

О связностях, индуцированных объектами Картана — Лаптева

А. С. ФЕРЗАЛИЕВ (Пенза)

Как известно [1]—[5] в многообразии линейных элементов со связностью $L_{\beta\gamma}^{\alpha}(x, p)$, $C_{\beta\gamma}^{\alpha}(x, p)$ ковариантный дифференциал вектора $T^{\alpha}(x, p)$ задается формулой

$$(1) \quad \delta T^{\alpha} = dx^{\alpha} + L_{\beta\gamma}^{\alpha} T^{\beta} dx^{\gamma} + C_{\beta\gamma}^{\alpha} T^{\beta} \delta p^{\gamma},$$

где $L_{\beta\gamma}^{\alpha}(x, p)$ — объект аффинной связности нулевого измерения относительно p^{α} , $C_{\beta\gamma}^{\alpha}(x, p)$ — тензор минус первого измерения относительно p^{α} , p^{α} — произвольный опорный псевдовектор, δ, d — символы ковариантного и обычного дифференциалов соответственно, причем $C_{\beta\gamma}^{\alpha} p^{\gamma} = 0$.

Совокупность пар объектов $L_{\beta\gamma}^{\alpha}(x, p)$, $C_{\beta\gamma}^{\alpha}(x, p)$ в метрических пространствах Финслера называется объектами евклидовой связности Э. Картана [4], [5], Общая теория связности $L_{\beta\gamma}^{\alpha}(x, p)$, $C_{\beta\gamma}^{\alpha}(x, p)$ с кручением в связи с построением ковариантного дифференциала (ковариантного дифференцирования), теорию дифференциальных инвариантов и дифференцирования Ли в многообразиях линейных элементов была развита Б. Л. Лаптевым [1], [2], поэтому назовем $L_{\beta\gamma}^{\alpha}(x, p)$, $C_{\beta\gamma}^{\alpha}(x, p)$ объектами связности Картана—Лаптева.

В 1946 г. Б. Л. Лаптев [3] ввел пространство опорных элементов, частными случаями которого являются пространство Финслера, пространство Картана, общая геометрия путей Бервальда, пространство k -протяжений Дугласа и др.

Различным аспектам развития теории пространств Финслера и их обобщениям посвящены весьма интересные исследования венгерских геометров: О. VARGA [15], А. MOÓR [16], А. RÁPCHÁK [17], Gy. SOÓS [18], L. TAMÁSSY [19], S. BÁCSÓ [19].

1. Исследования настоящей работы посвящены связностям, индуцированным объектами $L_{\beta\gamma}^{\alpha}(x, p)$, $C_{\beta\gamma}^{\alpha}(x, p)$, т. е. с помощью $L_{\beta\gamma}^{\alpha}(x, p)$, $C_{\beta\gamma}^{\alpha}(x, p)$ и требований геометрического характера, будем строить новые связности и объекты, необходимые при решении дифференциально-геометрических задач. В этой связи в многообразии линейных элементов с фундаментальными объектами $L_{\beta\gamma}^{\alpha}(x, p)$, $C_{\beta\gamma}^{\alpha}(x, p)$ рассмотрим однопараметрическое семейство линейных элементов

$$\Gamma: x^{\alpha} = x^{\alpha}(t), p^{\alpha} = p^{\alpha}(t)$$

и двумерную площадку $E_2\{\dot{x}^\alpha, p^\alpha\}$, где t — произвольный параметр, $\dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}$, причем $\dot{x}^\alpha$ и p^α линейно независимы.

Определение 1. Однопараметрическое семейство Γ назовем χ путями (А. С. Ферзалиев [6], [7]), если геометрические приращения $\dot{x}^\alpha, p^\alpha$, т. е. $\frac{\delta \dot{x}^\alpha}{dt}, \frac{\delta p^\alpha}{dt}$ принадлежат E_2 .

