

К теоремам Галлахера о нулях групповых характеров

Э. М. ЖМУДЬ (Харьков)

Пусть G -конечная неабелева группа: $\text{Irr}(G)$ -множество всех её неприводимых комплексных характеров; $T_\chi = \{g \in G | \chi(g) = 0\}$ -множество всех нулей характера $\chi \in \text{Irr}(G)$; $U_\chi = \{g \in G | |\chi(g)| = 1\}$; $N_\chi = \langle T_\chi \rangle$; $\Delta_\chi = G \setminus N_\chi$; $\text{Irr}_1(G) = \{\chi \in \text{Irr}(G) | N_\chi = G\}$ -множество всех неприводимых характеров 1-го рода группы G ; $\text{Irr}_2(G) = \text{Irr}(G) \setminus \text{Irr}_1(G)$ -множество всех неприводимых характеров 2-го рода группы G ; χ_H -ограничение характера χ на подгруппу H группы G .

Если $\chi \in \text{Irr}_2(G)$, то, как доказал Галлахер в статье [2], $\chi_{N_\chi} \in \text{Irr}(N_\chi)$ и $\Delta_\chi \subseteq U_\chi$. Там же доказано, что группа G порождается объединением множеств нулей всех её неприводимых характеров. В настоящей работе эти результаты усиливаются и дополняются. В частности, в ней доказана неприводимость ограничения характера $\chi \in \text{Irr}_2(G)$ на любую субнормальную подгруппу группы G , не содержащуюся в N_χ , а также — неприводимость его ограничения на коммутант группы G . В ней доказано также, что $\text{Irr}_1(G) \neq \emptyset$, т. е. группа G порождается нулями одного из её неприводимых характеров.*)

Дополним введенные выше обозначения: если $\emptyset \neq S \subseteq G$, $g \in G$, то $S^g = \{x^g = g^{-1}xg | x \in S\}$, $S^G = \bigcup_{g \in G} S^g$; $x^G = \{x\}^G$ — G -класс элемента $x \in G$; $0(g)$ -порядок элемента $g \in G$; $Z(G)$ -центр G ; G' -коммутант G ; $F(G)$ -подгруппа Фиттинга группы G ; $H_G = \bigcap_{g \in G} H^g$ -сердцевина подгруппы H группы G ; $\cong$ ($\subset$) — символ отношения «быть подгруппой (собственной подгруппой)»; $\text{Char}(G)$ -множество всех комплексных характеров группы G ; $\text{Ker } \chi$ -ядро характера χ ; $Z(\chi) = \{g \in G | |\chi(g)| = \chi(1)\}$; $\text{Lin}(G)$ -группа линейных характеров группы G ; $\text{Irr}^\#(G) = \text{Irr}(G) \setminus \text{Lin}(G)$; ψ^G -характер группы G , индуцированный характером ψ подгруппы $H \leq G$; если $N \triangleleft G$, $\psi \in \text{Char}(N)$, то ψ^g -характер подгруппы N G -сопряженный с ψ : $\psi^g(x) = \psi(gxg^{-1})$ ($g \in G, x \in N$); 1_G -главный характер группы G ; $\mathbb{C}$ -поле комплексных чисел; $\langle \theta_1, \theta_2 \rangle = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \theta_1(g) \overline{\theta_2(g)}$ -скалярное произведение функций $\theta_i: G \rightarrow \mathbb{C}$; $\mathbb{Z}$ -кольцо целых чисел. Символ $\subset$ всюду обозначает строгое включение.

1. В этом пункте предполагается, что $\chi \in \text{Irr}^\#(G)$.

Лемма 1. [1] $T_\chi \neq \emptyset$.

* Последний результат впервые доказан в [4]. В настоящей работе дается более простое доказательство.

Лемма 2. Множества T_χ и U_χ нормальны в G .

Лемма 3. Если $g \in U_\chi$, то $\chi(g)$ -корень из 1.

Доказательство. Модули целого алгебраического числа $\chi(g)$ и всех чисел алгебраически сопряженных с ним равны, как легко видеть, 1. Отсюда вытекает, на основании известной леммы Кронекера, что $\chi(g)$ —корень из 1.

Лемма 4. [2] (а) $\chi_{N_\chi} \in \text{Irr}(N_\chi)$; (б) $\Delta_\chi \subseteq U_\chi$.

Следствие 1. $Z(G) \subseteq Z(N_\chi) \subseteq Z(\chi_{N_\chi}) \subseteq Z(\chi)$. Если $\ker \chi = \{1\}$, то $Z(G) = Z(N_\chi) = Z(\chi_{N_\chi}) = Z(\chi)$.

Лемма 5. Пусть $u \in G$, $o(u) = p^\alpha$, где p -простое число, α -целое > 0 . Если $\Theta \in \text{Char}(G)$, то для любого $g \in G_G(u)$ имеет место сравнение $\Theta(ug)^{p^\alpha} \equiv \Theta(g)^{p^\alpha} \pmod{p}$ в кольце $\mathbf{R}$ всех целых алгебраических чисел.

