

Степени неприводимых характеров и нормальное строение конечных групп

Я. Г. БЕРКОВИЧ (Ростов на Дону)

Пусть p -простой делитель порядка конечной группы G (в заметке рассматриваются только конечные группы). Дж. Томпсон [1, следствие 12.3] показал, что если степени всех нелинейных неприводимых характеров группы G (рассматриваются только комплексные характеры) делятся на p , то G — p -нильпотентная группа, т. е. имеет нормальное p -дополнение. Оказывается, эта теорема Томпсона является легким следствием такой теоремы Тейта [1, теорема 6.31]: Если $G=PN$, $P \in \text{Syl}_p(G)$, N нормальна в G , то из $P \cap N \cong \Phi(P)$ ($\Phi(P)$ -подгруппа Фраттини группы P) вытекает p -нильпотентность G . Эту теорему Тейта можно сформулировать на языке теории характеров так: Если $P \in \text{Syl}_p(G)$ и любой характер из $\text{Irr}(P)$ с ядром, содержащим $\Phi(P)$, допускает продолжение на G , то G имеет нормальное p -дополнение (обратное тоже верно). Мы сейчас покажем, что справедливо такое

Предложение 1. Пусть $P \in \text{Syl}_p(G)$, и для любого неглавного линейного характера $\lambda \in \text{Irr}(P)$ с $\Phi(P) \subseteq \ker \lambda$ степени всех нелинейных неприводимых компонент индуцированного характера λ^G делятся на p , то G — p -нильпотентная группа.

Доказательство. Пусть λ -произвольный характер P , о котором идёт речь в условии. Так как $\lambda^G(1) = |G:P| \not\equiv 0 \pmod{p}$ и степени всех нелинейных неприводимых компонент характера λ^G делятся на p , то среди неприводимых компонент характера λ^G имеется линейная компонента λ^* , и λ^* -продолжение λ на G . Поэтому G p -нильпотентна по варианту теоремы Тейта.

Существует такое обобщение теоремы Тейта, принадлежащее Рокетту [2]: Пусть π -некоторое множество простых чисел, P — π -холловская подгруппа группы G , $G=PN$, где N нормальна в G . Если $P \cap N \cong \Phi(P)$, то N — π -нильпотентна, т. е. имеет нормальное π -дополнение. Поэтому естественно применить теорему Рокетта для поиска аналога только что доказанной теоремы, дающего критерий π -нильпотентности группы на языке степеней её неприводимых характеров. Это — основная цель заметки.

Характер χ группы G назовём π -нильпотентным, если $G/\ker \chi$ — π -нильпотентная группа. Понятно, что линейный характер π -нильпотентен. Систему $X \subseteq \text{Irr}(G)$ назовём точной, если $\bigcap_{\chi \in X} \ker \chi = I$. Если система X точна, то и $X^\# = X - \{1_G\}$, где 1_G -главный характер группы G , тоже точна.

Пусть N нормальна в $H \cong G$. Характер χ секции H/N мы рассматриваем, когда это необходимо, и как характер H . Через $\text{Irr}(\chi)$ обозначается множество всех неприводимых компонент характера χ . Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей $|G|$ -порядка группы G .

Основная теорема. Пусть N — π -холловская подгруппа в $H \cong G$; q^2 -наивысшая степень простого числа q , делящая индекс $|G: N|$; X -точная система характеров в $\text{Irr}(N/\Phi(N))$. Предположим, что для любого $\lambda \in X^\#$ существует такое $p \in \pi \cap \pi(N)$, зависящее от λ , что из $\chi \in \text{Irr}(\lambda^G)$ следует $\chi(1) \equiv 0 \pmod{p^{1+\alpha_p} \cdot \lambda(1)}$, если χ не является π -нильпотентным характером степени $\lambda(1)$. Тогда H — π -нильпотентная подгруппа. Если, к тому же, N — π -холловская подгруппа в G , то последняя π -нильпотентна.