Из этого определения следует, что

$$(2) \quad \chi: \frac{\delta \dot{x}^\alpha}{dt} = \mu \dot{x}^\alpha + \nu p^\alpha, \quad \frac{\delta p^\alpha}{dt} = F \dot{x}^\alpha + \eta p^\alpha,$$

где μ, ν, F, η — скалярные функции, $\ddot{x}^\alpha = \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2}$, $\dot{p}^\alpha = \frac{dp^\alpha}{dt}$.

Применяя формулу (1) к условиям (2) находим

$$(3) \quad \begin{cases} \ddot{x}^\alpha + (L_{\beta\gamma}^\alpha + FC_{\beta\gamma}^\alpha) \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = \mu \dot{x}^\alpha + \nu p^\alpha, \\ \dot{p}^\alpha + (L_{\beta\gamma}^\alpha + FC_{\beta\gamma}^\alpha) p^\beta \dot{x}^\gamma = F \dot{x}^\alpha + \eta p^\alpha. \end{cases}$$

Введем следующие объекты:

$$(4) \quad \Phi_{\beta\gamma}^\alpha = L_{\beta\gamma}^\alpha + FC_{\beta\gamma}^\alpha,$$

$$(5) \quad H_\beta^\alpha = F\delta_\beta^\alpha - \Phi_{\tau\beta}^\alpha p^\tau.$$

Как это следует из правой части (4) $\Phi_{\beta\gamma}^\alpha(x, p)$ — является объектом аффинной связности, а (5) $H_\beta^\alpha(x, p)$ — линейной дифференциально-геометрической связностью, индуцированной скалярной функцией $F(x, p)$ и аффинной связностью $\Phi_{\beta\gamma}^\alpha(x, p)$. Здесь и в дальнейшем мы предполагаем, что $F(x, p)$ зависит от x^α, p^α , но не зависит от $\dot{x}^\alpha$, причем $F = \frac{1}{n} (H_\alpha^e + \Phi_{\tau e}^\alpha p^\tau)$.

Общая теория линейной дифференциально-геометрической связности дана в исследованиях Б. И. Близникаса [9].

Фундаментальные объекты $\Phi_{\beta\gamma}^\alpha(x, p)$, $H_\beta^\alpha(x, p)$ в неявном виде впервые встречаются в более ранних работах А. С. Ферзалиев [6], [13], [14].

Определение 2. Аффинную связность $\Phi_{\beta\gamma}^\alpha(x, p)$, определенную структурой (4) назовем объектом *присоединенной связности*.

Определение 3. Пространство линейных элементов с фундаментальными объектами $\Phi_{\beta\gamma}^\alpha(x, p)$, (4) и $H_\beta^\alpha(x, p)$ (5) назовем пространством присоединенной связности и обозначим через $\Gamma_{n,p}$, а если $p^\alpha = \dot{x}^\alpha$, то через $\Gamma_{n,\dot{x}}$.

Геометрия пространства $\Gamma_{n,p}$ является геометрией инвариантов объектов $\Phi_{\beta\gamma}^\alpha(x, p)$, $H_\beta^\alpha(x, p)$.

Нетрудно заметить, что пути χ (3) через присоединенную связность $\Phi_{\beta\gamma}^\alpha(x, p)$ можно записать так

$$(6) \quad \chi: \begin{cases} \ddot{x}^\alpha + \Phi_{\beta\gamma}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = \mu \dot{x}^\alpha + \nu p^\alpha, \\ \dot{p}^\alpha + \Phi_{\beta\gamma}^\alpha p^\beta \dot{x}^\gamma = F \dot{x}^\alpha + \eta p^\alpha, \end{cases}$$

а через $\Phi_{\beta\gamma}^\alpha(x, p)$ и $H_\beta^\alpha(x, p)$ в следующем виде

$$(7) \quad \chi: \begin{cases} \ddot{x}^\alpha + \Phi_{\beta\gamma}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = \mu \dot{x}^\alpha + \nu p^\alpha, \\ \dot{p}^\alpha - H_\beta^\alpha \dot{x}^\beta = \eta p^\alpha. \end{cases}$$

Таким образом, запись дифференциальных уравнений путей χ (обобщенных геодезических) через $\Phi_{\beta\gamma}^\alpha(x, p)$, $H_\beta^\alpha(x, p)$ является одним из приложений присоединенной связности $\Phi_{\beta\gamma}^\alpha(x, p)$ и объекта $H_\beta^\alpha(x, p)$.

