \quad K_n(t, x) = \sum_{k=0}^{[nt]} M\{\ln^2 \alpha_k^n I(\ln \alpha_k^n < x) | \mathcal{F}_{k-1}^n\}.$$

Доказательство. Для фиксированного $n \geq 1$ стохастическая последовательность $Z^n = (Z_k^n, \mathcal{F}_k^n)_{k \geq 0}$, как известно, является мартингалом относительно меры P^n и, следовательно, P^n -п. н. $M(Z_k^n | \mathcal{F}_{k-1}^n) = Z_{k-1}^n$, $k \geq 0$. С другой стороны, учитывая (3), получаем равенства $M(Z_k^n | \mathcal{F}_{k-1}^n) = Z_{k-1}^n M(\alpha_k^n | \mathcal{F}_{k-1}^n)$, $k \geq 0$. Из сравнения последних равенств имеем

$$(14) \quad M(\alpha_k^n | \mathcal{F}_{k-1}^n) = 1, \quad k \geq 0.$$

Это позволяет равенству (8) придать вид:

$$(15) \quad \varphi_t^n = \sum_{k=0}^{[nt]} M\{(\alpha_k^n - 1 - \ln \alpha_k^n) | \mathcal{F}_{k-1}^n\}.$$

Обозначим через $F_k^n(x) = F_k^n(\omega^n, x)$, $\omega^n \in \Omega^n$, $x \in \mathbf{R}$ — регулярную условную

функцию распределения случайной величины $\ln \alpha_k^n$ относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_{k-1}^n$ и положим

$$(16) \quad H_t^n(x) = \sum_{k=0}^{[nt]} F_k^n(x).$$

Реализации $H_t^n(\omega^n, x)$ этой случайной функции P^n -п. н. являются неортицательными неубывающими непрерывными слева и ограниченными функциями аргумента $x \in \mathbb{R}$. Выражая правые части (13) и (15) через H_t^n , имеем P^n -п. н.

$$(17) \quad K_n(t, x) = \int_{-\infty}^x y^2 dH_t^n(y)$$

и

$$(18) \quad \phi_t^n = \int_{-\infty}^{\infty} (e^x - 1 - x) dH_t^n(x),$$

где интегралы понимаются как обычные интегралы Стильтьеса по реализациям случайной функции H_t^n . Ясно, что реализации случайной функции $K_n(t, x)$ также будут P^n -п. н. неубывающими непрерывными слева и ограниченными функциями аргумента $x \in \mathbb{R}$. Переходя в (18) к интегрированию по $K_n(t, \cdot)$, получаем (12). Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $K(t, x)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}$ — случайная функция, реализации которой п. н. являются функциями Колмогорова, а непрерывная случайная функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, п. н. интегрируема по $K(t, x)$ для любого $t \in \mathbb{R}_+$. Тогда

$$(19) \quad g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dK(t, x)$$

является непрерывной случайной функцией.

Доказательство. В соответствии с условиями леммы интеграл в правой части (19) является п. н. обычным интегралом Стильтьеса от реализации $f(x)$ по реализации случайной функции $K(t, x)$. Поэтому достаточно доказать непрерывность получающейся таким образом реализации случайной функции $g(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$. Для фиксированного $t \in \mathbb{R}_+$ возьмем Δ такое, что $t + \Delta \in \mathbb{R}_+$. Положим $K_\Delta(t, x) = |K(t + \Delta, x) - K(t, x)|$. Для любого $N > 0$ имеем, очевидно, неравенство

$$(20) \quad |g(t + \Delta) - g(t)| \leq \int_{|x| \leq N} |f(x)| dK_\Delta(t, x) + \int_{|x| > N} |f(x)| dK_\Delta(t, x).$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ зададим некоторое $\delta > 0$ и выберем $N_{\varepsilon, \delta} > 0$ такое, что

$$(21) \quad \int_{|x| > N_{\varepsilon, \delta}} |f(x)| dK(t + \delta, x) < \varepsilon/2.$$

Теперь выберем Δ так, чтобы $|\Delta| < \delta$ и

$$(22) \quad \max_{|x| \leq N_{\varepsilon, \delta}} |f(x)| \cdot (V(t + |\Delta|) - V(t)) < \varepsilon/2,$$

где $V(t) = K(t, +\infty)$. Полагая в (20) $N = N_{\varepsilon, \delta}$ и учитывая неравенства (21) и (22), получаем неравенство $|g(t+\Delta) - g(t)| < \varepsilon$, из которого следует утверждение доказываемой леммы.