Доказательство. Пусть $H = G_G(u)$, $\Theta_H = \psi_1 + \dots + \psi_k$, где $\psi_i \in \text{Irr}(H)$ ($i = 1, \dots, k$). Так как $u \in Z(H)$, то $\psi_i(u) = \varepsilon_i \psi_i(1)$, где ε_i -корень степени p^α из 1. Так как $g \in H$, то $\psi_i(ug) = \varepsilon_i \psi_i(g)$ ($i = 1, \dots, k$). Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} \Theta(ug)^{p^\alpha} &= \left(\sum_i \psi_i(ug) \right)^{p^\alpha} = \left(\sum_i \varepsilon_i \psi_i(g) \right)^{p^\alpha} \equiv \sum_i \psi_i(g)^{p^\alpha} \equiv \\ &\equiv \left(\sum_i \psi_i(g) \right)^{p^\alpha} \equiv \Theta(g)^{p^\alpha} \pmod{p}. \end{aligned}$$

Лемма 6. Если множество U_χ содержит хотя бы один p -элемент, то $\chi(1) \equiv \pm 1 \pmod{p}$.

Доказательство. Пусть $u \in U_\chi$, $o(u) = p^\alpha$ ($\alpha > 0$). Полагая $\Theta = \chi\bar{\chi}$, к силу леммы 5 будем иметь $\Theta(u)^{p^\alpha} \equiv \Theta(1)^{p^\alpha} \equiv \Theta(1) \pmod{p}$ в кольце $\mathbf{R}$. Так как $\Theta(u) = |\chi(u)|^2 = 1$, $\Theta(1) = \chi(1)^2$, то $\chi(1)^2 \equiv 1 \pmod{p}$ в $\mathbf{R}$, а потому и в $\mathbf{Z}$. Поэтому $\chi(1) \equiv \pm 1 \pmod{p}$.

Лемма 7. Если $\chi \in \text{Irr}_2(G)$ и p -простой делитель числа $|G/N_\chi|$, то $\chi(1) \equiv \pm 1 \pmod{p}$.

Доказательство. Пусть $P \in \text{Syl}_p(G)$. Тогда $P \cap \Delta_\chi \neq \emptyset$. Так как по лемме 4 $\Delta_\chi \subseteq U_\chi$, то $P \cap U_\chi \neq \emptyset$, откуда в силу леммы 6 $\chi(1) \equiv \pm 1 \pmod{p}$.

Следствие 2. $(\chi(1), |G/N_\chi|) = 1$.

Пусть $H_0 \triangleleft H < G$. Систему (G, H, H_0) назовем W -тройкой, если $H \cap H^t \leq H_0$ для любого $t \in G \setminus H$. По теореме Виланда подгруппа H обладает единственным нормальным дополнением N над подгруппой H_0 : $N \triangleleft G$, $N \cdot H = G$, $N \cap H = H_0$; при этом имеет место разбиение $G \setminus N = \bigcup_i (H \setminus H_0)^{t_i}$, где $\{t_i\}$ -полная система представителей правых смежных классов группы G по H . Подгруппу N назовем ядром W -тройки (G, H, H_0) . Из определения последней следует, что $N_G(H) = H$ и $H \setminus H_0$ -(TI)-подмножество.

Лемма 8. Пусть $\chi \in \text{Irr}_2(G)$, $\chi = \psi^G$, где $\psi \in \text{Irr}(H)$, $H < G$. Положим $H_0 = H \cap N_\chi$. Тогда (G, H, H_0) - W -тройка с ядром N_χ .

Доказательство. Так как $\chi(1)=|G:H|\psi(1)$, то в силу следствия 2 ($|G:H|, |G:N_\chi|=1$), откуда вытекает, что $N_\chi H=G$. Таким образом N_χ — нормальное дополнение подгруппы H над H_0 . Из $N_\chi H=G$ следует, что $G/N_\chi \cong H/H_0$. Отсюда вытекает, ввиду $N_\chi \neq G$, что $H_0 \neq H$. Обозначив $m=|G:H|$, получим