Если в уравнениях (6) $F=0$, $\nu=0$, $C_{\beta\gamma}^\alpha=0$ и $\Phi_{\beta\gamma}^\alpha=L_{\beta\gamma}^\alpha(x, p)$ без кручения, то получим дифференциальные уравнения аффинных путей Дугласа [10].

При переходе к опорному касательному псевдовектору, т. е. $p^\alpha=\dot{x}^\alpha$, из (6) (или (5), (7)) получим аффинные пути

$$(8) \quad \ddot{x}^\alpha + \Phi_{\beta\gamma}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = \omega \dot{x}^\alpha,$$

отнесенные присоединенной связности $\Phi_{\beta\gamma}^\alpha(x, \dot{x})$ без кручения

$$(9) \quad \Phi_{\beta\gamma}^\alpha(x, \dot{x}) = L_{\beta\gamma}^\alpha(x, \dot{x}) + F(x, \dot{x}) C_{\beta\gamma}^\alpha(x, \dot{x}).$$

Если учесть, что $C_{\beta\gamma}^\alpha = C_{\gamma\beta}^\alpha$, $C_{\beta\gamma}^\alpha \dot{x}^\gamma = 0$, то

$$\Phi_{\beta\gamma}^\alpha \dot{x}^\gamma = L_{\beta\gamma}^\alpha \dot{x}^\gamma.$$

Тогда получим известные дифференциальные уравнения геодезических

$$(10) \quad \ddot{x}^\alpha + L_{\beta\gamma}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = \omega \dot{x}^\alpha,$$

отнесенные к связности $L_{\beta\gamma}^\alpha(x, \dot{x})$ (без кручения) Э. Картана.

Следовательно, форма дифференциальных уравнений геодезических (10) не меняется при замене аффинной связности $L_{\beta\gamma}^\alpha(x, \dot{x})$ на присоединенную связность $\Phi_{\beta\gamma}^\alpha(x, \dot{x})$. Инвариантность формы дифференциальных уравнений геодезических относительно присоединенной связности расширяет границу возможности применения объектов связности $L_{\beta\gamma}^\alpha(x, \dot{x})$, $C_{\beta\gamma}^\alpha(x, \dot{x})$ Э. Картана, Б. Л. Лаптева.

Форма дифференциальных уравнений путей (10) также инвариантна относительно следующей связности без кручения

$$\Phi_{\beta\gamma}^\alpha = L_{\beta\gamma}^\alpha + F C_{\beta\gamma}^\alpha + Q_{\beta\gamma}^\alpha,$$

где $Q_{\beta\gamma}^\alpha(x, \dot{x})$ — тензор нулевого измерения относительно $\dot{x}^\alpha$ и удовлетворяет условию

$$Q_{\beta\gamma}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = 0.$$

В случае общей геометрии путей происхождение присоединенной связности можно объяснить так. Как известно, наиболее простая связность, возникшая первоначально в пространствах Финслера является следующая связность, введенная Бервальдом

$$(11) \quad G_{\beta\gamma}^\alpha = H_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{\partial^2 H^\alpha(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^\beta \partial \dot{x}^\gamma}$$

через величины $H^\alpha(x, \dot{x})$, входящие в дифференциальные уравнения [11]

$$\ddot{x}^\alpha + 2H^\alpha(x, \dot{x}) = 0.$$

Тогда, используя связность $G_{\beta\gamma}^{\alpha}(x, \dot{x})$, эти уравнения можно записать в форме геодезических [11]

$$\ddot{x}^{\alpha} + G_{\beta\gamma}^{\alpha} \dot{x}^{\beta} \dot{x}^{\gamma} = 0.$$

