

Über den zweiten Faktor der Klassenzahl und den Irregularitätsgrad der irregulären Kreiskörper.

Dem Andenken des unvergesslichen Freundes, Prof. Tibor Szele gewidmet.

Von PETER DÉNES in Budapest.

Es bezeichne p eine irreguläre Primzahl, ζ eine primitive p -te Einheitswurzel, $R(\zeta)$ den Kreiskörper der p -ten Einheitswurzeln, $\lambda = 1 - \zeta$, $l = (l)$. Bekanntlich ist $l^{p-1} = (p)$.

Der zweite Faktor der Klassenzahl des Kreiskörpers $R(\zeta)$ ist:

$$(1) \quad h_2 = \frac{A}{R},$$

wo A die Determinante

$$(2) \quad A = \left| \log \varepsilon^{s^{i+k}} \right| \quad \begin{matrix} (k=0, 1, \dots, \frac{p-5}{2}) \\ (i=0, 1, \dots, \frac{p-5}{2}) \end{matrix}$$

repräsentiert, in welcher

$$(3) \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{(1-\zeta^r)(1-\zeta^{-r})}{(1-\zeta)(1-\zeta^{-1})}}$$

ist und die symbolische Potenz s^g die Substitution $\zeta \rightarrow \zeta^{r^g}$ bezeichnet, wobei r eine primitive Wurzel modulo p ist; ferner ist R der Regulator des Körpers $R(\zeta)$, also die Determinante eines Systems von Fundamenteinheiten $\varrho_1, \dots, \varrho_{\frac{p-3}{2}}$:

$$(4) \quad R = \left| \log \varrho_k^{s^i} \right| \quad \begin{matrix} (k=1, 2, \dots, \frac{p-3}{2}) \\ (i=0, 1, \dots, \frac{p-5}{2}) \end{matrix}$$

Wir nehmen an, daß h_2 , der zweite Faktor der Klassenzahl des Körpers $R(\zeta)$ genau durch die f_2 -te Potenz von p teilbar ist:

$$(5) \quad h_2 = p^{f_2} \cdot q,$$

wobei q eine zu p prime ganze Zahl bezeichnet.

VANDIVER [6] zeigte, daß eine notwendige und hinreichende Bedingung für p/h_2 ist, daß eine der Einheiten E_i

$$E_i = \varepsilon^{G_i} \quad \left(i = 1, \dots, \frac{p-3}{2} \right),$$

wobei G_i eine symbolische Potenz

$$G_i = r^{p^3} + sr^{p^3-2i} + s^2r^{p^3-4i} + \dots + s^{\frac{p-3}{2}} r^{-(p-3)i}$$

bedeutet, die p -te Potenz einer Einheit in $R(\zeta)$ ist. Wir wollen den Wert f_2 in (5) in der vorliegenden Arbeit genau feststellen.

Satz 1. Ist die primitive Wurzel r modulo p in der Weise gewählt, daß die Kongruenz

$$(6) \quad r^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^F},$$

$F > f_2 + 1$ erfüllt wird und werden die Einheiten E_i

$$(7) \quad E_i = \varepsilon^{S_i} \quad \left(i = 1, \dots, \frac{p-3}{2} \right),$$

durch die symbolischen Potenzen

$$(8) \quad S_i = 1 + sr^{-2i} + s^2r^{-4i} + \dots + s^{\frac{p-3}{2}} r^{-(p-3)i}$$

erzeugt und sind schließlich die Einheiten E_i im allgemeinen p^{v_i} -te Potenzen von Einheiten aus $R(\zeta)$:

$$(9) \quad E_i = \delta_i^{p^{v_i}} \quad \left(i = 1, \dots, \frac{p-3}{2} \right),$$

$\delta_i \in R(\zeta)$, so ist

$$(10) \quad f_2 = \sum_{i=1}^{\frac{p-3}{2}} v_i.$$

BEWEIS. Im Körper $R(\zeta)$ gibt es nach POLLACZEK [4] ein System von fundamentalen Einheiten $\varrho_1, \dots, \varrho_{\frac{p-3}{2}}$, für welche die folgenden Gleichungen bestehen:

$$(11) \quad \varrho_i^{s-r^{2i}p^{c-1}} = H_i^{p^c} \quad \left(i = 1, \dots, \frac{p-3}{2} \right),$$

wobei c eine beliebige ganze rationale Zahl ist und $H_1, \dots, H_{\frac{p-3}{2}}$ Einheiten in $R(\zeta)$ sind. Wir wählen

