

E_1 -планарные отображения пространств аффинной связности без кручения⁺

Ш. БАЧО (Дебрецен)—Л. ВЕРХОЦКИ (Будапешт)*

К восьмидесятилетию юбилею профессора Бела Барна

1. Введение

Н. С. Синюков [1] определил и рассмотрел почти автопараллельные отображения пространств аффинной связности без кручения A_n , являющиеся обобщениями автопараллельных отображений вышеуказанных пространств. При исследовании их возникли так называемые специальные почти автопараллельные кривые, назвал их Синюковым F -кривыми и Φ -кривыми.

В настоящей работе мы введём понятие E_1 -планарных кривых в A_n (имеющем поле направлений), являющихся обобщениями предыдущих Φ -кривых, и дадим уравнения E_1 -планарных кривых. После определения E_1 -планарных отображений между вышеуказанными пространствами получим необходимое и достаточное условие для существования E_1 -планарных отображений. Докажем, что при E_1 -планарных отображениях поле направлений сохраняется.

Наши рассуждения имеют общие характеры с исследованием F -кривых ([2]), [3]).

2. E_1 -планарные кривые

Пусть задано n -мерное пространство аффинной связности без кручения A_n ($n > 2$) с объектами связности $\Gamma_{ij}^{h(2)}$, и в A_n поле одномерных подпространств касательных пространств, то есть поле направлений E_1 . Так A_n назовём пространством, имеющим поле направлений, и обозначим его через $A_n(E_1)$. Возьмём в этом пространстве систему координат $(x^1, \dots, x^n)$ и контравариантное векторное поле $\varphi^h(x)$, определяющее поле направлений пространства. Предполага-

⁺ Настоящая работа была финансирована фондом ОТКА, номер 1240, 1988.

* S. Bácsó (Debrecen)—L. Verhóczy (Budapest)

¹ см. [1] IV. Глава

² Латинские индексы принимают значения от 1 до n .

ется во всех рассуждениях, что все изучаемые функции являются достаточно гладкими.

Определение 1. Кривая пространства $A_n(E_1)$ называется E_1 -планарной, если вектор, полученный при параллельном пересечении любого касательного вектора кривой вдоль неё, в каждой точке кривой находится в площадке, образованной касательным вектором и вектором φ^h .

Пусть задана кривая $x^h = x^h(t)$, где t -параметр. $\lambda^h(t) := \frac{dx^h}{dt}$ является касательным вектором кривой $x^i(t)$. Из Определения 1. следует, что кривая $x^h(t)$ является E_1 -планарной тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$(1) \quad \frac{D\lambda^h}{dt} = a(t)\lambda^h + b(t)\varphi^h(x(t)),$$

где $a(t)$, $b(t)$ произвольные функции. Знак $\frac{D}{dt}$ обозначает абсолютную производную вдоль кривой по связности A_n .

Непосредственно следует, что при любой E_1 -планарной кривой $x^h = x^h(t)$ можно выбрать новый параметр τ , по закону $t = f(\tau)$, для которого

$$\tilde{x}(\tau) := x^h(f(\tau)), \quad \tilde{\lambda}^h := \frac{d\tilde{x}^h}{d\tau},$$

и на основании (1) получаем

$$(2) \quad \frac{D\tilde{\lambda}^h}{d\tau} = \tilde{b}(\tau)\varphi^h$$

при некоторой функции $\tilde{b}(\tau)$, то есть функция $\tilde{a}(\tau)$ обращается в нуль. Параметр τ E_1 -планарной кривой является каноническим.

Рассмотрим подробно уравнения (1), получаем

$$\frac{d^2 x^h}{dt^2} + \Gamma_{ab}^h(x(t)) \frac{dx^a}{dt} \frac{dx^b}{dt} = a(t) \frac{dx^h}{dt} + b(t) \varphi^h(x(t)).$$

В этих уравнениях функции $a(t)$ и $b(t)$ произвольные, поэтому, учитывая [2], можно показать, что из любой точки пространства $A_n(E_1)$ в каждом направлении, отличным от направления φ^h , исходит множество E_1 -планарных кривых. Очевидно, что автопараллельные кривые при любом поле направлений пространства являются и E_1 -планарными кривыми.