Доказательство. Можем считать, что $N > I$. Пусть $\lambda \in X^\#$. Тогда $\lambda^G(1) = |G: N| \lambda(1)$ не делится на $p^{1+\alpha_p} \cdot \lambda(1)$ для любого $p \in \pi \cap \pi(N)$. Пусть $\chi \in \text{Irr}(\lambda^G)$. Если χ не является π -нильпотентным характером степени $\lambda(1)$, то по условию $\chi(1)$ делится на $p^{1+\alpha_p} \cdot \lambda(1)$ (p зависит только от λ). Так как степени всех неприводимых компонент характера λ^G не меньше $\lambda(1)$, то в $\text{Irr}(\lambda^G)$ имеется π -нильпотентный характер ψ степени $\lambda(1)$. По закону взаимности $\psi_N = \lambda$, откуда $\lambda = \psi_N = (\psi_N)_N$. Поэтому ψ — π -нильпотентное продолжение λ на G , а так как

$$H/\ker \psi_H = H/H \cap \ker \psi \cong H \ker \psi / \ker \psi \cong G/\ker \psi,$$

то ψ_H — π -нильпотентное продолжение λ на H . Итак, любой $\lambda \in X^\#$ имеет π -нильпотентное продолжение λ^* на G (таких продолжений может быть несколько, но мы фиксируем лишь одно из них), и π -нильпотентное продолжение λ_N^* на N . Положим $M^* = \bigcap_{\lambda \in X^\#} \ker \lambda^*$. Так как G/M^* изоморфна подгруппе

прямого произведения π -нильпотентных групп $G/\ker \lambda^*$ ($\lambda \in X^\#$), то G/M^* — π -нильпотентная группа. Пусть M/M^* -нормальное π -дополнение в G/M^* . Тогда

$$M \cap N = M^* \cap N = N \cap \left(\bigcap_{\lambda \in X^\#} \ker \lambda^* \right) = \bigcap_{\lambda \in X^\#} (\ker \lambda^* \cap N) = \bigcap_{\lambda \in X^\#} \ker \lambda = \Phi(N).$$

Если N — π -холловская подгруппа в G , то M имеет нормальное π -дополнение C (по теореме Рокетта), которое также является нормальным π -дополнением в G . В общем случае

$$N \cap (H \cap M) = (N \cap H) \cap M = N \cap M = \Phi(N),$$

так что снова по теореме Рокетта $H \cap M$ имеет нормальное π -дополнение C_0 , являющееся нормальным π -дополнением в H . Теорема доказана.

Интересным моментом теоремы является то, что она даёт информацию о нормальном строении не обязательно нормальной подгруппы H .

Стоит отметить следствие, получающееся при $H = G$.

Следствие 1. Пусть N -нильпотентная π -холловская подгруппа группы G . Предположим, что для любого $\lambda \in \text{Irr}^\#(N/\Phi(N))$ существует $p \in \pi \cap \pi(N)$, зависящее от λ , и такое, что степени всех неприводимых нелинейных компонент характера λ^G делятся на p . Тогда G — π -нильпотентная группа.

Томпсон [1, задача 12.1] показал, что если степени неприводимых характеров группы G линейно упорядочены по делимости, то G имеет упорядоченную силовскую башню. Его доказательство даёт больше: то же заключение имеет место, если множество $\{\pi(\chi(1)) | \chi \in \text{Irr}(G)\}$ линейно упорядочено по включению; здесь $\pi(m)$ — множество всех простых делителей натурального числа m . Ниже мы усилим этот результат.

Пусть $\pi(G) = \pi_1 \cup \dots \cup \pi_{n+1}$ — разбиение. Группу G назовём $(*)$ -группой относительно этого разбиения, если

- (а) $\pi(\chi(1)) \subseteq \pi_1 \cup \dots \cup \pi_n$ для всех $\chi \in \text{Irr}(G)$.
- (б) G содержит нильпотентную π_i -холловскую подгруппу, $i \in \overline{1, n}$.
- (в) Положим $M = \{\chi(1) | \chi \in \text{Irr}(G), \chi(1) > 1\}$. Все числа из M делятся на $p_1 \in \pi_1$. Все числа из M , не являющиеся π_1 -числами, делятся на $p_2 \in \pi_2, \dots$. Все числа из M , не являющиеся $\pi_1 \cup \dots \cup \pi_{n-1}$ -числами, делятся на $p_n \in \pi_n$.