$$(12) \quad c > f_2, \text{ jedoch } F > c.$$

Die Kreiseinheit ε kann mittelst der fundamentalen Einheiten in (11) ausgedrückt werden;

$$(13) \quad \varepsilon = \sum_{k=1}^{\frac{p-3}{2}} \varrho_k^{a_k};$$

hier bezeichnen $a_1, \dots, a_{\frac{p-3}{2}}$ ganze rationale Zahlen. Wenden wir auf (13) die Substitution s^i an, so erhalten wir zufolge (11) eine Gleichung

$$(14) \quad \varepsilon^{s^i} = \prod_{k=1}^{\frac{p-3}{2}} \varrho_k^{a_k} r^{2ikp^{c-1}} H_i'^{p^c} \quad \left(i = 1, 2, \dots, \frac{p-5}{2} \right),$$

in welcher $H_1', \dots, H_{\frac{p-5}{2}}'$ Einheiten aus $R(\zeta)$ sind. Aus (13) und (14) ergeben sich ferner

$$(15) \quad \log \varepsilon^{s^i} = \sum_{k=1}^{\frac{p-3}{2}} a_k r^{2ikp^{c-1}} \cdot \log \varrho_k + p^c \log H_i' \quad \left(i = 0, 1, \dots, \frac{p-5}{2} \right).$$

Gemäß dem Multiplikationsregel der Determinanten erhalten wir aus (1), (2), (4) und (15) die Kongruenz

$$(16) \quad h_2 \equiv \left| a_k \cdot r^{2ikp^{c-1}} \right| \begin{matrix} (i=0, 1, \dots, \frac{p-5}{2}) \\ (k=1, 2, \dots, \frac{p-3}{2}) \end{matrix} \pmod{p^c},$$

welche nach der VANDERMONDE'schen Lösung

$$(17) \quad h_2 \equiv \prod_{k=1}^{\frac{p-3}{2}} a_k \prod_{i,j=0, j < i}^{\frac{p-3}{2}} (r^{2ip^{c-1}} - r^{2jp^{c-1}}) \pmod{p^c}$$

ergibt. Da für $2i \not\equiv 2j \pmod{p-1}$ $r^{2ip^{c-1}} \not\equiv r^{2jp^{c-1}} \pmod{p}$ gilt, folgt aus (17)

$$(18) \quad \prod_{k=1}^{\frac{p-3}{2}} a_k \equiv 0 \pmod{p^{f_2}},$$

jedoch

$$(19) \quad \prod_{k=1}^{\frac{p-3}{2}} a_k \not\equiv 0 \pmod{p^{f_2+1}}.$$

Die Gleichungen (7) lassen sich mit Hilfe von (13) und (14) folgenderweise umformen:

$$(20) \quad E_i = \prod_{k=1}^{\frac{p-3}{2}} \varrho_k^{a_k} \sum_{j=0}^{\frac{p-3}{2}} r^{2jkp^{c-1}-2ij} \cdot H_i''^{p^c} \quad \left(i = 1, \dots, \frac{p-3}{2} \right),$$

wobei $H_1'', \dots, H_{\frac{p-3}{2}}''$ Einheiten in $R(\zeta)$ bezeichnen. Die Summe an der rechten Seite der Gleichung (20) ist

$$(21) \quad \sum_{j=0}^{\frac{p-3}{2}} r^{2jkp^{c-1}-2ij} = \frac{r^{(p-1)(kp^{c-1}-i)} - 1}{r^{2kp^{c-1}-2i} - 1}.$$

Falls $i \neq k$, $r^{2kp^{c-1}-2i} \not\equiv 1 \pmod{p}$, folglich wegen (6) und (12)

$$\sum_{j=0}^{\frac{p-3}{2}} r^{2jkp^{c-1}-2ij} \equiv 0 \pmod{p^c};$$

im Gegenteil, wenn $k=i$ ist, ist zufolge (12)

$$\sum_{j=0}^{\frac{p-3}{2}} r^{2jkp^{c-1}-2ij} \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{p^c}.$$

Hieraus folgt die einfache Form von (20):

$$(22) \quad E_i = \varrho_i^{a_i \cdot \frac{p-1}{2}} \cdot H_i''''^{p^c} \quad \left(i=1, \dots, \frac{p-3}{2} \right),$$

in welcher $H_1'', \dots, H_{\frac{p-3}{2}}''$ Einheiten in $R(\zeta)$ bezeichnen.