3. E_1 -планарные отображения

Рассмотрим отображение L пространства $A_n(E_1)$ на другое пространство $\bar{A}_n(\bar{E}_1)$ в общей по отображению L системе координат $(x^1, \dots, x^n)$, и обозначим его в дальнейшем с $L: A_n(E_1) \rightarrow \bar{A}_n(\bar{E}_1)$. При изучении дифференциала отображения L получаем что, для поля направлений первого пространства соответствует некоторое поле одномерных подпространств второго пространства.

Определение 2. Отображение $L: A_n(E_1) \rightarrow \bar{A}_n(\bar{E}_1)$ назовём *сохраняющим поле направлений*, если дифференциал отображения L , индуцированное им, переносит поле направлений первого пространства в поле направлений второго пространства.

Обозначим с $\varphi^h(x)$ поле направлений пространства $A_n(E_1)$, и с $\bar{\varphi}^h(x)$ поле направлений пространства $\bar{A}_n(\bar{E}_1)$. Отображение L является сохраняющим поле направлений тогда и только тогда, когда существует функция $g(x)$ ($g(x) \neq 0$), при которой выполняются следующие уравнения

$$(3) \quad \bar{\varphi}^h(x) = g(x)\varphi^h(x).$$

Определение 3. Отображение $L: A_n(E_1) \rightarrow \bar{A}_n(\bar{E}_1)$, при котором каждая E_1 -планарная кривая пространства $A_n(E_1)$ переходит в E_1 -планарную кривую пространства $\bar{A}_n(\bar{E}_1)$, назовём E_1 -планарным.

Лемма 1. В касательном пространстве некоторой точки пространства A_n векторы ξ^h, φ^h, η^h (η не нулевой вектор) являются линейно зависимыми тогда и только тогда, если удовлетворяются уравнения

$$(4) \quad \xi^{[h}\eta^{i]}\varphi^{[l}\eta^{j]} - \xi^{[l}\eta^{j]}\varphi^{[h}\eta^{i]} = 0,$$

где квадратная скобка обозначает альтернацию.

Доказательство. Если векторы ξ^h, φ^h, η^h являются линейно зависимыми, тогда один вектор из них выражается из других, поэтому соотношение (4) тождественно удовлетворяется.

Нооборот, предположим, что (4) имеет место. Тогда используя следующее обозначение $p^{hl} := \xi^h\varphi^l - \xi^l\varphi^h$, из (4) даётся

$$p^{hl}\eta^i\eta^j + p^{li}\eta^j\eta^h + p^{ij}\eta^h\eta^l + p^{jh}\eta^l\eta^i = 0.$$

Из этих уравнений в специальном случае $i=j$ получаем

$$(5) \quad \eta^i(p^{hl}\eta^i + p^{li}\eta^h + p^{ih}\eta^l) = 0.$$

Так как η^h не нулевой вектор, всегда можно вводить преобразование координат в пространстве A_n , чтобы в новой системе координат все компоненты вектора η^h отличались от нуля. Поэтому на основании (5) следует, что

$$(6) \quad p^{hl}\eta^i + p^{li}\eta^h + p^{ih}\eta^l = 0.$$

Принимая во внимание выражение тензора p^{hl} , (6) имеет следующий вид

$$\begin{vmatrix} \xi^h & \varphi^h & \eta^h \\ \xi^1 & \varphi^1 & \eta^1 \\ \xi^i & \varphi^i & \eta^i \end{vmatrix} = 0,$$

из которого получается, что ξ^h, φ^h, η^h являются зависимыми.