Нетрудно заметить, что следующая присоединенная связность без кручения

$$(12) \quad \Phi_{\beta\gamma}^{\alpha} = H_{\beta\gamma}^{\alpha} + F C_{\beta\gamma}^{\alpha}, \quad C_{[\beta\gamma]}^{\alpha} = 0,$$

согласно условия $C_{\beta\gamma}^{\alpha} \dot{x}^{\gamma} = 0$ Э. Картана и теоремы Эйлера об однородных функциях не меняет форму геодезических Бервальда, причем свертка $\Phi_{\beta\gamma}^{\alpha}(x, \dot{x})$ с $\dot{x}^{\beta} \dot{x}^{\gamma}$ дает $H^{\alpha}(x, \dot{x})$, т. е.

$$\Phi_{\beta\gamma}^{\alpha} \dot{x}^{\beta} \dot{x}^{\gamma} = H^{\alpha}.$$

Если в (12) тензор $C_{\beta\gamma}^{\alpha} = 0$, то получим обычную связность Бервальда. Следовательно, (12) является одним из обобщений классической связности Бервальда (11).

2. Рассмотрим некоторые применения присоединенной связности $\Phi_{\beta\gamma}^{\alpha}(x, p)$ и объекта $H_{\beta}^{\alpha}(x, p)$ в задачах дифференциальной геометрии. Здесь требованием выполнения некоторых условий на производные Ли от $\Phi_{\beta\gamma}^{\alpha}(x, p)$, $H_{\beta}^{\alpha}(x, p)$ вводятся три класса автоморфизмов в пространствах $\Gamma_{n,p}$.

А. Совокупность бесконечно малых преобразований

$$\bar{x}^{\alpha} = x^{\alpha} + V^{\alpha}(x) d_{\tau},$$

определяемых требованием сохранения объекта присоединенной связности $\Phi_{\beta\gamma}^{\alpha}(x, p)$ при дифференцированиях Ли, т. е. $(D_L p^{\alpha} \equiv 0)$ [7]

$$(13) \quad D_L \Phi_{\beta\gamma}^{\alpha} = 0,$$

назовем *автоморфизмом первого класса*, где D_L — символ дифференцирования Ли вдоль поля вектора $V^{\alpha}(x)$.

Из (5) на основании (13), получим условие

$$(14) \quad D_L H_{\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha} D_L F,$$

которое является следствием (5) и (13).

Условие (13) через объекты $L_{\beta\gamma}^{\alpha}(x, p)$, $C_{\beta\gamma}^{\alpha}(x, p)$ Э. Картана, Б. Л. Лаптева и скалярной функции $F(x, p)$ иначе можно записать так $(n D_L F = D_L H_{\tau}^{\tau})$

$$D_L L_{\beta\gamma}^{\alpha} + F D_L C_{\beta\gamma}^{\alpha} + C_{\beta\gamma}^{\alpha} D_L F = 0.$$

Б. *Автоморфизмы второго класса* будем определять требованием сохранения объекта $H_{\beta}^{\alpha}(x, p)$ при дифференцированиях Ли, т. е.

$$(15) \quad D_L H_{\beta}^{\alpha} = 0$$

или (см. (5))

$$(16) \quad p^{\tau} D_L \Phi_{\tau\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha} D_L F.$$

В. Автоморфизмы третьего класса будем определять требованием сохранения объектов $\Phi_{\beta\gamma}^{\alpha}(x, p)$, $H_{\beta}^{\alpha}(x, p)$ при дифференцированиях Ли, т. е.

$$(17) \quad D_L \Phi_{\beta\gamma}^{\alpha} = 0, \quad D_L H_{\beta}^{\alpha} = 0.$$

Следующее условие

$$(18) \quad D_L F = 0$$

является следствием (17).

