

Die Projektivitäten und Antiprojektivitäten der Quaternionengeraden

Von HANS HAVLICEK (Wien)

1. Einleitung

1.1. In zwei ausführlichen Artikeln [10], [11] beschäftigt sich L. GYARMATHI mit den Projektivitäten und Antiprojektivitäten der projektiven Geraden q über den reellen Quaternionen; vgl. auch [9]. Dabei wird unter anderem gezeigt, daß jede Projektivität von q wenigstens einen Fixpunkt hat, und es wird eine Einteilung der Projektivitäten und Antiprojektivitäten nach der Anzahl ihrer Fixpunkte angegeben. Allerdings werden bei den parabolischen Projektivitäten und Antiprojektivitäten (sie sind durch die Existenz genau eines Fixpunktes gekennzeichnet) nicht alle Fälle erfaßt.

Ziel dieser Note ist es, eine Klassifikation der Projektivitäten und Antiprojektivitäten von q bis auf projektive Äquivalenz anzugeben und einige Ergebnisse über parabolische Projektivitäten und Antiprojektivitäten aus [10], [11] richtigzustellen.

1.2 Es soll an dieser Stelle noch auf zwei alternative Beweismöglichkeiten des in 1.1 erwähnten *Fixpunktsatzes für Projektivitäten* der Quaternionengeraden hingewiesen werden:

In jeder desarguesschen projektiven Ebene $\mathcal{E}$ ist die Bestimmung der Fixpunkte einer nichtidentischen Projektivität Π einer Geraden $q \subset \mathcal{E}$ äquivalent zur Ermittlung der Schnittpunkte von q mit einem nicht entarteten Kegelschnitt¹: Wählt man zwei Punkte $a, b \in \mathcal{E} \setminus q$ derart, daß ihre Verbindungsgerade $a \vee b$ keinen Fixpunkt von Π trägt, so ist mit $z \in q$ die

¹Vgl. [4] sowie die Literaturübersicht in [12].

Abbildung $(a \vee z) \mapsto (b \vee z^{\mathbf{I}})$ eine Projektivität des Geradenbüschels um a auf das Geradenbüschel um b ; diese Projektivität erzeugt den gesuchten nicht entarteten Kegelschnitt. In [14, 53], Satz 3.2, zeigt W. KRÜGER, daß insbesondere in der projektiven Ebene über den reellen Quaternionen jede Gerade mit jedem nicht entarteten Kegelschnitt wenigstens einen Punkt gemeinsam hat. Daraus folgt unmittelbar die Gültigkeit des Fixpunktsatzes.

In [18, 394], Corollary 3, werden von J.B. WILKER jene automorphen Kollineationen der Einheitshypersphäre $\mathcal{S}^{n-1}$ des projektiv abgeschlossenen n -dimensionalen euklidischen Raumes untersucht, die auf $\mathcal{S}^{n-1}$ fixpunktfrei operieren. Es wird gezeigt, daß jede solche Kollineation unter einer automorphen Kollineation von $\mathcal{S}^{n-1}$ in eine *automorphe Kongruenz* von $\mathcal{S}^{n-1}$ transformiert werden kann. Da jede Transformation der eigentlich orthogonalen Gruppe $O^+(5, \mathbf{R})$ den Eigenwert 1 besitzt, und Projektivitäten der Quaternionengeraden den gleichsinnigen automorphen Kollineationen der $\mathcal{S}^4$ entsprechen, ergibt sich erneut die Gültigkeit des Fixpunktsatzes.

1.3. Wir schreiben im folgenden $\mathbf{H}$ für den Schiefkörper der *Quaternionen* über den reellen Zahlen und beziehen diesen wie in [10], [11] auf die Basis $\{1, i, j, k\}$ über dem Körper $\mathbf{R}$ der *reellen Zahlen*. Mit R^n bezeichnen wir sowohl einen *n -dimensionalen euklidischen Vektorraum* als auch den *euklidischen affinen Raum* über diesem Vektorraum. Verwechslungen sind nicht zu befürchten. Für einen Untervektorraum U von R^n sei $U^\perp$ jener zu U orthogonale Untervektorraum von R^n , für den $R^n = U + U^\perp$ gilt. Es ist $\mathbf{H} = R^4$ ein euklidischer Vektorraum und damit auch ein euklidischer affiner Raum, wenn wir $\{1, i, j, k\}$ als Orthonormalbasis von $\mathbf{H}$ ansehen. Bei einer Abbildung Θ verwenden wir die Bezeichnungen $\text{fix}(\Theta)$ für die Menge der *Fixelemente* von Θ und $\text{im}(\Theta)$ für die Menge der *Bildelemente* von Θ . Die weiteren Bezeichnungen und Begriffsbildungen folgen weitestgehend [10] und [11]. Insbesondere sei $\bar{z}$ die zu $z \in \mathbf{H}$ *konjugierte Quaternion* und $q := \mathbf{H} \cup \{\infty\}$ die *projektive Quaternionengerade* (vgl. auch [1, 329–334]), die wir oft als *4-dimensionalen reellen Möbiusraum* auffassen.