Возьмём отображение $L: A_n(E_1) \rightarrow \bar{A}_n(\bar{E}_1)$ в общей по отображению системе координат, и функции $\Gamma_{ij}^h(x), \bar{\Gamma}_{ij}^h(x)$ -объекты аффинной связности пространств $A_n(E_1), \bar{A}_n(\bar{E}_1)$. Тензор $P_{ij}^h(x) := \bar{\Gamma}_{ij}^h(x) - \Gamma_{ij}^h(x)$ является тензором деформации отображения L .

Теорема 1. *Отображение $L: A_n(E_1) \rightarrow \bar{A}_n(\bar{E}_1)$, сохраняющее поле направлений, является E_1 -планарным тогда и только тогда, если существуют ковариантное векторное поле $\psi_i(x)$ и симметричное тензорное поле $S_{ij}(x)$, для которых выполняются следующие уравнения*

$$(7) \quad P_{ij}^h = \psi_i \delta_j^h + \psi_j \delta_i^h + S_{ij} \varphi^h.$$

Доказательство. 1. *Необходимость.* Рассмотрим в пространстве $A_n(E_1)$ E_1 -планарную кривую, заданную функциями $x^h = x^h(t)$. Так как кривая $x^i(t)$ в пространстве $\bar{A}_n(\bar{E}_1)$ тоже является $\bar{E}_1$ -планарной, получается

$$(\bar{1}) \quad \frac{d\lambda^h}{dt} + \bar{\Gamma}_{ab}^h \lambda^a \lambda^b = \bar{a}(t) \lambda^h + \bar{b}(t) \bar{\varphi}^h,$$

где $\bar{a}(t)$ и $\bar{b}(t)$ — некоторые функции. Из (1) и $(\bar{1})$ вследствие соотношения (3) получаем, что при некоторых функциях $\sigma(t)$ и $\varrho(t)$ справедливо

$$(8) \quad P_{pq}^h(x(t)) \lambda^p \lambda^q = \sigma(t) \lambda^h + \varrho(t) \varphi^h.$$

Из любой точки пространства $A_n(E_1)$ в каждом направлении исходит по крайней мере одна E_1 -планарная кривая, поэтому вследствие (8) существуют функции $\sigma(x, \lambda)$, $\varrho(x, \lambda)$, вместе которыми тензор деформации тождественно удовлетворяет условию

$$(9) \quad P_{pq}^h(x) \lambda^p \lambda^q = \sigma(x, \lambda) \lambda^h + \varrho(x, \lambda) \varphi^h$$

относительно переменных x^h, λ^h .

Непосредственно следует из (9), что

$$(10) \quad T_{pqrs}^{hilj} \lambda^p \lambda^q \lambda^r \lambda^s = 0,$$

где тензор T_{pqrs}^{hilj} имеет вид

$$T_{pqrs}^{hilj} := P_{pq}^{[h} \delta_r^{i]} \varphi^{[l} \delta_s^{j]} - P_{pq}^{[l} \delta_r^{j]} \varphi^{[h} \delta_s^{i]}.$$

Уравнения (10) выполняются при любом векторном поле $\lambda^h(x)$, поэтому имеет место

$$(11) \quad T_{(pqrs)}^{hilj} = 0,$$

где знак «()» обозначает симметризацию.

Рассмотрим векторное поле $\eta^h(x)$, чтобы векторы φ^h, η^h в каждой точке являлись независимыми. В дальнейшем вводим следующие обозначения: $P^h := P_{pq}^h \eta^p \eta^q$, $P_p^h := P_{pq}^h \eta^q$. Принимая во внимание (9) и линейную независимость векторов φ^h, η^h , получается, что однозначно существуют функции $a(x), b(x)$, при которых выполняется

$$(12) \quad P^h = 2a\eta^h + 2b\varphi^h.$$

После свёртывания уравнений (11) с векторами η^q, η^r, η^s , используя (12) в полученных уравнениях, находим

$$(13) \quad \hat{P}_p^{[h} \eta^{i]} \varphi^{[l} \eta^{j]} - \hat{P}_p^{[l} \eta^{j]} \varphi^{[h} \eta^{i]} = 0,$$