Лемма 3. Пусть $g_n(t)$, $n=1, 2, \dots$, и $g(t)$ — случайные элементы со значениями в D такие, что $g_n(t)$ — п. н. неубывающие, а $g(t)$ — п. н. непрерывна и для каждого $t \in \mathbf{R}_+$

$$g_n(t) \xrightarrow{P} g(t).$$

Тогда

$$\sup_t |g_n(t) - g(t)| \xrightarrow{P} 0,$$

где супремум берется по любому компактному подмножеству полупрямой $\mathbf{R}_+$.

Доказательство этой леммы имеется в [12].

Далее нам потребуется одно обобщение известного в теории интеграла Стильтеса результата о предельном переходе под знаком интеграла. Пусть для каждого $n=1, 2, \dots$, на некотором вероятностном пространстве задана такая неубывающая случайная функция $K_n(x)$, $x \in \mathbf{R}$, что $K_n(-\infty) = 0$ и $K_n(+\infty) < \infty$ п. н. Будем говорить, что функция $h(x)$, $x \in \mathbf{R}$, стохастически равномерно интегрируема по K_n , $n \geq 1$, если для любых $\varepsilon > 0$, $\delta \in]0, 1[$, существует такое $N_{\varepsilon, \delta}$, что для $N > N_{\varepsilon, \delta}$

$$P \left\{ \int_{|x| > N} |h(x)| dK_n(x) > \varepsilon \right\} \leq \delta, \quad n \geq 1.$$

Лемма 4. Пусть $h(x)$ — непрерывная на $\mathbf{R}$ стохастически равномерно интегрируемая по K_n , $n \geq 1$, функция и при $n \rightarrow \infty$ $K_n(x) \xrightarrow{P} K_0(x)$ для $x \in C$, где C — некоторое всюду плотное в $\mathbf{R}$ множество с присоединенной к нему точкой $\{+\infty\}$. Тогда h интегрируема по K_0 п. н. и при $n \rightarrow \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dK_n(x) \xrightarrow{P} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dK_0(x).$$

Доказательство этой леммы может быть проведено путем необходимых изменений доказательства соответствующего «неслучайного» аналога (см. [13], стр. 196) и здесь опускается.

Теперь мы в состоянии доказать соотношение (10). Проверим применимость леммы 4 к последовательности интегралов, определяемых правой частью (12). Для фиксированного $t \in \mathbf{R}_+$ случайные функции $K_n(t, x)$, определенные равенством (13), неубывают по $x \in \mathbf{R}$ и таковы, что $K_n(t, -\infty) = 0$ и $K_n(t, +\infty) < \infty$ P^n -п. н. Учитывая равенство

$$\begin{aligned} & \int_{|x| > N} (e^x - 1 - x)x^{-2} dK_n(t, x) = \\ & = \sum_{k=0}^{[nt]} M \{ (\alpha_k^n - 1 - \ln \alpha_k^n) I(|\ln \alpha_k^n| > N) | \mathcal{F}_{k-1}^n \} \end{aligned}$$

и условие C теоремы, видим, что функция $h(x) = (e^x - 1 - x)x^{-2}$ при $x \neq 0$ и $h(0) = 1/2$ стохастически равномерно интегрируема по функциям $K_n(t, \cdot)$, $n \geq 1$. Кроме того, по условию B теоремы имеем

$$K_n(t, x) \xrightarrow{P^n} K(t, x) \quad \text{для } x \in C_t.$$

Итак, условия леммы 4 выполняются, а значит для каждого $t \in \mathbf{R}_+$

$$(23) \quad \varphi_t^n \xrightarrow{P^n} \varphi_t(1; K).$$

Считая подинтегральную функцию в интеграле (5) доопределенной в точке $x=0$ по непрерывности, на основании леммы 2 заключаем, что функция $\varphi_t(1; K)$, $t \in \mathbf{R}_+$, является непрерывной. Учитывая равенство (14) и используя неравенство Иенсена, имеем P^n -п. н.