$$(1) \quad m|H_0| = |N_\chi|.$$

Пусть $g \in \Delta_\chi$. Так как $\chi(g) \neq 0$ и по формуле Фробениуса

$$\chi(g) = |H|^{-1} \sum_{t \in G} \dot{\psi}(tgt^{-1})$$

($\dot{\psi}$ -функция на G совпадающая с ψ на H и исчезающая на $G \setminus H$), то найдется элемент $t \in G$ такой, что $g \in H^t$. Поэтому $\Delta_\chi \subseteq H^G = \bigcup H^t$. Так как Δ_χ нормально, то $\Delta_\chi = \Delta_\chi \cap (\bigcup H^t) = \bigcup (\Delta_\chi \cap H^t) = \bigcup \Omega_\chi^t$, где $\Omega_\chi = H \cap \Delta_\chi = H \setminus H_0 = H \setminus N_\chi$. Отсюда следует в силу (1), что $|\Delta_\chi| \leq \sum |\Omega_\chi^t| = m|\Omega_\chi| = m(|H| - |H_0|) = |G| - |N_\chi| = |\Delta_\chi|$. Поэтому $|\bigcup \Omega_\chi^t| = \sum |\Omega_\chi^t|$, откуда вытекает, что подмножества Ω_χ^t/i ($i=1, \dots, m$) попарно не пересекаются и, следовательно, образуют разбиение множества Δ_χ . В дальнейшем считаем $t_1=1$. Пусть $t \in G \setminus H$. Тогда $t \in H^{t_i}$, где $i > 1$. Так как $\Omega_\chi H$ -инвариантно, то $\Omega_\chi \cap \Omega_\chi^t = \Omega_\chi \cap \Omega_\chi^{t_i} = \emptyset$. Так как, кроме того, $H_0 \cap \Omega_\chi^t = \Omega_\chi \cap H_0^t = \emptyset$, то

$$\begin{aligned} H \cap H^t &= (H_0 \cup \Omega_\chi) \cap (H_0^t \cup \Omega_\chi^t) = \\ &= (H_0 \cap H_0^t) \cup (H_0 \cap \Omega_\chi^t) \cup (\Omega_\chi \cap H_0^t) \cup (\Omega_\chi \cap \Omega_\chi^t) = H_0 \cap H_0^t \leq H_0. \end{aligned}$$

Таким образом, $H \cap H^t \leq H_0$, если $t \in G \setminus H$. Следовательно (G, H, H_0) — W -тройка с ядром N_χ .

Следствие 3. Если характер χ и подгруппа H группы G удовлетворяют условиям леммы 8, то $H_G \leq H_0$.

Лемма 9. Если $\chi \in \text{Irr}_2(G)$, $N \triangleleft G$, $N \ntriangleleft N_\chi$, то $\chi_N \in \text{Irr}(N)$; при этом $\chi_N \in \text{Irr}_2(N)$, если $N \ncong N_\chi$.

Доказательство. Если $N=G$ утверждение очевидно. При $N=N_\chi$ оно следует из леммы 4. Допустим теперь, что $N \ncong N_\chi$, $N \neq G$. Рассмотрим клиффордово разложение $\chi_N = e(\Phi_1 + \dots + \Phi_l)$ характера χ_N . Здесь $\{\Phi_1, \dots, \Phi_l\}$ — класс характеров подгруппы N G -сопряженных с $\Phi_1 = \Phi \in \text{Irr}(N)$, $l = |G:H|$, где $H = I_G(\Phi)$ — группа инерции характера Φ и l — индекс ветвления χ над N . Допустим, что $l > 1$. Тогда $H < G$. Так как характер χ индуцируется из H .

то в силу следствия 3 $N \leq H_G \leq H_0 \leq N_\chi$ — противоречие. Таким образом, $l=1$ и, следовательно, $\chi_N = e\Phi$. Так как $N \ncong N_\chi$, то $N \cap \Delta_\chi \neq \emptyset$. Пусть $g \in N \cap \Delta_\chi$. Так как $\chi(g) = e\Phi(g)$ и по лемме 3 $\chi(g)$ — корень из 1, то e делит 1 в кольце $\bar{R}$. Поэтому $e=1$ и, следовательно, $\chi_N = \Phi \in \text{Irr}(N)$. Так как $T_\Phi = N \cap T_\chi$, то $N_\Phi = \langle T_\Phi \rangle \leq N \cap \langle T_\chi \rangle = N \cap N_\chi \neq N$, откуда следует, что $\Phi \in \text{Irr}_2(N)$. Итак, $\chi_N \in \text{Irr}_2(N)$.

Теорема 1. Пусть $\chi \in \text{Irr}_2(G)$, N — субнормальная подгруппа группы G , $N \ntriangleleft N_\chi$. Тогда $\chi_N \in \text{Irr}(N)$, причем $\chi_N \in \text{Irr}_2(N)$, если $N \ncong N_\chi$.

Доказательство. Пусть $G \triangleright G_1 \triangleright \dots \triangleright G_k = N$ -отрезок композиционного ряда группы G проходящего через N . Как и при доказательстве леммы 9, мы считаем, что $N \not\cong N_\chi$, $N \neq G$. Так как $N \not\cong N_\chi$, то $G_i \not\cong N_\chi$ ($i=1, \dots, k$). В частности, из $G_1 \triangleleft G$, $G_1 \not\cong N_\chi$ вытекает в силу леммы 9, что $\chi_1 = \chi_{G_1} \in \text{Irr}_2(G_1)$. Так как $G_2 \triangleleft G_1$ и $G_2 \not\cong N_\chi$, то аналогично получим $\chi_2 = \chi_{G_2} \in \text{Irr}_2(G_2)$. После k шагов мы докажем, что $\chi_N \in \text{Irr}_2(N)$.