Aus (22) können wir — mit Rücksicht auf (12) — folgern, daß die Einheit E_i dann und nur dann die p^{v_i} -te Potenz einer Einheit in $R(\zeta)$ ist, wenn p^{v_i}/a_i besteht. (18) und (19) ergeben mit diesem Resultat den vollständigen Beweis des Satzes.

Der Wert des Exponenten f_2 kann mittels spezieller Zahlenreihen, welche den irregulären Kreiskörper charakterisieren, bestimmt werden. Diese Zahlenreihen wurden in früheren Arbeiten folgenderweise definiert:

Das „ p -Charakter der Bernoullischen Zahlen“ [1], $u_1, \dots, u_{\frac{p-3}{2}}$, werden gemäß der folgenden Kongruenzen, bzw. Inkongruenzen festgelegt:

$$(23) \quad B_{ip^j} \equiv 0 \pmod{p^{2j+1}} \quad \left(i=1, \dots, \frac{p-3}{2} \right), \\ (j=0, \dots, u_i-1),$$

$$(24) \quad B_{ip^{u_i}} \not\equiv 0 \pmod{p^{2u_i+1}} \quad \left(i=1, \dots, \frac{p-3}{2} \right).$$

Das „ p -Charakter der Kreiskörpergrundeinheiten“ [2], $u'_1, \dots, u'_{\frac{p-3}{2}}$, kommen in dem Grundeinheitssystem von $R(\zeta)$ in folgender Form vor:

$$(25) \quad \varrho_i \equiv m_i + n_i \zeta^{u'_i(p-1)+2i} \pmod{\zeta^{u'_i(p-1)+2i+1}} \quad \left(i=1, \dots, \frac{p-3}{2} \right),$$

wobei $m_1, \dots, m_{\frac{p-3}{2}}$, $n_1, \dots, n_{\frac{p-3}{2}}$ ganze rationale, zu p prime Zahlen sind.

Der Exponent von p , mit welcher der zweite Faktor der Klassenzahl von $R(\zeta)$ teilbar ist, kann mit Hilfe dieser Zahlenreihen folgenderweise ermittelt werden:

Satz 2. Bezeichnet f_2 das Exponent von p , mit welchem h_2 , der zweite Faktor der Klassenzahl von $R(\zeta)$ teilbar ist, so gilt

$$(26) \quad f_2 = \sum_{i=1}^{\frac{p-3}{2}} (u_i - u'_i),$$

wo $u_1 = u_{\frac{p-3}{2}}$ das p -Charakter der Bernoullischen Zahlen und $u'_1, \dots, u'_{\frac{p-3}{2}}$ das p -Charakter der Kreiskörpergrundeinheiten sind.

BEWEIS. Erfüllt die Zahl F nicht nur die Bedingung in (6): $F > f_2$, sondern auch $F > w$, wobei w den Irregularitätsgrad der Primzahl p bezeichnet [1], so sind die Einheiten E_i in (7) dieser Arbeit mit den Einheiten β_j ($j = 1, \dots, \frac{p-3}{2}$) in ([1], Satz 1) ersetzbar, wobei für i und j der Zusammenhang

$$i = \frac{p-1}{2} - j$$

gilt. Darüber kann man sich durch das Vollziehen der gezeichneten Operationen sofort überzeugen:

$$(27) \quad \beta_j = \prod_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \varepsilon_k^{2kj} \quad \left(j = 1, \dots, \frac{p-3}{2} \right)$$

und hier steht ε_k für $\varepsilon_k = \varepsilon^{s^k}$, gemäß der, in dieser Arbeit angewendeten Bezeichnungsart. (27) kann daher auch vermittelst symbolischer Potenz ausgedrückt werden:

$$(28) \quad \beta_j = \varepsilon^{s'_j}, \quad \left(j = 1, \dots, \frac{p-3}{2} \right)$$

wo

$$(29) \quad S'_i = s r^{p-1-2i} + s^2 r^{2(p-1)-4i} + \dots + s^{\frac{p-1}{2}} r^{\frac{p-1}{2}(p-1)-(p-1)i} \quad \left(i = 1, \dots, \frac{p-3}{2} \right)$$

ist. Mit Anbetracht auf (6) und auf $\varepsilon^{\frac{p-1}{2}} = \varepsilon$ folgt aus (8) und (29):