$$M(\ln \alpha_k^n | \mathcal{F}_{k-1}^n) \leq \ln M(\alpha_k^n | \mathcal{F}_{k-1}^n) = 0.$$

Тогда из равенства (8), определяющего процесс φ_t^n , $t \in \mathbf{R}_+$, видно, что реализации этого процесса P^n -п. н. неотрицательные и неубывающие функции. Теперь на основании леммы 3 заключаем, что из (23) следует

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\varphi_t^n - \varphi_t(1; K)| \xrightarrow{P^n} 0$$

для любого $T > 0$. Последнее означает сходимость по P^n -вероятности последовательности $\{\varphi^n\}$ к $\varphi(1; K)$ в пространстве D_T с равномерной метрикой. Так как равномерная топология сильнее топологии Скорохода, то будет выполняться и соотношение (10).

Перейдем к рассмотрению соотношения (11). Оно, как известно, будет доказано, если удастся установить два факта: во-первых, сходимость конечномерных распределений процессов Δ^n к соответствующим распределениям предельного процесса Δ ; во-вторых, плотность семейства мер, отвечающих процессам Δ^n , $n \geq 1$, в пространстве $(D_T, \mathcal{D}_T)$. Начнем с установления сходимости конечномерных распределений процессов Δ^n , $n \geq 1$. Так как предельный процесс Δ в (11) имеет независимые приращения, то для этого, очевидно, достаточно показать, что совместное распределение приращений $Y_k^n = \Delta_{t_k}^n - \Delta_{t_{k-1}}^n$, $k = 1, \dots, m$, для любых $0 = t_0 \leq t_1 < \dots < t_m \leq T$, и $m \geq 1$, сходится к распределению соответствующих приращений $Y_k = \Delta_{t_k} - \Delta_{t_{k-1}}$, $k = 1, \dots, m$, процесса Δ . Чтобы установить слабую сходимость распределений векторов $(Y_1^n, \dots, Y_m^n)$ к распределению вектора $(Y_1, \dots, Y_m)$, воспользуемся приемом Крамера—Уолда (см. [11], стр. 75). Сначала для краткости обозначим

$$X_{nk} = \ln \alpha_k^n, \quad \bar{X}_{nk} = M(X_{nk} | \mathcal{F}_{k-1}^n), \quad X_{nk}^0 = X_{nk} - \bar{X}_{nk}$$

и заметим, что для каждого $n \geq 1$ случайные величины X_{nk}^0 , $k \geq 0$, образуют последовательность мартингаловых разностей относительно (F^n, P^n) : они $\mathcal{F}_k^n$ -измеримы и $M(X_{nk}^0 | \mathcal{F}_{k-1}^n) = 0$ P^n -п. н. При этом процесс Δ^n имеет вид

$$(24) \quad \Delta_t^n = \sum_{k=0}^{[nt]} X_{nk}^0, \quad t \in \mathbf{R}_+.$$

Теперь для произвольного вектора $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^m$ рассмотрим поведение распределения суммы

$$S_n = \sum_{j=1}^m \lambda_j Y_j^n = \sum_{j=1}^m \lambda_j \sum_{k \in [nt_j-1]}^{[nt_j]} X_{nk}^0$$

и покажем, что оно сходится к распределению величины

$$S = \sum_{j=1}^m \lambda_j Y_j.$$

Обозначим $\tilde{X}_{nk} = \lambda_j X_{nk}^0$ для $[nt_{j-1}] < k \leq [nt_j]$, $j = 1, \dots, m$. Тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^{[nt_m]} \tilde{X}_{nk}$$

представляет собой сумму мартингалльных разностей $\tilde{X}_{nk}$, $k = 1, 2, \dots, [nt_m]$, относительно (F^n, P^n) . Сходимость распределений этой суммы может быть установлена с помощью результата из [14]: если выполняются условия

$$A'. \quad \max_{k \leq [nt_m]} M(\tilde{X}_{nk}^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n) \xrightarrow{P^n} 0,$$

B' . существует неубывающая ограниченная функция $K(\cdot)$ на R , для которой

$$\sum_{k=0}^{[nt_m]} M\{\tilde{X}_{nk}^2 I(\tilde{X}_{nk} < x) | \mathcal{F}_{k-1}^n\} \xrightarrow{P^n} K(x)$$

в точках непрерывности $K(\cdot)$ и в точке $x = +\infty$, то распределение S_n сходится к безгранично делимому закону с характеристической функцией

$$(25) \quad \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x) x^{-2} dK(x) \right\}.$$

Условие A' обеспечивается, очевидно, условием A . Выполнение B' будет вытекать из следующей леммы.