Следствие 4. При выполнении условий теоремы 1 из $N \not\cong N_\chi$ следует $\chi_D \in \text{Irr}(D)$, где $D = N \cap N_\chi$.

Следствие 5. Пусть $\chi \in \text{Irr}_2(G)$ и M -любой максимальный нормальный делитель группы G . Тогда $\chi_M \in \text{Irr}(M)$.

Следствие 6. Пусть $\chi \in \text{Irr}_2(G)$, $N \triangleleft G$, $N \cap T_\chi = \emptyset$. Тогда $N < N_\chi$.

Доказательство. Если $N \not\leq N_\chi$, то по лемме 9 $\chi_N \in \text{Irr}(N)$, откуда в силу леммы 1 $N \cap T_\chi \neq \emptyset$ -противоречие.

Лемма 10. Если $\chi = \psi^G$, где $\psi \in \text{Irr}(N)$, $N \triangleleft G$, то $G \setminus N \subseteq T_\chi$.

Доказательство. Утверждение вытекает из формулы Фробениуса для ψ^G .

Следствие 7. Неприводимый характер 2-го рода не может индуцироваться из собственной Нормальной подгруппы группы G .

Доказательство. Пусть $\chi \in \text{Irr}_2(G)$. Если χ индуцируется из собственного нормального делителя N группы G , то по лемме 10 $G \setminus N \subseteq T_\chi$. Поэтому $N_\chi = \langle T_\chi \rangle \cong \langle G \setminus N \rangle = G$, т. е. $N_\chi = G$ -противоречие.

Лемма 11. Нильпотентные группы не имеют нелинейных неприводимых характеров 2-го рода.

Доказательство. Неприводимый нелинейный характер нильпотентной группы индуцируется из её максимальной подгруппы. Так как последняя нормальна, то утверждение вытекает из следствия 6.

Следствие 8. $F(G) \leq N_\chi$.

Доказательство. Если $\chi \in \text{Irr}_2(G)$, $F(G) \not\leq N_\chi$, то по лемме 9 $\chi_{F(G)} \in \text{Irr}_2(F(G))$, что противоречит лемме 11.

Лемма 12. Если $g \in T_\chi$, то $C_G(g) < N_\chi$.

Доказательство. Допустим, что $C_G(g) = H \not\leq N_\chi$. Тогда N_χ не содержит по крайней мере одну из силовских подгрупп группы H . Пусть $P \in \text{Syl}_p(G)$ (p -простое число), причем $P \not\leq N_\chi$. Тогда $P \cap \Delta_\chi \neq \emptyset$. Если $u \in P \cap \Delta_\chi$, то $gu \in P \cap \Delta_\chi \subseteq \Delta_\chi$, откуда по лемме 4 $gu \in U_\chi$. Пусть $o(u) = p^\alpha$ ($\alpha > 0$). Полагая $\Theta = \chi \bar{\chi}$, по лемме 5 получим $\Theta(ug)^{p^\alpha} \equiv \Theta(g)^{p^\alpha} \pmod{p}$ в кольце R . Так как $ug \in U_\chi$, то $\Theta(ug) = |\chi(ug)|^2 = 1$. Замечая, что $\Theta(g) = |\chi(g)|^2 = 0$, приходим к невозможному сравнению $1 \equiv 0 \pmod{p}$. Таким образом, $C_G(g) \leq N_\chi$. Из $C_G(g) = N_\chi$ вытекает $g \in Z(N_\chi)$, откуда, ввиду следствия 1, $g \in Z(\chi)$, что невозможно, так как $Z(\chi) \cap T_\chi = \emptyset$. Итак, $C_G(g) < N_\chi$.

Теорема 2. $\text{Irr}_1(G) \neq \emptyset$, т. е. группа G порождается множеством нулей одного из её неприводимых характеров.

Доказательство. Если $\text{Irr}_1(G) = \emptyset$, то $N_\chi \neq G$ для любого $\chi \in \text{Irr}^\#(G)$. Пусть M -максимальный нормальный делитель группы G , содержащий N_χ . Так как $\text{Irr}_2(G) = \text{Irr}(G)$, то в силу следствия 5 $\Theta_M \in \text{Irr}(M)$ для любого $\Theta \in \text{Irr}(G)$. Поэтому все неприводимые характеры подгруппы M продолжаемы на группу G , откуда следует, что все M -классы являются G -классами. Следовательно $|C_G(g)| = |G:M| \cdot |C_M(g)| > |C_M(g)|$ для любого $g \in M$. Так как $\chi_M \in \text{Irr}(M)$ и $\chi_M(1) > 1$, то в силу леммы 1 $T_\chi \cap M \neq \emptyset$. Пусть $g \in T_\chi \cap M$. Тогда по лемме 12 $C_G(g) < N_\chi \leq M$, откуда $C_G(g) = C_M(g)$, что противоречит неравенству $|C_G(g)| > |C_M(g)|$. Таким образом $\text{Irr}_1(G) \neq \emptyset$.