$$(30) \quad \varepsilon^{S_i} = \varepsilon^{S_i} \mathcal{G}_i^{p^{ic+1}}$$

mit einer Einheit $\mathcal{G}_i$ aus $R(\zeta)$. Da die p^{u+1} -te Potenz einer Zahl aus $R(\zeta)$ mit einer ganzen rationalen Zahl modulo p^{u+1} kongruent ist, folgt die Kongruenz aus (30) und aus ([1], Relation (10)):

$$(31) \quad E_i \equiv A_i + B_i \lambda^{(p-1)u_i+2i} \pmod{[(p-1)u_i+2i+1]} \quad \left(i = 1, \dots, \frac{p-3}{2} \right),$$

wobei $A_1, \dots, A_{\frac{p-3}{2}}, B_1, \dots, B_{\frac{p-3}{2}}$ ganze rationale, zu p prime Zahlen sind.

Wählt man nun die Zahl c in (12) auf die Weise, daß sie außer (12) auch der Bedingung $c > w$ genüge, so ist $H_i''^{p^c}$ in (22) mit einer ganzen rationalen Zahl g_i modulo p^{w+1} kongruent und damit folgt aus (22) die Kongruenz:

$$(32) \quad E_i \equiv g_i \varrho_i^{y_i p^{v_i}} \pmod{p^{(p-1)w+1}} \quad \left(i = 1, \dots, \frac{p-3}{2}\right),$$

wobei y_i eine zu p prime Zahl bezeichnet. Aus (25) und (31) ergibt also (32) wegen $p^{-1} = (p)$ sofort:

$$(33) \quad v_i = u_i - u'_i \quad \left(i = 1, \dots, \frac{p-3}{2}\right),$$

woraus wegen (10) der vollständige Beweis des Satzes folgt.

In der früheren Arbeit [1] habe ich das Problem aufgeworfen, ob der Irregularitätsgrad w des Kreiskörpers $R(\zeta)$ für eine endliche Primzahl p endlich sein muß? Zwar verwahrscheinlicht die Gleichung (26) — wo f_2 unbedingt endlich ist — diese Vermutung, zu dem präzisen Beweis dieser Tatsache sind noch einige, in späteren Arbeiten zu veröffentlichenden Eigenschaften des Kreiskörpers notwendig.

Nun wollen wir die Endlichkeit von w für endliche p unter Voraussetzung der Richtigkeit der Klassenkörperturmvermutung in einfacher Weise bestätigen.

Der Klassenkörperturm wird zu einem endlichen algebraischen Zahlkörper k folgenderweise aufgestellt: K_1 bezeichne den Klassenkörper von k , K_2 den Klassenkörper von K_1 , und so weiter, im allgemeinen K_{i+1} bezeichnet den Klassenkörper von K_i . So kann man die Reihe $k, K_1, \dots, K_n, \dots$ aufstellen.

Gemäß der berühmten Vermutung von FURTWÄNGLER soll diese Reihe von Klassenkörpern bei einer endlichen Zahl n abbrechen, d.h. die Klassenzahl von K_n ist gleich Eins und K_n ist mit seinem Klassenkörper identisch. (Erörterungen für spezielle Fälle siehe z.B. [5]).

Unter den Zahlen $u'_1, \dots, u'_{\frac{p-3}{2}}$ sei etwa $u'_t = w'$ die größte, wo w' der reduzierte Irregularitätsgrad von $R(\zeta)$ genannt wurde ([2], § 3, S. 203.) Für die Einheit ϱ_t in (25) gilt dann die Kongruenz

$$(34) \quad \varrho_t \equiv m_t \pmod{p^{w'}}$$

wobei m_t eine ganze rationale, zu p prime Zahl ist. Da es ferner aus (27), (32), (33) und ([1], Relation (10)) folgt, daß

$$(35) \quad E_t^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^{w'+v_t}}$$

ist, bekommen wir aus (32):

$$(36) \quad g_t^{p-1} \varrho_t^{y_t p^{v_t}} \equiv 1 \pmod{p^{w'+v_t}}.$$

Nun ist wegen $c > w$ die Einheit $H_i^{p^{w+1}}$ mit der p^{w+1} -ten Potenz einer ganzen rationalen Zahl modulo p^{w+1} kongruent, bezeichnet durch g_i . Hieraus folgt, daß

$$g_i^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^{w+1}}$$

ist und da gemäß den Definitionen $w \geq w' + v_i$ gilt, ergibt sich hiemit aus (36):

$$(37) \quad \delta_i = \rho_i^{p^{w'}(p-1)} \equiv 1 \pmod{p^{w'}};$$

jedoch ist die Kongruenz (37) für den Modul $p^{w'+1}$ nicht mehr gültig.