Лемма 5. При выполнении условий A и B выполняется соотношение

$$B^0. \quad \sum_{k=0}^{[nt]} M\{X_{nk}^0{}^2 I(X_{nk}^0 < x) | \mathcal{F}_{k-1}^n\} \xrightarrow{P^n} K(t, x)$$

для любого $x \in C_t$ и $t \in \mathbf{R}_+$.

Доказательство. Сначала убедимся, что будет справедливо соотношение

$$(26) \quad \sum_{k=0}^{[nt]} M\{(X_{nk}^0)^2 I(X_{nk}^0 < x) | \mathcal{F}_{k-1}^n\} \xrightarrow{P^n} K(t, x).$$

Для этого рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{[nr]} M \{ (X_{nk}^0)^2 I(X_{nk} < x) | \mathcal{F}_{k-1}^n \} &= \sum_{k=0}^{[nr]} M \{ X_{nk}^2 I(X_{nk} < x) | \mathcal{F}_{k-1}^n \} - \\ &- 2 \sum_{k=0}^{[nt]} \bar{X}_{nk} M \{ X_{nk} I(X_{nk} < x) | \mathcal{F}_{k-1}^n \} + \sum_{k=0}^{[nt]} \bar{X}_{nk}^2 M \{ I(X_{nk} < x) | \mathcal{F}_{k-1}^n \}. \end{aligned}$$

Первая сумма в правой части этого равенства сходится по P^n -вероятности к $K(t, x)$ в силу условия B . Покажем, что остальные две суммы стремятся к нулю по P^n -вероятности. Для последней суммы имеем очевидное неравенство

$$\sum_{k=0}^{[nt]} \bar{X}_{nk}^2 M \{ I(X_{nk} < x) | \mathcal{F}_{k-1}^n \} \leq \sum_{k=0}^{[nt]} \bar{X}_{nk}^2 \leq \varphi_t^n \cdot \max_{k \leq [nt]} |\bar{X}_{nk}|,$$

где совокупность величин φ_t^n , $n \geq 1$, в силу (23) ограничена по вероятности, а

$$(27) \quad \max_{k \leq [nt]} |\bar{X}_{nk}| \xrightarrow{P^n} 0,$$

что следует из условия A . Таким образом, последняя сумма стремится к нулю по P^n -вероятности. Применяя неравенство Коши—Буняковского к средней сумме, получаем

$$\left| \sum_{k=0}^{[nt]} \bar{X}_{nk} M \{ X_{nk} I(X_{nk} < x) | \mathcal{F}_{k-1}^n \} \right|^2 \leq \sum_{k=0}^{[nt]} \bar{X}_{nk}^2 \cdot \sum_{k=0}^{[nt]} M \{ X_{nk}^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n \},$$

причем первый множитель в правой части, как показано выше, стремится к нулю по P^n -вероятности, а второй ограничен по вероятности в силу условия B . Это означает, что средняя сумма также сходится к нулю по P^n -вероятности. Следовательно, справедливо (26). А теперь покажем, что выполняется B^0 . Сначала заметим, что при $x = +\infty$ B^0 совпадает с (26). Поэтому предположим, что $x < \infty$ — произвольная точка непрерывности $K(t, \cdot)$. Из соотношения (27) следует, что с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, для достаточно больших n будут выполняться неравенства

$$\begin{aligned} (28) \quad \sum_{k=0}^{[nt]} M \{ (X_{nk}^0)^2 I(X_{nk} < x - \delta) | \mathcal{F}_{k-1}^n \} &\leq \sum_{k=0}^{[nt]} M \{ X_{nk}^0 I(X_{nk}^0 < x) | \mathcal{F}_{k-1}^n \} \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{[nt]} M \{ (X_{nk}^0)^2 I(X_{nk} < x) | \mathcal{F}_{k-1}^n \}. \end{aligned}$$

для любого $\delta > 0$. Выбирая δ так, что $x - \delta \in C_t$, на основании (26) имеем, что левая сторона в (28) сходится к $K(t, x - \delta)$, а правая — к $K(t, x)$ по P^n -вероятности. В силу произвольности δ отсюда следует соотношение B^0 . Тем самым лемма доказана.