где $\hat{P}_q^h := P_q^h - a\delta_p^h$. Учитывая Лемму 1. и соотношение (13), получаем, что одноз-

начно существуют такие ковариантные векторные поля $a_p(x)$, $b_p(x)$, для которых справедливы следующие уравнения

$$(14) \quad P_p^h - a_p \delta_p^h = a_p \eta^h + b_p \varphi^h.$$

Свёртывая (11) с векторами η^r , η^s и принимая во внимание соотношения (12), (14), даётся

$$(15) \quad \hat{P}_{pq}^{[h} \eta^{i]} \varphi^{[l} \eta^{j]} - \hat{P}_{pq}^{[l} \eta^{j]} \varphi^{[h} \eta^{i]} = 0,$$

где $\hat{P}_{pq}^h := P_{pq}^h - a_p \delta_q^h - a_q \delta_p^h$. Из (15) вследствие Леммы 1. следует, что однозначно существуют такие симметричные тензорные поля $a_{pq}(x)$ и $b_{pq}(x)$, при которых выполняется

$$(16) \quad P_{pq}^h = a_p \delta_q^h + a_q \delta_p^h + a_{pq} \eta^h + b_{pq} \varphi^h.$$

Покажем, что вышеуказанный тензор a_{pq} равен нулю. Свёртывая (14) с η^p , и сравнивая полученный результат с соотношением (12), находим что $a = a_p \eta^p$.

Если свёртываем (16) с η^q , и используем предыдущее соотношение, тогда, принимая во внимание (14), даётся $a_{pq} \eta^q = 0$.

Выражение тензора P_{pq}^h с помощью уравнений (16) подставляя в (11), а потом полученные уравнения свёртывая с η^s , находим

$$(17) \quad U_{(pqr)}^{hilj} = 0,$$

где $U_{pqr}^{hilj} := a_{pq} (\eta^{[h} \delta_r^{i]} \varphi^{[l} \eta^{j]} - \eta^{[l} \delta_r^{j]} \varphi^{[h} \eta^{i]})$. Возьмём векторное поле $\xi^h(x)$, для которого в каждой точке векторы φ^h , η^h , ξ^h являются линейно независимыми. Из Леммы 1. следует следующее соотношение

$$\eta^{[h} \xi^{i]} \varphi^{[l} \eta^{j]} - \eta^{[l} \xi^{j]} \varphi^{[h} \eta^{i]} \neq 0.$$

Свернём (17) с начала с $\xi^p \xi^q \xi^r$, а потом с $\xi^q \xi^r$, а наконец с ξ^r , и используем предыдущее неравенство. Тогда получаем равенство $a_{pq} \xi^p \xi^q = 0$, после этого $a_{pq} \xi^q = 0$, а наконец равенство $a_{pq} = 0$. Поэтому из (16) следует, что условие (7) удовлетворяется.

II. *Достаточность.* Предположим, что (7) выполняется, и рассмотрим в пространстве $A_n(E_1)$ E_1 -планарную кривую, заданную функциями $x^h = x^h(t)$, которые удовлетворяют уравнениям (1). Свернём (7) с $\lambda^i \lambda^j \left(\lambda^i := \frac{dx^i}{dt} \right)$, потом сложим полученное соотношение и (1). Таким образом, используя (3), получаем (I), где

$$\bar{a}(t) = a(t) + 2\psi_p \lambda^p, \quad \bar{b}(t) = \frac{1}{g} (b(t) + S_{pq} \lambda^p \lambda^q).$$

Итак кривая $x^h(t)$ в пространстве $\bar{A}_n(\bar{E}_1)$ является $\bar{E}_1$ -планарной.

Теорема 1. доказана.

Отметим, что векторное поле $\psi_i(x)$ и тензорное поле $S_{ij}(x)$ однозначно существуют.