2. Klassifikation der Projektivitäten und Antiprojektivitäten

2.1. Für jedes Tripel $(\lambda, \varphi, \psi) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ bzw. jedes Paar $(\lambda, \psi) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$ ist die Abbildung

$$(1) \quad z \mapsto \lambda \left(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi) \right) z \left(\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi) \right)$$

bzw.

$$(2) \quad z \mapsto \lambda(\cos \psi + i \sin \psi) \bar{z}(\cos \psi - i \sin \psi)$$

eine Projektivität bzw. Antiprojektivität von q mit wenigstens zwei Fixpunkten, nämlich 0 und ∞ ; vgl. auch [7,10], [16,72-74]. In jedem Fall sind die beiden orthogonalen 2-Sphären² durch $0, 1, i, \infty$ und $0, j, k, \infty$ als Ganzes fest; bei einer Antiprojektivität (2) sind zusätzlich die Kreise durch $0, 1, \infty$ und $0, i, \infty$ invariant. Die Abbildungen (1) und (2) sind in anderer Schreibweise aus der Klassifikation der Gruppe $GO(4, \mathbf{R})$ wohlbekannt: Bezüglich der geordneten Orthonormalbasis $(1, i, j, k)$ von $\mathbf{H}$ besitzt die Einschränkung von (1) bzw. (2) auf $\mathbf{H}$ die Koordinatennmatrix

$$(3) \quad \lambda \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi & 0 & 0 \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2\psi & -\sin 2\psi \\ 0 & 0 & \sin 2\psi & \cos 2\psi \end{pmatrix}$$

bzw.

$$(4) \quad \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\pi + 2\psi) & -\sin(\pi + 2\psi) \\ 0 & 0 & \sin(\pi + 2\psi) & \cos(\pi + 2\psi) \end{pmatrix}$$

Für Sonderfälle von (1) und (2) siehe [10], [11]. Der Fall einer nicht-identischen Projektivität Π mit $\lambda = 1$, $\varphi \equiv \pm\psi \pmod{\pi}$ wird—auf $\mathbf{H} = R^4$ eingeschränkt—in der Literatur oft erwähnt, da er unter anderem mit den äquiangularen (isoklinen) Ebenen in R^4 , dem Cliffordschen Parallelismus und der Hopf-Fibration zusammenhängt. Vgl. etwa [2], [3], [8,254], [13]³, [15,196], [16,73–74].

Ist umgekehrt eine Projektivität oder Antiprojektivität von q mit wenigstens zwei verschiedenen Fixpunkten gegeben, so kann diese nach Ergebnissen in [11,101–102] stets unter einer Projektivität von q auf eine der *Normalformen* (1) bzw. (2) transformiert werden. Eine solche Normalform ist jedoch nicht notwendig eindeutig bestimmt, wie die folgenden Überlegungen zeigen.

²Diese werden in [10], [11] als *Ketten 2. Grades* bezeichnet.

³In der angegebenen Arbeit von W. Jank finden sich auch weitere Hinweise zur darstellend-geometrischen Behandlung des 4-dimensionalen euklidischen Raumes.