Скажем, что G имеет упорядоченную холловскую башню типа $\{\pi_1, \dots, \pi_{n+1}\}$, если $\pi(G) = \pi_1 \cup \dots \cup \pi_{n+1}$ -разбиение и G имеет такой ряд $G = G_0 > G_1 > \dots > G_n > G_{n+1} = I$ нормальных подгрупп, что $\pi(G_i/G_{i+1}) = \pi_{i+1}$ для всех $i \in \overline{0, n}$.

Следствие 2. Если G — $(*)$ -группа относительно разбиения $\pi(G) = \pi_1 \cup \dots \cup \pi_{n+1}$, то она имеет упорядоченную холловскую башню типа $\{\pi_1, \dots, \pi_{n+1}\}$, при этом её π_{n+1} -холловская подгруппа абелева.

Доказательство. Группа G имеет нормальное π_1 -дополнение G_1 по следствию 1. Если $\chi \in \text{Irr}(G)$ и $\chi_{G_1} = e(\varphi_1 + \dots + \varphi_t)$ -клиффордово разложение, то из теории Клиффорда следует, что e делит $|G: G_1|$, так что $\varphi_1(1) - \pi_1'$ -часть числа $\chi(1)$. Так как каждый $\varphi \in \text{Irr}(G_1)$ появляется в клиффордовом разложении некоторого неприводимого характера группы G , то из условия следует, что G_1 — $(*)$ -группа относительно разбиения $\pi(G_1) = \pi_2 \cup \dots \cup \pi_{n+1}$. Теперь утверждение о существовании холловской башни для G_1 следует по индукции, и, очевидно, первое утверждение следствия доказано. Утверждение о коммутативности π_{n+1} -холловской подгруппы группы G вытекает из того факта, что степени неприводимых характеров нормального делителя — делители подходящих степеней неприводимых характеров самой группы.

Предложение 2. Пусть $N \trianglelefteq G$, p -простой делитель $|G|$. Если p делит степени всех тех неприводимых характеров группы G , чьи ядра не содержат N , то N — p -нильпотентная подгруппа.

Доказательство. Заменяя, если нужно, N её нормальной оболочкой, можем, не уменьшая общности, предположить, что N нормальна в G . Пусть $P \in \text{Syl}_p(G)$. Предположим, что N не p -нильпотентна. Тогда по теореме Тейта $P \cap N \not\leq \Phi(P)$. Пусть λ — такой линейный характер P , что $P \cap N \not\leq \ker \lambda$ (так как $P' \leq \Phi(P)$, такой λ существует). Если $\chi \in \text{Irr}(\lambda^G)$, то $\lambda \in \text{Irr}(\chi_P)$ по закону взаимности. Так как $I_P \neq \lambda$, то $P \cap N \not\leq \ker \chi$. Тем более $N \not\leq \ker \chi$, и поэтому p делит $\chi(1)$ по условию. Но $\lambda^G(1) = |G: P| \not\equiv 0 \pmod{p}$, что невозможно, так как по доказанному степени всех неприводимых компонент характера λ^G делятся на p . Полученное противоречие доказывает предложение.

Следствие 3. Пусть N — пересечение ядер всех тех неприводимых характеров группы G , чьи степени не делятся на p . Тогда N — p -нильпотентная подгруппа.

Завершим заметку указанием нового подхода к доказательству теоремы Рокетта. Мы для этой цели будем использовать следующую теорему Томпсона о нормальном p -дополнении (см. теорему 22.7 в [3]): Пусть p -нечётное простое число, делящее порядок группы G и $P \in \text{Syl}_p(G)$. Если для каждой неединичной характеристической подгруппы P_1 в P её нормализатор в G имеет нормальное p -дополнение, то и G имеет нормальное p -дополнение.

Теорема А. Пусть $H, M \leq G$, M нормальная в G ; силовская p -подгруппа P из $M \cap H$ лежит в $\Phi(H)$ и является силовской p -подгруппой в M . Если $p > 2$, то M имеет нормальное p -дополнение.