Доказанная выше теорема 1 даёт усиление утверждения (а) леммы 4. Нижеследующей теоремой усиливается утверждение (б) леммы 4.

Теорема 3. Пусть $N \triangleleft G$, $\chi \in \text{Irr}(G)$, $\chi_N \in \text{Irr}(N)$. Тогда $\Omega = G \setminus NT_\chi \subseteq U_\chi$.

Доказательство. Если $x \in \Omega$, то, как легко видеть, (i) $Nx \in \Omega$, (ii) $x^v \in \Omega$ для любого $v \in \mathbb{Z}$, $(v, |G|) = 1$. Воспользуемся следующим результатом Галлахера (см., напр. лемму 8.14 в [3]): при условиях теоремы 3 для любого $g \in G$ имеет место равенство $|N|^{-1} \sum_{x \in Ng} |\chi(x)|^2 = 1$. Из этого результата и (i) вытекает, что $A = |\Omega|^{-1} \sum_{x \in \Omega} |\chi(x)|^2 = 1$. Из (ii) вытекает, что $\alpha = \prod_{x \in \Omega} \chi(x) \in \mathbb{Z}$. Так как $\alpha \neq 0$, то $|\alpha| \geq 1$. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим даёт: $1 \leq \alpha^2 = \prod_{x \in \Omega} |\chi(x)|^2 \leq A^{|\Omega|} = 1$. Поэтому $|\chi(x)| = 1$ для всех $x \in \Omega$. Таким образом, $\Omega \subseteq U_\chi$.

Дальнейшее имеет целью изучение поведения неприводимых характеров 2-го рода группы G на её коммутанте.

Лемма 13. Если $\chi \in \text{Irr}_2(G)$, то (а) $\lambda\chi \in \text{Irr}_2(G)$ при любом $\lambda \in \text{Lin}(G)$; (б) отображение $\lambda \mapsto \lambda\chi$ ($\lambda \in \text{Lin}(G)$) множества $\text{Lin}(G)$ в $\text{Irr}_2(G)$ инъективно.

Доказательство. Очевидно $\lambda\chi \in \text{Irr}(G)$ и $T_{\lambda\chi} = T_\chi$. Поэтому $N_{\lambda\chi} = N_\chi \neq G$, т. е. $\lambda\chi \in \text{Irr}_2(G)$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \text{Lin}(G)$ и $\lambda_1\chi = \lambda_2\chi$. Тогда $\lambda\chi = \chi$, где $\lambda = \lambda_1\lambda_2^{-1} \in \text{Lin}(G)$. Если $g \in G$, то $(\lambda(g) - 1)\chi(g) = 0$. Поэтому из $g \in G \setminus \text{Ker } \lambda$ следует, что $\chi(g) = 0$. Таким образом $G \setminus \text{Ker } \lambda \subseteq T_\chi$. Если $\lambda \neq 1_G$, то $G \setminus \text{Ker } \lambda \neq \emptyset$ и, следовательно, $\langle G \setminus \text{Ker } \lambda \rangle = G$. Но тогда $\langle T_\chi \rangle = G$, т. е. $\chi \in \text{Irr}_1(G)$ -противоречие. Итак, $\lambda = 1_G$, т. е. $\lambda_1 = \lambda_2$. Лемма доказана.

Следствие 9. $|G/G'|$ делит $|\text{Irr}_2(G)|$.

Доказательство. Отображение $(\lambda, \chi) \mapsto \lambda\chi$ множества $\text{Lin}(G) \times \text{Irr}_2(G)$ в $\text{Irr}_2(G)$ является действием группы $\text{Lin}(G)$ на $\text{Irr}_2(G)$. Лемма 13 показывает, что это действие полурегулярно. Его орбиты поэтому имеют длину $|\text{Lin}(G)| = |G/G'|$, откуда вытекает, что $|G/G'|$ делит $|\text{Irr}_2(G)|$.

Теорема 4. Если $\chi \in \text{Irr}_2(G)$, то $\chi_{G'} \in \text{Irr}(G')$.