Требования (17), согласно (4), (5), (18), иначе через $L_{\beta\gamma}^{\alpha}(x, p)$, $C_{\beta\gamma}^{\alpha}(x, p)$ можно записать так

$$(19) \quad D_L L_{\beta\gamma}^{\alpha} + F D_L C_{\beta\gamma}^{\alpha} = 0.$$

Из рассмотренных здесь уравнений автоморфизмов при переходе к специальной усеченной связности (11) как частный случай следует уравнение автоморфизмов (коллинеаций) Кнебельмана [12] в связности общей геометрии путей Бервальда [11].

3. Инвариантность формы дифференциальных уравнений геодезических (10) пространства Финслера относительно присоединенной связности $\Phi_{\beta\gamma}^{\alpha}(x, \dot{x})$ позволяет построить шире определенные геодезические отображения пространства Финслера на пространства Римана. Действительно, следующая связность без кручения

$$(20) \quad \Phi_{\alpha\beta}^{\gamma} = \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + \delta_{\beta}^{\alpha} \psi_{\gamma} + \delta_{\gamma}^{\alpha} \psi_{\beta} + \dot{x}^{\alpha} a_{\beta\gamma} + M_{\beta\gamma}^{\alpha}$$

или (А. С. Ферзалиев [8])

$$(21) \quad L_{\beta\gamma}^{\alpha} = -F C_{\beta\gamma}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + \delta_{\beta}^{\alpha} \psi_{\gamma} + \delta_{\gamma}^{\alpha} \psi_{\beta} + \dot{x}^{\alpha} a_{\beta\gamma} + M_{\beta\gamma}^{\alpha}$$

отображает геодезические (10) пространства Финслера в геодезические

$$\ddot{x}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \dot{x}^{\beta} \dot{x}^{\gamma} = \lambda \dot{x}^{\alpha}$$

пространства Римана, где $\psi_{\alpha}(x, \dot{x})$, $M_{\beta\gamma}^{\alpha}(x, \dot{x})$ — тензоры нулевого измерения относительно $\dot{x}^{\alpha}$, $a_{\alpha\beta}(x, \dot{x})$ — произвольный симметрический тензор минус первого измерения относительно $\dot{x}^{\alpha}$, $L_{\beta\gamma}^{\alpha}(x, \dot{x})$ и $C_{\beta\gamma}^{\alpha}(x, \dot{x})$ — объекты связности Картана, $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}(x)$ — связность риманова пространства, $F(x, \dot{x})$ — скалярная функция плюс первого измерения относительно $\dot{x}^{\alpha}$, причем

$$M_{\beta\gamma}^{\alpha} \dot{x}^{\beta} \dot{x}^{\gamma} = 0.$$

Если в некоторой аффинной системе координат $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \stackrel{*}{=} 0$, то получим связность

$$(22) \quad L_{\beta\gamma}^{\alpha} \stackrel{*}{=} -F C_{\beta\gamma}^{\alpha} + \delta_{\beta}^{\alpha} \psi_{\gamma} + \delta_{\gamma}^{\alpha} \psi_{\beta} + \dot{x}^{\alpha} a_{\beta\gamma} + M_{\beta\gamma}^{\alpha},$$

являющуюся одним из аналогов проективно-евклидовой связности.

Если в (21):

$$\psi_{\alpha} = \psi_{\cdot\alpha} = \frac{\partial \psi}{\partial \dot{x}^{\alpha}}, \quad a_{\beta\gamma} = \psi_{\cdot\beta\gamma} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \dot{x}^{\beta} \partial \dot{x}^{\gamma}}, \quad M_{\beta\gamma}^{\alpha} = 0,$$

т. е. следующая связность без кручения (см. также (11))

$$(23) \quad G_{\beta\gamma}^{\alpha*} = -FC_{\beta\gamma}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + \delta_{\beta}^{\alpha}\psi_{\cdot\gamma} + \delta_{\gamma}^{\alpha}\psi_{\cdot\beta} + \dot{x}^{\alpha}\psi_{\cdot\beta\gamma},$$

отображает геодезические общей геометрии путей в геодезические риманова пространства, где $\psi(x, \dot{x})$ — скаляр.