Ist $w' > 0$, so ist δ_i eine singuläre Primärzahl in $R(\zeta)$ [3] und die Adjunktion der p -ten Wurzel von δ_i erzeugt einen Teilklassenkörper über $R(\zeta)$. Die Zahl

$$\sqrt[p]{\delta_i}$$

liegt also in K_1 , im ersten absoluten Klassenkörper von $R(\zeta)$. Wir nehmen an, daß nicht nur $\sqrt[p]{\delta_i}$, sondern auch die Zahl II_1

$$II_1 = \sqrt[p^{e_1}]{\delta_i}$$

in K_1 liegt; die p -te Wurzel von II_1 ist jedoch keine Zahl in K_1 . Aus der Unverzweigtheit von K_1 über $R(\zeta)$ folgt, daß eine Kongruenz

$$(38) \quad \delta_i \equiv 1 \pmod{p^{e_1}}$$

bestehen muß; ferner muß z_1 eine endliche Zahl sein, weil der absolute Grad des Körpers K_1 endlich ist und der Grad der algebraischen Gleichung, welcher II_1 genügt, wenigstens p^{e_1} ist, den Grad von K_1 jedoch nicht überschreiten kann. Aus (37) und (38) gilt ferner

$$(39) \quad w' \geq z_1.$$

Gilt in (39) $w' > z_1$, so ist die Zahl II_1 eine singuläre Primärzahl in K_1 und bestimmt ihre p -te Wurzel einen Teilklassenkörper von K_1 . Wir nehmen wieder an, daß außer $\sqrt[p]{II_1}$ auch die Zahl

$$II_2 = \sqrt[p^{e_2}]{II_1}$$

in K_2 liegt, die Zahl $\sqrt[p]{II_2}$ jedoch nicht. Hier bezeichnet K_2 den absoluten Klassenkörper von K_1 . Wie vorher, können wir für die Zahl z_2 die Zusammenhänge

$$\delta_i \equiv 1 \pmod{p^{e_1+e_2}}$$

und

$$(40) \quad w' \geq z_1 + z_2$$

folgern, wie auch die Tatsache, daß z_2 endlich sein muß. Gilt in (40) das Ungleichungszeichen, so können wir auf gleiche Weise fortfahren. Da die Anzahl der Reihe von Klassenkörpern bei n abbricht, kann K_n keine singuläre Primärzahl enthalten. Die entsprechende Relation von (40) für K_n ist also nur für das Gleichheitszeichen gültig:

$$(41) \quad w' = z_1 + z_2 + \cdots + z_n.$$

Die Zahlen $z_1, \dots, z_n$ und n sind sämtlich endliche Zahlen; demzufolge ist auch w' endlich. Da aber w' die größte unter den Zahlen $u'_1, \dots, u'_{\frac{p-3}{2}}$ bezeichnet, sind sowohl diese Zahlen, wie auch ihre Summe endlich. Ferner ist auch die Klassenzahl von $R(\zeta)$ und daher auch f_2 endlich. Aus (26) folgt daher, daß auch

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-3}{2}} u_i.$$

also sämtliche Mitglieder der Zahlenreihe $u_1, \dots, u_{\frac{p-3}{2}}$ endlich sind. Hiedurch ist bewiesen, daß w — die größte in dieser Zahlenreihe — selbst endlich sein muß.

Literatur.

- [1] P. DÉNES, Über irreguläre Kreiskörper, *Publ. Math. Debrecen* 3 (1953), 17—23.
- [2] P. DÉNES, Über Grundeinheitssysteme der irregulären Kreiskörper von besonderen Kongruenzeigenschaften, *Publ. Math. Debrecen* 3 (1954), 195—204.
- [3] PH. FURTWÄNGLER, Allgemeiner Existenzbeweis für den Klassenkörper eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers, *Math. Ann.* 63 (1906), 1—37.
- [4] F. POLLACZEK, Über die irregulären Kreiskörper der l -ten und l^2 -ten Einheitswurzeln, *Math. Z.* 21 (1924), 1—38.
- [5] A. SCHOLZ, Zwei Bemerkungen zum Klassenkörperturm, *J. Reine Angew. Math.* 161 (1929), 201—207.
- [6] H. S. VANDIVER, On the second factor of the class number of a cyclotomic field, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 16 (1930), 743—749.

(Eingegangen am 8. August, 1955.)