Satz 1. Zwei durch Tripel $(\lambda_\kappa, \varphi_\kappa, \psi_\kappa) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ vermöge (1) gegebene Projektivitäten Π_κ ($\kappa = 1, 2$) sind genau dann projektiv äquivalent, wenn eines der Tripel

$$(5) \quad \begin{aligned} &(\lambda_1, \sigma \pm \varphi_1, \sigma \pm \psi_1), (\lambda_1, \sigma \pm \psi_1, \sigma \pm \varphi_1), \\ &(\lambda_1^{-1}, \sigma \mp \varphi_1, \sigma \pm \psi_1), (\lambda_1^{-1}, \sigma \pm \psi_1, \sigma \mp \varphi_1) \end{aligned} \quad \text{mit } \sigma = \mu\pi, \mu \in \mathbf{Z}$$

gleich $(\lambda_2, \varphi_2, \psi_2)$ ist. Zwei durch Paare $(\lambda_\kappa, \psi_\kappa) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$ vermöge (2) gegebene Antiprojektivitäten Π_κ ($\kappa = 1, 2$) sind genau dann projektiv äquivalent, wenn eines der Paare

$$(6) \quad (\lambda_1, \sigma \pm \psi_1), (\lambda_1^{-1}, \sigma \pm \psi_1) \quad \text{mit } \sigma = \mu\pi, \mu \in \mathbf{Z}$$

gleich (λ_2, ψ_2) ist.

BEWEIS. (a) Transformieren wir die Projektivität Π_1 unter solchen Projektivitäten, die sich aus den Projektivitäten $z \mapsto -izk$, $z \mapsto -kzj$ bzw. $z \mapsto z^{-1}$ zusammensetzen lassen, so besitzen die transformierten Abbildungen wieder die Bauart (1), wobei genau die Tripel aus (5) auftreten.

Sind die Projektivitäten Π_1 und Π_2 projektiv äquivalent, so gibt es eine Projektivität $\Delta : q \rightarrow q$ mit $\Pi_2 = \Delta^{-1}\Pi_1\Delta$. Wir definieren Punkte $a, b \in q$ durch $a^\Delta = 0$, $b^\Delta = \infty$. Je nachdem ob $a = \infty$ bzw. $b = \infty$ bzw. $a, b \neq \infty$ gilt, transformieren wir Π_1 unter einer Projektivität $\Delta_1 : q \rightarrow q$ mit $z \mapsto (z - b)^{-1}$ bzw. $z \mapsto z - a$, bzw. $z \mapsto (z - b)^{-1} - (a - b)^{-1}$. Dann hat $\Pi_3 := \Delta_1^{-1}\Pi_1\Delta_1$ wegen $0, \infty, a, b \in \text{fix}(\Pi_1)$ die Bauart (1) mit einem Tripel $(\lambda_3, \varphi_3, \psi_3)$, das in (5) genannt wird. Da nun die Ähnlichkeit $\Pi_2|_{\mathbf{H}}$ aus $\Pi_3|_{\mathbf{H}}$ durch Transformation unter der gleichsinnigen Ähnlichkeit $(\Delta_1^{-1}\Delta)|_{\mathbf{H}}$ hervorgeht, folgt über die (gegebenenfalls komplexen) Eigenwerte der zu $\Pi_2|_{\mathbf{H}}$ und $\Pi_3|_{\mathbf{H}}$ gehörigen Matrizen (3) dann entweder $(\lambda_2, \varphi_2, \psi_2) = (\lambda_3, \sigma \pm \varphi_3, \sigma \pm \psi_3)$ oder $(\lambda_2, \varphi_2, \psi_2) = (\lambda_3, \sigma \pm \psi_3, \sigma \pm \varphi_3)$.

(b) Transformieren wir die Antiprojektivität Π_1 unter solchen Projektivitäten, die sich aus den Abbildungen $z \mapsto -jzj$ und $z \mapsto z^{-1}$ erzeugen lassen, so erhalten wir Normalformen (2) mit genau den in (6) angeschriebenen Paaren. Die restlichen Überlegungen sind wie in Beweis teil (a). $\square$

2.2. Zur Bestimmung von Normalformen für parabolische Projektivitäten und Antiprojektivitäten zeigen wir zunächst einen

Hilfssatz. Jede fixpunktfreie Ähnlichkeit Ω des n -dimensionalen euklidischen Raumes R^n ($n \geq 1$) besitzt eine eindeutige Darstellung der Form

$$(7) \quad \Omega = \Gamma \Sigma,$$

wobei Γ eine Kongruenz von R^n mit $\text{fix}(\Gamma) \neq \emptyset$ und Σ eine Schiebung von R^n mit $\text{fix}(\Gamma)^\Sigma = \text{fix}(\Gamma)$ bezeichnet. Sind umgekehrt eine Kongruenz Γ von R^n mit einem Fixpunkt f und eine Schiebung Σ von R^n ($z \mapsto z + s$) gegeben, so ist $\Gamma \Sigma$ genau dann fixpunktfrei, wenn $s \notin (\text{fix}(\Gamma) - f)^\perp$ erfüllt ist.