Доказательство. Пусть $\psi \in \text{Irr}(G')$, $\langle \chi_{G'}, \psi \rangle = e > 0$, $H = I_G(\psi)$, $|G:H| = l$. Тогда $\chi_{G'} = e(\psi_1 + \dots + \psi_l)$, где $\{\psi_1, \dots, \psi_l\}$ -класс характеров подгруппы

G' G -сопряженных с $\psi_1 = \psi$. Так как $H \triangleleft G$ и χ индуцируется из H , то в силу леммы 10 $G \setminus H \subseteq T_\chi$. Если $l > 1$, то $G \setminus H \neq \emptyset$. Поэтому $\langle G \setminus H \rangle = G$ и, следовательно, $\langle T_\chi \rangle = G$, т. е. $\chi \in \text{Irr}_1(G)$. Противоречие показывает, что $l = 1$, т. е. $\chi_{G'} = e\psi$. Характер ψ поэтому G -инвариантен. Пусть $\text{Irr}_\psi(G) = \{\theta \in \text{Irr}(G) \mid \langle \theta_{G'}, \psi \rangle = e_\theta > 0\}$. При помощи теоремы взаимности Фробениуса легко доказывается равенство

$$(2) \quad \sum_{\theta \in \text{Irr}_\psi(G)} e_\theta^2 = |G/G'|;$$

Очевидно $\lambda\chi \in \text{Irr}_\psi(G)$ при любом $\lambda \in \text{Lin}(G)$, причем $e_{\lambda\chi} = e_\chi = e$. Поэтому $\text{Lin}(G)\chi \subseteq \text{Irr}_\psi(G)$, откуда следует ввиду (2) и леммы 13, что

$$|G/G'| = \sum_{\theta \in \text{Irr}_\psi(G)} e_\theta^2 \geq \sum_{\theta \in \text{Lin}(G)\chi} e_\theta^2 = \sum_{\lambda \in \text{Lin}(G)} e_{\lambda\chi}^2 = e^2 |\text{Lin}(G)| = e^2 |G/G'| \geq |G/G'|.$$

Поэтому $\sum_{\theta \in \text{Irr}_\psi(G)} e_\theta^2 = \sum_{\theta \in \text{Lin}(G)\chi} e_\theta^2$, откуда следует, что $\text{Irr}_\psi(G) = \text{Lin}(G)\chi$ и $e = 1$. Следовательно $\chi_{G'} = \psi \in \text{Irr}(G')$. Попутно доказано, что $\text{Lin}(G)\chi$ совпадает с множеством всех продолжений характера ψ на группу G .

Следствие 10. Если $\chi \in \text{Irr}_2(G)$, $\text{Ker } \chi = \{1\}$, то $Z(G)$ -наибольший по включению циклический нормальный делитель группы G .

Доказательство. Так как $\text{Ker } \chi = \{1\}$, то $Z(G)$ циклический. Допустим, что $N \triangleleft G$ циклический. Зададим гомоморфизм $\varphi: G \rightarrow \text{Aut}(N)$ группы G в группу автоморфизмов подгруппы N , полагая $\varphi(g)(x) = gxg^{-1}$ ($g \in G$, $x \in N$). Так как $\text{Ker } \varphi = C_G(N)$ и $\text{Aut}(N)$ абелева, то $C_G(N) \cong G'$. Полагая $C_G(N) = K$, в силу теоремы 4 будем иметь $\chi_K \in \text{Irr}(K)$. Так как χ и χ_K точны и неприводимы, то на основании следствия 1 $Z(G) = Z(\chi)$, $Z(K) = Z(\chi_K)$, откуда следует, ввиду $Z(\chi_K) \subseteq Z(\chi)$, что $Z(K) \subseteq Z(G)$. Так как $N \subseteq Z(K)$, то $N \subseteq Z(G)$.

Следствие 11. Сверхразрешимая группа $G \neq \{1\}$, обладающая точным неприводимым характером 2-го рода, имеет нетривиальный центр.

Следствие 12. Метабелева группа не имеет нелинейных неприводимых характеров 2-го рода.

Доказательство. Пусть G -метабелева группа (т. е. неабелева группа с абелевым коммутантом). Если $\chi \in \text{Irr}_2(G)$, то в силу теоремы 4 $\chi_{G'}$ неприводим, откуда следует, ввиду абелевости G' , что $\chi \in \text{Lin}(G)$.

Следствие 13. Если G сверхразрешима и $\chi \in \text{Irr}(G)$, то G/N_χ абелева.

Доказательство. Так как G' нильпотентен и $G' \triangleleft G$, то в силу следствия 8 $G' \subseteq N_\chi$.

Пусть N -субнормальная подгруппа группы G . Введем следующие обозначения: $h_s(N)$ -длина l отрезка $G \supset G_1 \supset \dots \supset G_l = N$ композиционного ряда группы G , проходящего через N ; если $N \triangleleft G$, то $h_n(N)$ -длина отрезка главного ряда группы G , проходящего через N ; если $N \triangleleft G$ и G/N разрешима, то $h_a(N)$ -ступень разрешимости G/N ; если $N \triangleleft G$ и G/N не разрешима, то $h_a(N) = \infty$. Пусть $\mathcal{E}$ -свойство групп наследственное по отношению к факторгруппам, $\bar{\mathcal{E}}$ -отрицание свойства $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ -группы — группы, обладающие свойством $\mathcal{E}$.