Доказательство. Если $P \leq \bar{P} \in \text{Syl}_p(\Phi(H))$, то $P = \bar{P} \cap (M \cap H)$ нормальна в $M \cap H$ как пересечение двух H -допустимых подгрупп. Пусть T — существующее по теореме Шура—Цассенхауза дополнение к P в $M \cap H$; по этой же теореме все такие дополнения сопряжены в $M \cap H$. Поэтому по рассуждению Фраттини

$$H = N_H(T) \cdot (M \cap H) = N_H(T)TP = N_H(T)P \leq N_H(T)\Phi(H),$$

откуда $N_H(T) = H$ и T нормальна в H , а тем более в $M \cap H$. Следовательно, $M \cap H = P \times T$. Мы можем, не уменьшая общности, положить $G = MH$.

Предположим, что M не имеет нормального p -дополнения. Тогда по только что цитированной теореме Томпсона в P имеется неединичная характеристическая подгруппа P_0 такая, что $N_M(P_0)$ не имеет нормального p -дополнения. Так как P нормальна в H , то и P_0 нормальна в H . Следовательно, $H \leq N_G(P_0)$, и по модулярному закону

$$N_G(P_0) = H \cdot (M \cap N_G(P_0)) = H \cdot N_M(P_0).$$

Так как пересечения $H \cap N_M(P_0)$ и $H \cap M$ совпадают, мы можем, не уменьшая общности, предположить, что $H \cdot N_M(P_0) = G$. Тогда P_0 нормальна в G . Допустим, что $P_0 \not\leq \Phi(G)$. Тогда G содержит такую максимальную подгруппу L , что $LP_0 = G$, и поэтому по модулярному закону $H = P_0(H \cap L) \leq \Phi(H)(H \cap L)_0$ откуда $H \cap L = H$, $P_0 \leq H \leq L$ и $G = P_0L = L$, противоречие. Итак, $P_0 \leq \Phi(G)$. Мы имеем $G/P_0 = H/P_0 \cdot M/P_0$ и $H/P_0 \cap M/P_0 = (H \cap M)/P_0$, при этом силовская p -подгруппа P/P_0 пересечения $H/P_0 \cap M/P_0$ лежит в $\Phi(H/P_0)$. Предполагая, что теорема уже доказана для групп, чей порядок меньше $|G|$, мы заключаем, что M/P_0 имеет нормальное p -дополнение R/P_0 . Если R_1 - p -дополнение в R , то по теореме Шура—Цассенхауза и рассуждению Фраттини

$$G = N_G(R_1)R = N_G(R_1)R_1P_0 = N_G(R_1)P_0 \leq N_G(R_1)\Phi(G),$$

откуда $N_G(R_1) = R$ и R_1 -нормальное p -дополнение в M . Теорема доказана. Неизвестно, верна ли теорема А для $p = 2$.

Следующий вариант теоремы А допускает простое доказательство (при этом предположение о p не нужно).

Теорема В. Теорема А верна для произвольного p в случае, если M — p -разрешимая подгруппа.

Доказательство. как и ранее, ведётся индукцией по $|G|$. Если $O_{p'}(M) > I$, то $M/O_{p'}(M)$ имеет нормальное p -дополнение $T/O_{p'}(M)$ (мы применяем

индуктивное предположение к

$$G/O_{p'}(M) = HO_{p'}(M)/O_{p'}(M) \cdot M/O_{p'}(M);$$

легко проверяется, что эта факторгруппа удовлетворяет предположениям теоремы А). Тогда T -нормальное p -дополнение в M . Пусть $O_{p'}(M) = I$. Тогда $O_p(M) > I$, и, как и в теореме А, $O_p(M) \cong \Phi(G)$. Доказательство теперь завершается, как и в теореме А.

Отметим, что теоремы А, Б не являются следствиями теоремы Рокетта. Обратим также внимание на тот факт, что H в этих теоремах не обязана быть холловской подгруппой в G , а $H \cap M$ не обязана лежать в $\Phi(H)$ (и даже быть нильпотентной).

Литература

- [1] I. M. ISAACS, Character Theory of Finite Groups, N. J., Acad. Press, 1976.
- [2] P. ROQUETTE, Über die Existenz von Hall-Komplementen in endlichen Gruppen, *J. Algebra* **1** (1964), 342—346.
- [3] W. FEIT, Characters of Finite Groups, N. J., Benjamin, 1967.

(Поступило 17, VII. 1987)