BEWEIS. Nach Proposition 9.5.2 in [2,220] ist eine fixpunktfreie Ähnlichkeit in R^n stets eine Kongruenz. Dann liefert Theorem 9.3.1 in [2,207] die Existenz und Eindeutigkeit von (7).

Liegt umgekehrt mit $\Gamma \Sigma$ eine Kongruenz von R^n der angegebenen Art vor, so gilt $\text{fix}(\Gamma \Sigma) = \emptyset$ genau dann, wenn $z \neq z^\Gamma + s$ für alle $z \in R^n$ erfüllt ist. Das ist zu $-s \notin \text{im}(\Gamma - I)$ äquivalent, wobei I die Identität in R^n bezeichnet. Wegen $0 = f^{\Gamma-I}$ ist der affine Unterraum $\text{im}(\Gamma - I)$ sogar ein Untervektorraum von R^n , und zwar $(\text{fix}(\Gamma) - f)^\perp$. $\square$

Nun kehren wir zur eigentlichen Fragestellung zurück.

Satz 2. Für alle $\psi \in \mathbf{R}$ ist

$$(8) \quad z \mapsto (\cos \psi + i \sin \psi)z(\cos \psi - i \sin \psi) + 1$$

bzw.

$$(9) \quad z \mapsto (\cos \psi + i \sin \psi)\bar{z}(\cos \psi - i \sin \psi) + 1$$

eine parabolische Projektivität bzw. Antiprojektivität der Quaternionengeraden q . Ist umgekehrt $\Pi : q \rightarrow q$ eine parabolische Projektivität bzw. Antiprojektivität, so gibt es eine Projektivität Δ so, daß $\Delta^{-1}\Pi\Delta$ die Normalform (8) bzw. (9) besitzt.

Zwei durch Zahlen $\psi_\kappa \in \mathbf{R}$ vermöge (8) bzw. (9) gegebene Projektivitäten bzw. Antiprojektivitäten Π_κ ($\kappa = 1, 2$) sind genau dann projektiv äquivalent, wenn eine der Zahlen

$$(10) \quad \sigma \pm \psi_1 \text{ mit } \sigma = \mu\pi, \mu \in \mathbf{Z}$$

gleich ψ_2 ist.

BEWEIS. (a). Nach dem Hilfssatz hat jede Abbildung (8) bzw. (9) außer ∞ keinen Fixpunkt.⁴

⁴Die Einschränkung der Abbildung (8) auf $\mathbf{H} = R^4$ wird etwa in [15,146] untersucht und dort *screw motion* genannt. Demgegenüber bezeichnen andere Autoren, wie etwa W. Wunderlich in [19], die durch (1) bestimmten Bewegungen als *Schraubungen*.

(b) Ist eine parabolische Projektivität oder Antiprojektivität $\Pi : q \rightarrow q$ gegeben, so können wir Π derart unter einer Projektivität $\Delta_1 : q \rightarrow q$ transformieren, daß $\Delta_1^{-1}\Pi\Delta_1$ den Fixpunkt ∞ hat, und für die Darstellung von $\Delta_1^{-1}\Pi\Delta_1|_{\mathbf{H}} =: \Omega = \Gamma\Sigma$ gemäß (7) gilt $0 \in \text{fix}(\Gamma)$. Mit den Bezeichnungen des Hilfssatzes folgt dann $0 \neq s \in \text{fix}(\Gamma)$. Es gibt eine Projektivität $\Delta_2 : q \rightarrow q$ so, daß einerseits $\Delta_2|_{\mathbf{H}}$ eine Ähnlichkeit mit Fixpunkt 0 ist, die s in den Punkt $1 \in \mathbf{H}$ überführt, und andererseits $(\Delta_2|_{\mathbf{H}})^{-1}\Gamma(\Delta_2|_{\mathbf{H}})$ die Matrixdarstellung (3) bzw. (4) mit $\lambda = 1$ hat. Für eine Projektivität Π gilt in (3) weiters $\varphi \equiv 0 \pmod{\pi}$. Wir erhalten somit durch Transformation von Π unter $\Delta_1\Delta_2$ die gewünschte Normalform.