Из (23) при $C_{\beta\gamma}^{\alpha} = 0$ и $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha*} = 0$ как частный случай следует проективно-плоская связность Кнебельмана [12].

Литература

- [1] Б. Л. Лаптев, Производная Ли деля объектов, являющихся функциями точки и направления. — *Изв. физ.-матем. о-ва при Казан. ун-те*, 1938, сер. 3, т. 10, с. 3 — 38.
- [2] Б. Л. Лаптев, Ковариантный дифференциал и теория дифференциальных инвариантов в пространстве тензорных опорных элементов. — *Уч. зап. Казан. ун-та*, 1958, т. 118, кн. 4, 75—147.
- [3] Б. Л. Лаптев, Производная Ли в обобщенных пространствах. (Резюме докладов 9. IV и 23. IV 1946). *Тр. Семин. по векторн. и тензорн. анализу, МГУ*, 1949, 7, 10.
- [4] E. CARTAN, Les espaces de Finsler. — *Actualite's* 79, Paris, 1934.
- [5] E. CARTAN, Les espaces de Finsler. *Тр. Семин. по векторн. и тензорн. анализу, МГУ*, 1937, 4, 90—94.
- [6] А. С. Ферзалиев, Проективное отображение пространства линейных элементов общей связности. — *Материалы IV Прибалтийск. геометрич. конф. Тарту*, 1973, с. 131—132.
- [7] А. С. Ферзалиев, Геодезические отображения и коллинеация пространств линейных элементов, гиперплоскостных элементов. — Пенза, 1938. — 32 с. — *Рукопись представлена Пензен. инж.-строит. ин-том. Деп. в ВИНТИ* 21 дек. 1983, № 6899—83.
- [8] А. С. Ферзалиев, Геодезические отображения пространств линейных элементов общей связности. — *«Изв. вузов. Мат.»*, 1984, №2, с. 76—78 (рус.)
- [9] В. И. Близникас, Неголономное дифференцирование Ли и линейные связности в пространстве опорных элементов. *Liet. matem. rinkinys, Lit. matem. сб.*, 1966, 6, №2, 141—208.
- [10] J. DOUGLAS, The general geometry of paths. — *Ann. Math.*, 1928, V. 29, №2, p. 143—168.
- [11] L. BERWALD, Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus. — *Math. Z.*, 1926, 25, 40—73.
- [12] M. S. KNEBELMAN, Collineations and motions in generalized spaces. — *Amer. J. Math.* 1929, V. 51, p. 527—564.
- [13] А. С. Ферзалиев, Проективное отображение и специальные типы пространств линейных элементов общей связности, II. — *«Изв. вузов. Мат.»*, 1976, № 2, с. 114—118.
- [14] А. С. Ферзалиев, Проективное отображение и специальные типы пространств линейных элементов общей связности, I. — *«Изв. вузов. Мат.»*, 1975, № 2, с. 87—91.
- [15] O. VARGA, Normalkoordinaten in allgemeinen Räumen und ihre Verwendung zur Bestimmung sämtlicher Differentialinvarianten, *Comptes Rendus de I Congrès des Math. Hongrois*, 1950, 147—162.
- [16] A. MOÓR, Übertragungstheorie bezüglich der allgemeinen Linienelementtransformationen, *Publ. Math. Debrecen*, 13, 263—287.
- [17] A. RAPCSÁK, Über die Begründung der lokalen metrischen Differentialgeometrie, *Publ. Math. Debrecen*, 7, 382—393.
- [18] GY. SOÓS, Über Gruppen von Automorphismen in affinzusammenhängenden Räumen von linienelementen, *Publ. Math. Debrecen*, 4, 294—302.
- [19] L. TAMÁSSY—S. BÁCSÓ, On quasi — autoparallel curves in tensorially connected spaces, *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, 31 (Differential Geometry), 1979, 725—737.

(Поступило 11, XI. 1986 г.)