

Новое доказательство теоремы фон Неймана

А. НАГЕЛ (Будапешт)

Следующая теорема хорошо известна:

Теорема 1. Пусть $(G, \cdot)$ любая коммутативная полугруппа. Тогда существует инвариантное среднее Φ на $L^\infty(G)$, т.е.

- (1) Φ линейный функционал на $L^\infty(G)$.
- (2) Для любого $f \geq 0$, $f \in L^\infty(G)$, выполняется $\Phi(f) \geq 0$.
- (3) $\Phi(1) = 1$.
- (4) $\Phi(T_a f) = \Phi(f)$ для любых $f \in L^\infty(G)$ и $a \in G$.

Теорема 1. для групп появилась у фон НЕЙМАНА [6], а для полугрупп у ДЭЯ [1]. Здесь мы даем новое доказательство.

Определение 2. Пусть X — любое, непустое множество. Пусть, далее, $L^\infty(X)$ — множество всех ограниченных действительнозначных функций на X . Среднее Φ на $L^\infty(X)$ есть вещественный линейный функционал на $L^\infty(X)$, обладающий тем свойством, что

$$(*) \quad \inf\{f(x) : x \in X\} \leq \Phi(f) \leq \sup\{f(x) : x \in X\}, \quad f \in L^\infty(X).$$

Замечание 3. Заметим, что свойство $(*)$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$(**) \quad \Phi(f) \geq 0 \quad \text{при} \quad f \geq 0 \quad \text{и} \quad f \in L^\infty(X) \quad \text{и} \quad \Phi(1) = 1.$$

Определение 4. Пусть $(G, +)$ коммутативная полугруппа. Для $a \in G$ и $f \in L^\infty(G)$ определим $T_a f$ равенством

$$(T_a f)(x) := f(a + x) \quad \text{для} \quad x \in G.$$

Инвариантное среднее Φ на $L^\infty(G)$ есть такое среднее, что $\Phi(T_a f) = \Phi(f)$ для любых $f \in L^\infty(G)$ и $a \in G$. Для каждого

$f \in L^\infty(G)$ положим $S(f) := \sup_G f$. Очевидно, S — положительно однородный и выпуклый функционал, т.е.

$$(***) \quad S(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot S(f) \text{ для любых } \lambda \geq 0 \text{ и } f \in L^\infty(G).$$

$$(***) \quad S(f + g) \leq S(f) + S(g) \text{ для любых } f, g \in L^\infty(G).$$

Отсюда следует, что $S \circ T_a : L^\infty(G) \rightarrow \mathbf{R}$ тоже положительно однородный и выпуклый функционал. Далее, $(S \circ T_a)(f) \leq S(f)$. Пусть $V(G) := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in G, n \in \mathbf{N}\}$, $\underline{a} := (a_1, a_2, \dots, a_n)$. При $\underline{a}, \underline{b} \in V(G)$, пусть $\underline{a} \oplus \underline{b} := (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$. Таким образом, $\underline{a} \oplus \underline{b} \in V(G)$.

Рассмотрим элемент $a \in V(G)$. Для каждого $f \in L^\infty(G)$ положим

$$(i) \quad (T_{\underline{a}}f)(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (T_{a_i}f)(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(a_i + x) \text{ для } x \in G,$$

т.е. $T_{\underline{a}} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_{a_i}$. Тогда ясно, что $S \circ T_{\underline{a}} : L^\infty(G) \rightarrow \mathbf{R}$ тоже положительно однородный и выпуклый функционал. Далее, $(S \circ T_{\underline{a}})(f) \leq S(f)$.

Теперь мы перейдём к новому доказательству: Для $f \in L^\infty(G)$ пусть $p(f) := \inf \{(S \circ T_{\underline{a}})(f) : \underline{a} \in V(G)\}$. Покажем сначала, что p обладает следующими свойствами:

- (a) p положительно однородный и
- (b) выпуклый функционал.
- (c) Если $f \geq 0$, то $p(f) \geq 0$, и если $f \leq 0$, то $p(f) \leq 0$.
- (d) $p(1) = 1$ и $p(-1) = -1$.
- (e) Для любого $a \in G$ имеет место $p(f - T_a f) \leq 0$ и $p(T_a f - f) \leq 0$.

(a) Это непосредственно следует из определения 4, так как $S \circ T_a$ является положительно однородным функционалом.