Теперь преобразуем сумму в условии B' :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{[nt]} M\{\bar{X}_{nk}^2 I(\bar{X}_{nk} < x) | \mathcal{F}_{k-1}^n\} &= \sum_{j=1}^m \lambda_j^2 \sum_{k > [nt_{j-1}]} M\{(X_{nk}^0)^2 I(\lambda_j X_{nk}^0 < x) | \mathcal{F}_{k-1}^n\} = \\ &= \sum_{\{j: \lambda_j > 0\}} \lambda_j^2 \sum_{k > [nt_{j-1}]}^{[nt_j]} M\{X_{nk}^0 I(X_{nk}^0 < x/\lambda_j) | \mathcal{F}_{k-1}^n\} + \\ &+ \sum_{\{j: \lambda_j < 0\}} \lambda_j^2 \sum_{k > [nt_{j-1}]}^{[nt_j]} M\{X_{nk}^0 I(X_{nk}^0 > x/\lambda_j) | \mathcal{F}_{k-1}^n\}. \end{aligned}$$

На основании леммы 5 отсюда следует, что условие B' выполняется с предельной функцией

$$(29) \quad K(x) = \sum_{\{j: \lambda_j < 0\}} \lambda_j^2 [V(t_j) - V(t_{j-1}) + K(t_{j-1}, x/\lambda_j) - K(t_j, x/\lambda_j)] + \\ + \sum_{\{j: \lambda_j > 0\}} \lambda_j^2 [K(t_j, x/\lambda_j) - K(t_{j-1}, x/\lambda_j)],$$

которая, как легко проверить, является неубывающей и ограниченной на $\mathbf{R}$. Следовательно, предельное распределение суммы S_n имеет характеристическую функцию вида (25), в которой $K(x)$ определяется формулой (29). Подставляя (29) в (25), после элементарных преобразований получаем следующее выражение для характеристической функции предельного закона:

$$\exp \left\{ \sum_{j=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\lambda_j x} - 1 - i\lambda_j x) x^{-2} d[K(t_j, x) - K(t_{j-1}, x)] \right\}.$$

Нетрудно убедиться, что такую же характеристическую функцию имеет случайная величина S . Таким образом, установлена сходимость конечномерных распределений процессов Δ^n , $n \geq 1$, к соответствующим распределениям процесса Δ .

Осталось убедиться в том, что семейство мер, порождаемых процессами Δ^n , $n \geq 1$, в пространстве $(D_T, \mathcal{D}_T)$, плотно. Из структуры процесса Δ^n (см. равенство (24)) и предполагаемой конечности MX_{nk}^2 , $k \geq 0$, следует, что он является квадратично интегрируемым мартингалом относительно (G^n, P^n) , а его квадратическая характеристика имеет вид

$$\langle \Delta^n \rangle_t = \sum_{k=0}^{[nt]} M\{(X_{nk}^0)^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n\}, \quad t \in \mathbf{R}_+.$$

По лемме 5

$$\langle \Delta^n \rangle_t \xrightarrow{P^n} K(t, +\infty) = V(t), \quad t \in \mathbf{R}_+,$$

где V , по предположению, непрерывная функция. Таким образом, семейство процессов $(\Delta_t^n, \mathcal{D}_t^n, P^n)_{t \in \mathbf{R}_+}$, $n \geq 1$, удовлетворяет условиям леммы 6 из [15] и на ее основании является плотным. Итак, установлено соотношение (11). Оно вместе с (10) обеспечивает (6), что и завершает доказательство утверждения a теоремы.

Для доказательства утверждения b в соответствии с характеристикой континуальности (см. [2], стр. 20) достаточно убедиться в справедливости равенства

$$(30) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^x d\mathcal{L}_t(x) = 1,$$

где $\mathcal{L}_t(x)$ — функция распределения значения предельного процесса L_t . Равенство (30) может быть в данном случае установлено теми же рассуждениями, которые использованы в доказательстве теоремы 1 из работы [7]. Доказательство теоремы 1, тем самым, завершено.