Теорема 2. Если отображение $L: A_n(E_1) \rightarrow \bar{A}_n(\bar{E}_1)$ является E_1 -планарным, тогда при отображении L поле направлений по необходимости сохраняется.

Доказательство. Предполагается, что отображение L является E_1 -планарным, но не сохраняет поле направлений. При E_1 -планарном отображении L каждая автопараллельная кривая пространства $A_n(E_1)$ переходит в $\bar{E}_1$ -планарную кривую пространства $\bar{A}_n(\bar{E}_1)$. Из любой точки пространства $A_n(E_1)$ в каждом направлении исходит единственная автопараллельная кривая, поэтому на основании доказательства Теоремы 1. существуют такие функции $\mu(x, \lambda)$, $\chi(x, \lambda)$, при которых уравнения

$$(9) \quad P_{pq}^h(x) \lambda^p \lambda^q = \mu(x, \lambda) \lambda^h + \chi(x, \lambda) \varphi^h$$

тождественно выполняется относительно переменных x^h, λ^h . Равным образом, как в доказательстве Теоремы 1., можно показать, что вследствие (9) существуют векторное поле $\bar{\psi}_i(x)$ и тензорное поле $\bar{S}_{ij}(x)$ при которых справедливы уравнения

$$(7) \quad P_{ij}^h = \bar{\psi}_i \delta_j^h + \bar{\psi}_j \delta_i^h + \bar{S}_{ij} \bar{\varphi}^h.$$

По предложению отображение L не сохраняет поле направлений E_1 , поэтому существует одна такая точка x_0 , в которой векторы $\varphi^h(x_0)$, $\bar{\varphi}^h(x_0)$ являются линейно независимыми. Рассмотрим в пространстве $A_n(E_1)$ E_1 -планарную кривую, заданную функциями $x^h = x^h(t)$, которая отлична от автопараллельной кривой, и проходит через точку x_0 ($x^h(t_0) = x_0^h$). Потребуем, чтобы касательный вектор кривой $x^h(t)$ в точке x_0 и векторы $\varphi^h(x_0)$, $\bar{\varphi}^h(x_0)$ являлись линейно независимыми, далее значение функции $b(t)$ при параметре t_0 отличалось от нуля. Тогда из (1), используя (7), в точке x_0 получаем следующее соотношение:

$$\frac{\bar{D} \lambda^h}{dt} t_0 = \bar{a}_0 \lambda^h(t_0) + \bar{b}_0 \bar{\varphi}^h(x_0) + b_0 \varphi^h(x_0),$$

в котором $\bar{a}_0 = a(t_0) + 2\bar{\psi}_p \lambda^p$, $\bar{b}_0 = \bar{S}_{pq} \lambda^p \lambda^q$, $b_0 = b(t_0)$. $\left(\frac{\bar{D}}{dt}\right)$ обозначает абсолютную производную вдоль кривой $x^h(t)$ по объектам связности $\bar{A}_n$. Вследствие линейной независимости векторов $\varphi^h(x_0)$, $\bar{\varphi}^h(x_0)$, $\lambda^h(t_0)$ вектор $b_0 \varphi^h(x_0)$ не выражается из векторов $\bar{\varphi}^h(x_0)$, $\lambda^h(t_0)$, и так уравнения (I) не удовлетворяются. То кривая $x^h(t)$ в пространстве $\bar{A}_n(\bar{E}_1)$ не является E_1 -планарной. Итак если отображение L не сохраняет поле направлений, тогда L не является E_1 -планарным. Теорема 2. доказана.

Литература

- [1] Н. С. Синюков, Геодезические отображения римановых пространства. Москва, Наука, 1979.
- [2] Й. Микеш—Н. С. Синюков, О квазипланарных отображениях пространств аффинной связности. Известия ВУЗ, 248 (1983), 55—61.
- [3] Т. OTSUKI—Y. TASHIRO, On curves in Kählerian spaces. Math. J. Okayama Univ. 3, (1954), 57—78.

(Поступило 20, I. 1987)