(c) Die Aussage über die projektive Äquivalenz von Π_1 und Π_2 ergibt sich aus den Überlegungen in Satz 1, wenn wir $\Pi_1|_{\mathbf{H}}$ und $\Pi_2|_{\mathbf{H}}$ je als Produkt einer Kongruenz mit Fixpunkt 0 und der Schiebung $z \mapsto z + 1$ darstellen. $\square$

Die parabolischen Projektivitäten mit $\psi \equiv 0 \pmod{\pi}$ gehören zu den schon von J. BILO [5,45], [6,22] untersuchten *elementaren Projektivitäten*. Diese lassen sich nach Einbettung von q in eine projektive Ebene über $\mathbf{H}$ als Produkt von höchstens zwei Perspektivitäten darstellen. Vgl. auch G. PICKERT [17,3]. Die Abbildungen (8) und (9) mit $\psi \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ werden in [10], [11] nicht betrachtet.

2.3. Sollen für drei paarweise verschiedene Punkte $f, a, b \in q$ alle parabolischen Projektivitäten bzw. Antiprojektivitäten mit Fixpunkt f und $a \mapsto b$ ermittelt werden⁵, so können wir $f = \infty$ voraussetzen, da die Projektivitätengruppe von q transitiv auf q operiert. Der Hilfssatz gibt dann an, wie man alle gesuchten Abbildungen als Produkt einer geeigneten gleich- bzw. gegensinnigen Kongruenz Γ von $\mathbf{H}$ mit $a \in \text{fix}(\Gamma)$ und der festen Schiebung $\Sigma : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$, $z \mapsto z + (b - a)$ erhält. Die jeweiligen Abbildungen $\Gamma\Sigma$ sind dann noch durch $\infty \mapsto \infty$ auf ganz q fortzusetzen. Man erkennt leicht, daß alle parabolischen Projektivitäten von q , die einen festen Punkt f festlassen, gemeinsam mit der Identität von q *keine Gruppe* bilden.

2.4. Zum Abschluß geben wir noch eine Verfeinerung der in [11], Formeln (8.1) und (8.5) angegebenen Normalformen für fixpunktfreie Antiprojektivitäten an.

⁵Die Ergebnisse in [11,100] sind unvollständig.

Satz 3. Für alle Paare $(\varphi, \psi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ mit $\varphi, \psi \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ ist

$$(11) \quad z \mapsto (\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)) \bar{z}^{-1} (\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi))$$

eine fixpunktfreie Antiprojektivität der Quaternionengeraden q . Ist umgekehrt $\Pi : q \rightarrow q$ eine fixpunktfreie Antiprojektivität, so gibt es eine Projektivität Δ so, daß $\Delta^{-1}\Pi\Delta$ die Normalform (11) besitzt.

Zwei durch Paare $(\varphi_\kappa, \psi_\kappa) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ mit $\varphi_\kappa, \psi_\kappa \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ vermöge (11) gegebene Antiprojektivitäten Π_κ ($\kappa = 1, 2$) sind genau dann projektiv äquivalent, wenn eines der Paare

$$(12) \quad \begin{aligned} &(\sigma \pm \varphi_1, \sigma \pm \psi_1), (\sigma \pm \psi_1, \sigma \pm \varphi_1), \\ &(\sigma \mp \varphi_1, \sigma \pm \psi_1), (\sigma \pm \psi_1, \sigma \mp \varphi_1) \end{aligned} \quad \text{mit } \sigma = \mu\pi, \mu \in \mathbf{Z}$$

gleich (φ_2, ψ_2) ist.

BEWEIS. (a). Die Antiprojektivität (11) vertauscht 0 mit ∞ und führt jede Hypersphäre um 0 mit Radius ρ in eine konzentrische Hypersphäre mit Radius ρ^{-1} über. Auf der Einheitshypersphäre um 0 gibt es keinen Fixpunkt wegen $\varphi, \psi \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. Also ist (11) fixpunktfrei.

(b) Nach [11,102] besitzt jede fixpunktfreie Antiprojektivität Π ein vertauschbares Punktepaar. Mittels einer geeigneten Projektivität $\Delta_1 : q \rightarrow q$ können wir daher erreichen, daß $\Delta_1^{-1}\Pi\Delta_1$ die Punkte 0 und ∞ vertauscht.