§ 4. Доказательство теоремы 2

По теореме 1 последовательности мер $(P_{[nt]}^n)$ и $(\tilde{P}_{[nt]}^n)$ являются взаимно континуальными. Тогда по следствию 2.1 из [1] предельное распределение величины L_t^n при справедливости «альтернативы», соответствующей мере $\tilde{P}^n$, имеет характеристическую функцию

$$\tilde{\psi}_t(\lambda) = \psi_t(\lambda - i) = \exp \{-i(\lambda - i)\varphi_t(1; K) + \varphi_t(i(\lambda - i); K)\}.$$

Учитывая условие $\tilde{B}$, правую часть этого равенства можно преобразовать к виду

$$\tilde{\psi}_t(\lambda) = \exp \{i\lambda\varphi_t(-1; \tilde{K}) + \varphi_t(i\lambda; \tilde{K})\}$$

с $d\tilde{K}(t, x) = e^x dK(t, x)$, откуда ясно, что одномерные распределения процессов L^n слабо сходятся к соответствующим распределениям предельного процесса с независимыми приращениями $\tilde{L}$. Тем же способом нетрудно убедиться в том, что распределения приращений $L_t^n - L_s^n$ для любых $0 \leq s < t$ слабо сходятся к распределениям приращений $\tilde{L}_t - \tilde{L}_s$. Учитывая, что $L_0^n = \tilde{L}_0 = 0$, отсюда заключаем, что любые конечномерные распределения процессов L^n слабо сходятся к соответствующим распределениям процесса L . Первое утверждение теоремы установлено.

Для завершения доказательства теоремы остается проверить, что относительно мер $\tilde{P}^n$ семейство распределений процессов L_t^n ; $t \in \mathbf{R}_+$, в $(D, \mathcal{D})$ является плотным. Представим L_t^n в виде:

$$(31) \quad L_t^n = \tilde{A}_t^n + \tilde{\varphi}_t^n,$$

где

$$(32) \quad \tilde{\varphi}_t^n = \sum_{k=0}^{[nt]} \tilde{M}(\ln \alpha_k^n | \mathcal{F}_{k-1}^n),$$

$$(33) \quad \tilde{A}_t^n = \sum_{k=0}^{[nt]} \{\ln \alpha_k^n - \tilde{M}(\ln \alpha_k^n | \mathcal{F}_{k-1}^n)\}.$$

Покажем сначала, что

$$(34) \quad \tilde{\varphi}^n \xrightarrow{\tilde{P}^n} \varphi(-1; \tilde{K}),$$

где символ « $\xrightarrow{P^n}$ » означает сходимость случайных элементов в $(D, \mathscr{D})$ по $\tilde{P}^n$ -вероятности.

Лемма 6. Величина $\tilde{\varphi}_t^n, t \in \mathbf{R}_+$, подускает представление

$$(35) \quad \tilde{\varphi}_t^n = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-x} - 1 + x)x^{-2} e^x dK_n(t, x) \quad \tilde{P}^n\text{-п. н.},$$

где функция $K_n(t, x)$ задается равенством (13).

Доказательство. По следствию 1 из леммы 3 в [16] имеем равенство $\tilde{M}(\ln \alpha_k^n | \mathscr{F}_{k-1}^n) = M(\alpha_k^n \ln \alpha_k^n | \mathscr{F}_{k-1}^n)$. Учитывая равенство (14), его можно записать в виде

$$\tilde{M}(\ln \alpha_k^n | \mathscr{F}_{k-1}^n) = M\{\alpha_k^n (\ln \alpha_k^n - 1 + 1/\alpha_k^n) | \mathscr{F}_{k-1}^n\},$$

и, следовательно, (32) примет вид

$$\tilde{\varphi}_t^n = \sum_{k=0}^{[nt]} M\{\alpha_k^n (\ln \alpha_k^n - 1 + 1/\alpha_k^n) | \mathscr{F}_{k-1}^n\}.$$

Сумма в правой части этого равенства преобразуется в интеграл вида (35) рассуждениями, аналогичными проведенным при доказательстве леммы 1. Таким образом установлено представление (35).