При помощи теорем 1 и 4 легко доказывается следующее утверждение:

Теорема 5. Ограничение характера $\chi \in \text{Irr}_2(G)$ на субнормальную подгруппу N неприводимо, если выполнено одно из условий:

- (а) $h_s(N) \leq h_s(N_\chi)$.
- (б) $N \triangleleft G$ и $h_n(N) \leq h_n(N_\chi)$.
- (в) $N \triangleleft G$, G/N разрешима и $h_a(N) \leq h_a(N_\chi)$.
- (г) $N \triangleleft G$, G/N — $\mathcal{E}$ -группа, G/N_χ — $\mathcal{E}$ -группа.

2. Элемент $g \in G$ назовем регулярным, если $\chi(g) \neq 0$ для любого $\chi \in \text{Irr}(G)$. Подгруппу $H \triangleleft G$ назовем регулярной, если все её элементы регулярны. В этом пункте мы используем полученные выше результаты для получения некоторых достаточных условий существования в группе G нетривиальных регулярных элементов (подгрупп).

Введем обозначения:

$$\varrho_i = \sum_{\chi \in \text{Irr}_i(G)} \chi(1)\chi, \quad K_i = \text{Ker } \varrho_i = \bigcap_{\chi \in \text{Irr}_i(G)} \text{Ker } \chi \quad (i=1, 2).$$

Очевидно $K_i \triangleleft G$ ($i=1, 2$), $K_1 \neq G$, $K_1 \cap K_2 = \{1\}$.

Лемма 14. Характеры ϱ_i ($i=1, 2$) исчезают на $G \setminus G'$.

Доказательство. Если $\lambda \in \text{Lin}(G)$, то $\lambda \text{Irr}_i(G) = \text{Irr}_i(G)$ ($i=1, 2$). Поэтому $\lambda \varrho_i = \varrho_i$ ($i=1, 2$), откуда и вытекает утверждение.

Следствие 12. $K_i \leq G'$ ($i=1, 2$), причем $K_1 \neq G'$.

Лемма 15. Пусть $\text{Irr}(G) = S_1 \cup S_2$, $S_1 \neq \emptyset \neq S_2$; $L_i = \bigcap_{\chi \in S_i} \text{Ker } \chi$ ($i=1, 2$); $N \triangleleft G$; $\chi_N \in \text{Irr}(N)$ для всех $\chi \in S_2$. Тогда $g^G = g^N$ для каждого $g \in L_1 \cap N = D$.

Доказательство. Пусть $g, h \in D$, $h \in g^G$. Если $\psi \in \text{Irr}(N)$, то $\langle \psi, \chi_N \rangle > 0$ для некоторого $\chi \in \text{Irr}(G)$. Если $\chi \in S_1$, то $D \leq \text{Ker } \chi \cap N = \text{Ker } \chi_N \leq \text{Ker } \psi$. Поэтому $\psi(g) = \psi(h)$ ($= \psi(1)$). Если $\chi \in S_2$, то $\chi_N \in \text{Irr}(N)$, откуда $\psi = \chi_N$. Поэтому $\psi(g) = \chi(g) = \chi(h) = \psi(h)$. Таким образом, $\psi(g) = \psi(h)$ для каждого $\psi \in \text{Irr}(N)$, откуда следует, что $h \in g^N$. Тем самым доказано, что $g^G = g^N$.

Следствие 13. Пусть $D(M) = K_1 \cap M$, где M -максимальный нормальный делитель группы G . Тогда $g^G = g^M$ для любого $g \in D(M)$.

Доказательство. Полагая $S_i = \text{Irr}_i(G)$ ($i=1, 2$), $N = M$, применяем лемму 15 и следствие 5.

Следствие 14. $g^G = g^{G'}$ для любого $g \in K_1$.

Доказательство. Полагая $S_i = \text{Irr}_i(G)$ ($i=1, 2$), $N = G'$, применяем следствие 12, теорему 4 и лемму 15.

Лемма 16. Пусть $\chi \in \text{Irr}_2(G) \setminus \text{Lin}(G)$, $N_\chi \leq M \triangleleft G$. Тогда $g^G \neq g^M$ для $g \in T_\chi$.

Доказательство. В силу леммы 12 $C_G(g) = C_M(g)$. Поэтому $|g^G| = |G : C_G(g)| = |G : M| \cdot |M : C_M(g)| = |G : M| \cdot |g^M| > |g^M|$, откуда и вытекает утверждение.

Лемма 17. Если $\chi \in \text{Irr}^\#(G)$, то $N_\chi \not\leq K_1$.

Доказательство. Если $\chi \in \text{Irr}_1(G)$, утверждение очевидно. Если $\chi \in \text{Irr}_2(G)$, то $N_\chi \leq M$, где M -максимальный нормальный делитель группы G . В силу леммы 16 $g^G \neq g^M$ для любого $g \in T_\chi$. Если $N_\chi \leq K_1$, то $g \in K_1 \cap M$, откуда вытекает, ввиду следствия 13, что $g^G = g^M$. Противоречие показывает, что $N_\chi \not\leq K_1$.