Unter $\Delta_1^{-1}\Pi\Delta_1$ geht 1 in einen Punkt $a \in \mathbf{H}$ über. Es sei α jene positive reelle Zahl, für die $\alpha^4 = \text{Norm}(a) = a\bar{a}$ gilt. Wir transformieren $\Delta_1^{-1}\Pi\Delta_1$ unter der Projektivität $\Delta_2 : q \mapsto q, z \mapsto \alpha^{-1}z$. Schließlich sei $\Lambda : q \rightarrow q, z \mapsto \bar{z}^{-1}$ die Inversion an der Einheitshypersphäre um 0 und $\Pi' := \Lambda\Delta_2^{-1}\Delta_1^{-1}\Pi\Delta_1\Delta_2$. Dann ist $\Pi'|_{\mathbf{H}}$ wegen $\text{Norm}(\alpha^{\Pi'}) = \alpha^2$ eine gleichsinnige Kongruenz von $\mathbf{H}$, die nur den Fixpunkt 0 hat, da Π fixpunktfrei ist. Das ergibt mit (1) die gewünschte Normalform (11); vgl. die Formeln (8.1) und (8.5) in [11].

(c) Transformieren wir die Antiprojektivität Π_1 unter solchen Projektivitäten, die sich aus den Projektivitäten $z \mapsto -izk, z \mapsto -kzj$ bzw. $z \mapsto z^{-1}$ zusammensetzen lassen, so besitzen die transformierten Abbildungen die Bauart (11), wobei genau die Paare aus (12) auftreten.

Sind die Antiprojektivitäten Π_1 und Π_2 projektiv äquivalent, so gibt es eine Projektivität $\Delta : q \rightarrow q$ mit $\Pi_2 = \Delta^{-1}\Pi_1\Delta$. Es sei $\Pi'_\kappa := \Lambda\Pi_\kappa$, wo Λ die Inversion an der Einheitshypersphäre um 0 bezeichnet. Wir definieren $a, b \in q$ durch $a^\Delta = 0, b^\Delta = \infty$. Dann vertauscht Π_1 die Punkte a und b .

Fall 1: Für $a \in \{0, \infty\}$ bleibt die Einheitshypersphäre um 0 unter Δ fest. Damit gilt $\Lambda = \Delta^{-1}\Lambda\Delta$ und $\Pi'_2 = \Delta^{-1}\Pi'_1\Delta$; mit Satz 1 folgt die Behauptung.

Fall 2: Für $a \notin \{0, \infty\}$ hat die offene Halbgerade $a \cdot \mathbf{R}^+$ mit der Einheitshypersphäre um 0 genau einen Punkt a_1 gemeinsam. Es vertauscht Π'_1 die Punkte a_1 und $b_1 := a_1^{\Pi_1} \neq a_1$. Wäre $\{0, a_1, b_1\}$ ein Dreieck, so ergäbe die Einschränkung von Π'_1 auf die Ebene des Dreiecks eine Geraden Spiegelung im Widerspruch zu $\text{fix}(\Pi'_1) = \{0, \infty\}$. Daher folgt $b_1 = -a_1$, und mindestens eine der beiden Winkelzahlen φ oder ψ ist kongruent $\frac{\pi}{2}$ modulo π . Für $\varphi \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ transformieren wir Π_1 unter der Projektivität $\Delta_1 : q \rightarrow q, z \mapsto -izk$, was in (11) bloß einer Vertauschung von φ mit ψ entspricht; bei $\varphi \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ sei Δ_1 die Identität auf q . Wir setzen $\Pi_3 := \Delta_1^{-1}\Pi_1\Delta_1$. Weiters sei Δ_2 eine Projektivität von q , deren Einschränkung auf $\mathbf{H}$ eine Drehung um die Ebene $0 \vee j \vee k$ ist, wobei $\alpha := a^{\Delta_1\Delta_2} \in \mathbf{R}$ erfüllt sei. Dann ist $\Delta_2^{-1}\Pi_3\Delta_2 = \Pi_3$. Die involutorische Projektivität

$$\Delta_3 : q \rightarrow q, \quad z \mapsto (-z + \alpha)(\alpha z + 1)^{-1}$$

leistet $\alpha \mapsto 0, -\alpha^{-1} \mapsto \infty$ und (nach kurzer Rechnung) $\Delta_3^{-1}\Pi_3\Delta_3 = \Pi_3$; vgl. das Abbildungsdiagramm. Da bei Transformation unter