Теперь заметим, что

$$\int_{|x|>N} (e^{-x} - 1 + x)x^{-2} e^x dK_n(t, x) = \sum_{k=0}^{[nt]} M\{(1 - \alpha_k^n + \alpha_k^n \ln \alpha_k^n) I(|\ln \alpha_k^n| > N) | \mathscr{F}_{k-1}^n\}$$

для любого $N > 0$. Учитывая элементарные неравенства $1 - x + x \ln x < x - 1 - \ln x$ для $x \in]0, 1[$ и $1 - x + x \ln x < x \ln^2 x$ для $x > 1$, для правой части последнего равенства имеем оценку

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{[nt]} M\{(1 - \alpha_k^n + \alpha_k^n \ln \alpha_k^n) I(|\ln \alpha_k^n| > N) | \mathscr{F}_{k-1}^n\} \equiv \\ & \equiv \sum_{k=0}^{[nt]} M\{[(\alpha_k^n - 1 - \ln \alpha_k^n) I(\alpha_k^n < e^{-N}) + \alpha_k^n \ln \alpha_k^n I(\alpha_k^n > e^N)] | \mathscr{F}_{k-1}^n\}, \end{aligned}$$

из которой следует в силу условия $\tilde{C}$ равномерная интегрируемость непрерывной функции

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} (e^{-x} - 1 + x)x^{-2} e^x, & x \neq 0 \\ 1/2, & x = 0 \end{cases}$$

по случайным функциям $K_n(t, x)$. Применяя последовательно леммы 2 и 3, получаем для любого $T > 0$ соотношение

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\tilde{\varphi}_t^n - \varphi_t(-1; \tilde{K})| \xrightarrow{P^n} 0,$$

в котором, в силу $(\tilde{P}_{[nt]}^n) \triangleleft \triangleright (P_{[nt]}^n)$, сходимость по P^n -вероятности можно

заменить сходимостью по $\tilde{P}^n$ -вероятности. Это будет означать сходимость (34).

Покажем теперь, что семейство процессов $\tilde{A}^n$, $n \geq 1$, относительно распределений $\tilde{P}^n$ плотно в $(D, \mathcal{D})$. Из исходных предположений следует, что для каждого $n \geq 1$ процесс $\tilde{A}_t^n$, $t \in \mathbf{R}_+$, является квадратично интегрируемым мартингалом с характеристикой

$$\langle \tilde{A}^n \rangle_t = \sum_{k=0}^{[nt]} \tilde{M} \{ [\ln \alpha_k^n - \tilde{M}(\ln \alpha_k^n | \mathcal{F}_{k-1}^n)]^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n \}.$$

Полагая

$$Q_t^n = \sum_{k=0}^{[nt]} \tilde{M}(\ln^2 \alpha_k^n | \mathcal{F}_{k-1}^n)$$

и

$$S_t^n = \sum_{k=0}^{[nt]} [\tilde{M}(\ln \alpha_k^n | \mathcal{F}_{k-1}^n)]^2,$$

можно записать равенство $\langle \tilde{A}^n \rangle_t = Q_t^n - S_t^n$. При этом

$$\begin{aligned} S_t^n &\leq \max_{k \leq [nt]} \tilde{M}(\ln \alpha_k^n | \mathcal{F}_{k-1}^n) \cdot \sum_{k=0}^{[nt]} \tilde{M}(\ln \alpha_k^n | \mathcal{F}_{k-1}^n) \leq \\ &\leq \tilde{\varphi}_t^n \cdot \left[\sup_{k \geq 0} \tilde{M}(\ln^2 \alpha_k^n | \mathcal{F}_{k-1}^n) \right]^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{P^n} 0 \end{aligned}$$

в силу условия $\tilde{A}$ и стохастической ограниченности последовательности $\tilde{\varphi}_t^n$, $n \geq 1$. Для Q_t^n имеем представление:

$$Q_t^n = \sum_{k=0}^{[nt]} M(\alpha_k^n \ln^2 \alpha_k^n | \mathcal{F}_{k-1}^n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^x dK_n(t, x),$$