(b) Пусть f, g обозначают любые функции из $L^\infty(G)$, а ε — произвольное положительное число. Тогда найдутся такие элементы $\underline{a}, \underline{b} \in V(G)$, что

$$(S \circ T_{\underline{a}})(f) < p(f) + \varepsilon/2 \quad \text{и} \quad (S \circ T_{\underline{b}})(g) < p(g) + \varepsilon/2.$$

Положим $\underline{c} := \underline{a} \oplus \underline{b}$. Ясно, что $\underline{c} \in V(G)$ и $T_{\underline{c}} := T_{\underline{a} \oplus \underline{b}} = T_{\underline{a}} \circ T_{\underline{b}} = T_{\underline{b}} \circ T_{\underline{a}}$.

Следовательно, $p(f + g) \leq (S \circ T_{\underline{c}})(f + g) \leq S \circ T_{\underline{c}}(f) + (S \circ T_{\underline{c}})(g) = S(T_{\underline{c}}f) + S(T_{\underline{c}}g) = S(T_{\underline{b}}(T_{\underline{a}}f)) + S(T_{\underline{a}}(T_{\underline{b}}g)) \leq S(T_{\underline{a}}f) + S(T_{\underline{b}}g) < p(f) +$

$p(g) + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = p(f) + p(g) + \varepsilon$. Таким образом, $p(f+g) < p(f) + p(g)$ для любых $f, g \in L^\infty(G)$.

(с) Очевидно.

(d) Очевидно.

(е) Пусть $a \in G$, и $n \in \mathbf{N}$ — произвольное натуральное число. Рассмотрим теперь элемент $\underline{a_n} := (a, 2a, 3a, \dots, n \cdot a)$.

Применяя (i), мы получим

$$\begin{aligned} T_{\underline{a_n}}(f - T_a f) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_{ia}(f - T_a f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (T_{ia} f - T_{(i+1)a} f) = \\ &= \frac{1}{n} (T_a f - T_{(n+1)a} f) \quad \text{для любого } n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Очевидно, существует такое число $K < +\infty$, что $|T_a f - T_{(n+1)a} f| \leq K$. Отсюда следует, что $T_{\underline{a_n}}(f - T_a f) \rightarrow 0$. Следовательно, $p(f - T_a f) \leq 0$. Аналогично следует, что, $p(T_a f - f) \leq 0$ для каждого $a \in G$.

Согласно теореме Хана–Банаха, существует линейный функционал Φ на $L^\infty(G)$ такой, что

$$\Phi(f) \leq p(f) \quad \text{для любого } f \in L^\infty(G) \text{ и } \Phi|_{\{0\}} = 0.$$

Докажем, что Φ удовлетворяет соотношениям (1), (2), (3) и (4).

В самом деле,

(1) Очевидно.

(2) Для любого $f \in L^\infty(G)$ имеем $\Phi(f) \leq p(f)$.

Таким образом, $\Phi(-f) \leq p(-f)$ и $-\Phi(f) \leq p(-f)$. Поэтому $-p(-f) \leq \Phi(f) \leq p(f)$. Если $f \geq 0$, то $p(-f) \leq 0$, поэтому $\Phi(f) \geq 0$. Аналогично следует, что $\Phi(f) \leq 0$ для $f \leq 0$.

(3) Так как $-p(-1) \leq \Phi(1) \leq p(1)$, выполняется неравенство $1 \leq \Phi(1) \leq 1$, т.е. $\Phi(1) = 1$.

(4) Пусть $a \in G$ и $f \in L^\infty(G)$. Тогда $\Phi(f - T_a f) \leq p(f - T_a f) \leq 0$. Так как Φ линейный, поэтому $\Phi(f) \leq \Phi(T_a f)$. Совершенно аналогично следует, что $\Phi(f) \geq \Phi(T_a f)$. Отсюда прямо вытекает инвариантность Φ . Итак, теорема 1 полностью доказана. $\square$

References

- [1] M.M. DAY, Ergodic theorems for Abelian semi-groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **51** (1942), 399–412.
- [2] E. FOLNER, On group with full Banach mean value, *Math. Scand.* **3** (1955), 243–254.
- [3] E. FOLNER, Note on group with and without full Banach mean value, *Math. Scand.* **5** (1957), 5–11.
- [4] F.P. GREENLEAF, Invariant means on topological groups, *Van Nostrand, New York*.
- [5] E. HEWITT and K. ROSS, Abstract Harmonic Analysis I, *Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg*.
- [6] J. VON NEUMANN, Zur allgemeinen Theorie des Masses, *Fund. Math.* **13** (1929), 73–115.

ÁRPÁD NÁGEL
BUDAPEST UNIVERSITY OF TECHNOLOGY
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
H—1521 BUDAPEST, HUNGARY

(Поступило: 10. XI. 1989 г.)