$$\begin{array}{ccccccccc} q & \xleftarrow{\Delta_3} & q & \xleftarrow{\Delta_2} & q & \xleftarrow{\Delta_1} & q & \xleftarrow{\Delta} & q \\ \Pi_3 \downarrow & & \Pi_3 \downarrow & & \Pi_3 \downarrow & & \Pi_1 \downarrow & & \downarrow \Pi_2 \\ q & \xleftarrow{\Delta_3} & q & \xleftarrow{\Delta_2} & q & \xleftarrow{\Delta_1} & q & \xleftarrow{\Delta} & q \end{array}$$

$\Delta_3^{-1}\Delta_2^{-1}\Delta_1^{-1}\Delta$ einerseits 0 in 0 und andererseits Π_3 in Π_2 übergeht, folgt nun wie in Fall 1 die gewünschte Aussage. $\square$

Literatur

- [1] W. BENZ, Vorlesungen über Geometrie der Algebren, Grundlehren Bd. **197**, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1973.
- [2] M. BERGER, Geometry I, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1987.
- [3] M. BERGER, Geometry II, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1987.
- [4] E. BERZ, Kegelschnitte in desarguesschen Ebenen, *Math. Z.* **78** (1962), 55–85.
- [5] J. BILO, Bijdrage tot de grondslagenleer der gewone complexe projectieve meetkunde en tot de zuiver synthetische studie der complexe grondfiguren van de eerste sort, *Verh. Konink. Acad. Wetensch. België* **11**, No. 29 (1949).
- [6] J. BILO, Onderzoekingen betreffende de meetkundige grondslagen van de projectieve quaternionenmeetkunde, A. Vanderlinden, Brussel, 1949.

- [7] W. BLASCHKE, Kinematik und Quaternionen, Math. Monographien **4**, Dt. Verlag d. Wissenschaften, Berlin, 1960.
- [8] O. GIERING, Vorlesungen über höhere Geometrie, Vieweg, Braunschweig, 1982.
- [9] L. GYARMATHI, Eine Charakterisierung der vierdimensionalen elliptischen Geometrie durch Quaternionen, *Publ. Math. Debrecen* **7** (1960), 204–210.
- [10] L. GYARMATHI, Die Konstruktionen der projektiven Geometrie der Quaternionengeraden I, *Publ. Math. Debrecen* **21** (1974), 233–248.
- [11] L. GYARMATHI, Die Konstruktionen der projektiven Geometrie der Quaternionengeraden II, *Publ. Math. Debrecen* **27** (1980), 93–106.
- [12] H. HAVLICEK, Applications of Results on Generalized Polynomial Identities in Desarguesian Projective Spaces, in: R. Kaya, K. Strambach, P. Plaumann (eds.): Rings and Geometry, *D. Reidel, Dordrecht*, 1985.
- [13] W. JANK, Ein Bündelmodell des dreidimensionalen elliptischen Raumes, *Sb. österr. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Kl., Abt. II* **186** (1977), 301–319.
- [14] W. KRÜGER, Kegelschnitte in Moufangebene, *Math. Z.* **120** (1971), 41–60.
- [15] H. P. MANNING, Geometry of Four Dimensions, *Dover, New York*, 1956.
- [16] H. R. MÜLLER, Sphärische Kinematik, Math. Monographien **6**, Dt. Verlag d. Wissenschaften, Berlin, 1962.
- [17] G. PICKERT, Projectivities in Projective Planes, in: K. Strambach, P. Plaumann (EDS.): Geometry—von Staudt's Point of View, *D. Reidel, Dordrecht*, 1981.
- [18] J. B. WILKER, Inversive Geometry, in: C. Davis, B. Grünbaum, F.A. Sherk (eds.): The Geometric Vein—The Coxeter Festschrift, *Springer, New York Heidelberg Berlin*, 1981.
- [19] W. WUNDERLICH, Zur Schraubung im vierdimensionalen euklidischen Raum, *J. reine angew. Math.* **285** (1976), 79–99.

HANS HAVLICEK
 INSTITUT FÜR GEOMETRIE
 TECHNISCHE UNIVERSITÄT
 WIEDNER HAUPTSTRASSE 8–10/113
 A–1040 WIEN
 AUSTRIA

(Received March 5, 1990)