где $K_n(t, x)$ определяется равенством (13). Так как для любого $N > 0$

$$\begin{aligned} \int_{|x| > N} e^x dK_n(t, x) &= \sum_{k=0}^{[nt]} M[\alpha_k^n \ln^2 \alpha_k^n I(|\ln \alpha_k^n| > N) | \mathcal{F}_{k-1}^n] \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{[nt]} M\{[(\alpha_k^n - 1 - \ln \alpha_k^n) I(\alpha_k^n < e^{-N}) + \alpha_k^n \ln^2 \alpha_k^n I(\alpha_k^n > e^N)] | \mathcal{F}_{k-1}^n\}, \end{aligned}$$

то в силу условия $\tilde{C}$ функция e^x стохастически равномерно интегрируема по функциям K_n и по лемме 4

$$Q_t^n = \int_{-\infty}^{\infty} e^x dK_n(t, x) \xrightarrow{P^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^x dK(t, x) = \tilde{V}(t).$$

При этом функция $\tilde{V}(t)$ согласно лемме 2 будет непрерывной на $\mathbf{R}_+$. Таким образом получаем соотношение

$$\langle \tilde{A}^n \rangle_t \xrightarrow{P^n} \tilde{V}(t),$$

в котором (в силу контигуальности) сходимость по P^n -вероятности можно заменить на сходимость по $\tilde{P}^n$ -вероятности. Тогда по лемме 6 из [15] семейство распределений процессов $\tilde{L}^n$ относительно мер $\tilde{P}^n$ в $(D, \mathscr{D})$ будет плотным. Учитывая равенство (31), заключаем, что этот факт вместе с соотношением (34) означает плотность семейства распределений процессов L^n , $n \geq 1$, относительно мер $\tilde{P}^n$ в пространстве $(D, \mathscr{D})$. Теорема 2 доказана.

Литература

- [1] L. LE CAM, Locally asymptotically normal families of distributions, — *Univ. California Publ. Statist.*, 3 (1960), pp. 37—98.
- [2] Дж. Русас, Контигуальность вероятностных мер. М.: Мир, 1975, 254 с.
- [3] И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979, 527 с.
- [4] P. E. GREENWOOD, A. N. SHIRYAYEV, Contiguity and the statistical invariance principle. Gordon and Breach, London, 1985.
- [5] А. Ф. Тараскин, Локальная асимптотическая безграничная делимость семейств марковских процессов. — В сб.: Теория случайных процессов. Вып. 13, Киев: Наукова думка, 1985, с. 80—90.
- [6] А. Ф. Тараскин, О поведении отношения правдоподобия семимартингалов. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1984, т. XXIX, вып. 3, с. 440—451.
- [7] А. Ф. Тараскин, Асимптотические свойства отношения правдоподобия независимых наблюдений. — В сб.: Теория случайных процессов. Вып. 14, Киев: Наукова думка, 1986, с. 76—83.
- [8] А. Ф. Тараскин, О слабой сходимости процессов, связанных с отношением правдоподобия. — В сб.: Четвертая международная Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике. Т. 3. Вильнюс: Ин-т математики и кибернетики АН ЛитССР, 1985, с. 170—171.
- [9] CH. STONE, Weak convergence of stochastic processes defined on semi-infinite time intervals. — *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1963, v. 14, pp. 694—696.
- [10] D. L. McLEISH, Invariance principles for dependent variables. — *ZW verw. Gebiete*, 1975, t. 32, pp. 165—178.
- [11] П. Билингсли, Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 352 с.
- [12] D. L. McLEISH, An extended martingale invariance principle. — *Ann. Probability*, 1978, v. 6, N1, pp. 144—150.
- [13] М. Лозв, Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962, 719 с.
- [14] B. M. BROWN, G. K. EAGLESON, Martingale convergence to infinitely divisible laws with finite variances. — *Transactions of the Amer. Math. Soc.*, 1971, v. 162, pp. 449—453.
- [15] Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, Функциональная центральная предельная теорема для семимартингалов. — *Теория вероятн. и ее примен.*, 1980, т. XXV, вып. 4, с. 683—703.
- [16] Р. Ш. Липцер, Ф. Пукельшейм, А. Н. Ширяев, О необходимых и достаточных условиях контигуальности и полной асимптотической делимости вероятностных мер. — *Успехи математ. наук*, 1982, т. 37, вып. 6 (228), с. 97—124.

КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
ИМ АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА

(Поступило 10, IX. 1986 г.)