Лемма 18. Пусть $\chi \in \text{Irr}^\#(G)$, $K \triangleleft G$, $K \leq K_1$. Тогда следующие утверждения равносильны: (а) χ_K приводим; (б) $K < N_\chi$; (в) $K \cap T_\chi = \emptyset$.

Доказательство. (а) $\Rightarrow$ (б). Допустим, что χ_K приводим, но $K \not< N_\chi$. Тогда по лемме 9 $\chi_K \in \text{Irr}(K)$ -противоречие. Таким образом, $K < N_\chi$.

(б) $\Rightarrow$ (в). Допустим, что $K < N_\chi$. Если $\chi \in \text{Irr}_1(G)$, то $K \leq \text{Ker } \chi$, откуда $K \cap T_\chi = \emptyset$. Если $\chi \in \text{Irr}_2(G)$, то $N_\chi \leq M$, где M -максимальный нормальный делитель группы G . Если $K \cap T_\chi \neq \emptyset$ и $g \in K \cap T_\chi$, то в силу леммы 16 $g^G \neq g^M$, что противоречит следствию 13. Таким образом, $K \cap T_\chi = \emptyset$.

(в) $\Rightarrow$ (а). Если $K \cap T_\chi = \emptyset$, то χ_K приводим ввиду леммы 1.

Следствие 15. Если $K \triangleleft G$, $K \leq K_1$, то подгруппа K регулярна тогда и только тогда, когда $K \leq \bigcap_{\chi \in \text{Irr}(G)} N_\chi$.

Пусть $N \triangleleft G$ и $\text{Sc}_G(N) = N \cap \text{Sc}(G)$, где $\text{Sc}(G)$ -цокль группы G . Если $N \neq \{1\}$, то $\text{Sc}_G(N)$ -произведение всех содержащихся в N минимальных нормальных делителей группы G . Отсюда, в частности, следует, что $\text{Sc}_G(N) \neq \{1\}$ тогда и только тогда, когда $N \neq \{1\}$.

Теорема 6. Подгруппа $\text{Sc}_G(K_1)$ регулярна.

Доказательство. Из леммы 12 следует, что все минимальные нормальные делители группы G содержатся в $\bigcap_{\chi \in \text{Irr}^\#(G)} N_\chi$. Поэтому $\text{Sc}_G(K_1) \leq \bigcap_{\chi \in \text{Irr}^\#(G)} N_\chi$, откуда вытекает регулярность $\text{Sc}_G(K_1)$ в силу следствия 15.

Следствие 16. Группа G обладает нетривиальными регулярными элементами, если $K_1 \neq \{1\}$.

Теорема 7. Если $K \triangleleft G$, $K \leq K_1$, K разрешима, то K регулярна.

Доказательство. Пусть $K \neq \{1\}$, $K \supset K' \supset \dots \supset K^{(r)} = \{1\}$ — производный ряд подгруппы K . Если $\chi \in \text{Irr}^\#(G)$, $K \not\leq N_\chi$, то в силу леммы 9 $\chi_K \in \text{Irr}_2(K)$, откуда вытекает на основании теоремы 4, что $\chi_{K'} \in \text{Irr}(K')$. Ввиду лемм 17 и 18 отсюда следует, что $K' \not\leq N_\chi$. Таким образом, из $K \not\leq N_\chi$ вытекает $K' \not\leq N_\chi$. По индукции получим: $\{1\} = K^{(r)} \not\leq N_\chi$, что приводит к противоречию. Итак, $K \leq N_\chi$ для любого $\chi \in \text{Irr}^\#(G)$. Поэтому $K \leq \bigcap_{\chi \in \text{Irr}^\#(G)} N_\chi$ откуда вытекает регулярность подгруппы K в силу следствия 15.

Отметим без доказательства следующее утверждение легко получающееся с помощью предыдущих результатов:

Теорема 8. Пусть $\chi \in \text{Irr}_2(G) \setminus \text{Lin}(G)$, $K \triangleleft G$, $K \leq K_1$. Тогда следующие условия равносильны: (а) $\chi_K \in \text{Irr}(K)$; (б) $K \not\leq N_\chi$; (в) $N_\chi K = G$.

Литература

- [1] W. BURNSIDE, On an arithmetical theorem connected with root of unity and its applications to group characteristics, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), **1** (1904), 112—116.
- [2] P. X. GALLAGHER, Zeros of characters of finite groups, *J. of Algebra*, **4**, N 1, (1966), 42—45.
- [3] I. M. ISAACS, Character theory of finite groups., *N. Y., S. Francisco, L.*, (1976).
- [4] Э. М. Жмудь, О нулях групповых характеров, *Успехи матем. наук*, 1977, **32**, № 6, 223—224.

(Поступило 17, VII. 1987)