

Eigenwerte verallgemeinerter Toeplitzscher Matrizen.

Ich widme diese Arbeit dem Andenken meines Freundes T. Szele.

Von B. GYIRES in Debrecen.

In der vorliegenden Arbeit behandeln wir quadratische Matrizen der Ordnung p , deren Elemente reelle oder komplexe Funktionen mit der Periode 2π der reellen Veränderlichen x sind. Solche Matrizen nennen wir im folgenden Funktionenmatrizen. Sind die Elemente der Funktionenmatrix trigonometrische Polynome, bzw. im Intervall $-\pi \leq x \leq \pi$ beschränkte, integrierbare oder stetige Funktionen, dann sprechen wir von einer trigonometrischen Polynommatrix, bzw. von einer beschränkten, integrierbaren oder stetigen Funktionenmatrix. Unter dem Grade einer trigonometrischen Polynommatrix verstehen wir die maximale unter den echten Gradzahlen der sie bildenden Polynome. Unter dem Integral einer integrierbaren Funktionenmatrix verstehen wir die durch „elementenweise“ Integration entstehende Matrix. Die Determinante einer quadratischen Matrix wird durch zwei Vertikalstriche bezeichnet. Unter dem Absolutwert einer Matrix verstehen wir die aus den Absolutwerten der Elemente gebildete Matrix; zu seiner Bezeichnung soll die Matrix zwischen Paare von Vertikalstrichen gesetzt werden. Eine Ungleichung für reelle Matrizen bedeutet das Bestehen der entsprechenden Ungleichung für sämtliche Paare entsprechender Elemente. Wir nennen eine Matrizenfolge konvergent, falls die aus den Gliedern mit gleichen Indizes gebildete Folgen sämtlich konvergent sind.

Es sei $f(x)$ eine integrierbare Funktionenmatrix. Die Matrix

$$(1) \quad T_n(f) = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdot & \cdot & \cdot & c_n \\ c_{-1} & c_0 & \cdot & \cdot & \cdot & c_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{-n} & c_{-n+1} & \cdot & \cdot & \cdot & c_0 \end{pmatrix} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

der Ordnung $(n+1)p$ soll die durch $f(x)$ erzeugte n -te verallgemeinerte Toeplitzsche Matrix genannt werden, falls für die Elemente

$$(2) \quad c_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i\nu x} dx \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

gilt.

Wir bezeichnen die Konjugierte der Transponierten der Matrix $f(x)$, die sog. begleitende Matrix von $f(x)$, mit $f^*(x)$. Ist die Matrix $f(x)$ Hermitesch, d. h. gilt

$$(3) \quad f(x) = f^*(x) \quad (-\pi \leq x \leq \pi),$$

dann ist auch

$$c_{-v} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ivx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(x) e^{-ivx} dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ivx} dx \right)^* = c_v^*,$$

so daß auch die Matrizen (1) Hermitesch sind. Bekanntlich sind die Eigenwerte Hermitescher Matrizen reelle Zahlen. Die Eigenwerte

$$(4) \quad \lambda_1(x), \dots, \lambda_p(x)$$

der Hermiteschen Funktionenmatrix $f(x)$, und die Eigenwerte

$$(5) \quad \lambda_{\nu k}^{(n)} \quad (\nu = 0, 1, \dots, n; k = 1, \dots, p; n = 0, 1, 2, \dots)$$

der durch $f(x)$ erzeugten Matrix (1) sind also sämtlich reell.

Falls $f(x)$ nicht nur (3) erfüllt, sondern auch auf der ganzen Zahlen-gerade stetig ist, dann sind die Funktionen (4) beschränkt, d. h. es gibt Zahlen m, M , für welche die Ungleichungen

$$(6) \quad m \leq \lambda_k(x) \leq M \quad (k = 1, \dots, p; -\pi \leq x \leq \pi)$$

bestehen.

Zweck unserer Arbeit ist der Beweis folgenden Satzes:

Satz 1. *Es sei $f(x)$ eine stetige Hermitesche Funktionenmatrix. Die Eigenwerte von $f(x)$ seien die die Ungleichungen (6) erfüllenden Funktionen (4), und die Eigenwerte der von $f(x)$ erzeugten Matrix (1) die Zahlen (5). Unter solchen Voraussetzungen gelten die Ungleichungen*

$$(7) \quad m \leq \lambda_{\nu k}^{(n)} \leq M \quad (\nu = 0, 1, \dots, n; k = 1, \dots, p; n = 0, 1, 2, \dots)$$

und für eine im Intervall $m \leq \lambda \leq M$ definierte stetige Funktion $F(\lambda)$ gilt

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n \sum_{k=1}^p F(\lambda_{\nu k}^{(n)}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [F(\lambda_1(x)) + \dots + F(\lambda_p(x))] dx.$$

Dies ist eine Verallgemeinerung des Satzes, den der Autor in [6] für symmetrische stetige reelle Funktionenmatrizen bewiesen hat. Der betreffende Satz von [6] ist seinerseits eine Verallgemeinerung des von G. SZEGŐ für $p=1$ bewiesenen Satzes ([1], S. 189, Satz A)). Das vom Autor in der erwähnten Arbeit benutzte Beweisverfahren ermöglicht auch den Beweis solcher Sätze, die für die in der vorliegenden Arbeit befolgten Methoden nicht unmittelbar zugänglich sind.

Ist $f(x)$ positiv definit, d. h. existiert eine positive Zahl die nicht größer ist als die Determinante von $f(x)$, so kann in (7) für m auch eine positive Zahl gewählt werden. Im entgegengesetzten Falle würde die Weiersraßsche untere Grenze der Wertevorräte der Funktionen (4) mit Null zusammenfallen. Da aber die Wurzeln einer algebraischen Gleichung stetige Funktionen der Koeffizienten sind ([4], S. 121, Satz XII.) und auch $f(x)$ stetig ist, so sind die Funktionen (4) stetig. Da nun eine stetige Funktion mindestens einmal den Wert ihrer Weirstraßschen unteren Grenze annimmt, so würde mindestens eine der Funktionen (4) und somit auch $|f(x)|$ mindestens an einer Stelle verschwinden, was unseren Voraussetzungen widerspricht.

Es sei also $f(x)$ im obigen Sinne positiv definit. Für $F(\lambda) = \log \lambda$ erhalten wir aus (8)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{\prod_{\nu=0}^n \prod_{k=1}^p \lambda_{\nu k}^{(n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{|T_n(f)|} = e^{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(x)| dx}$$

und dies ist eine Verallgemeinerung eines von G. SZEGÖ für den Fall $p=1$ gefundenen Satzes ([2], S. 491).

Beweis des Satzes 1. Den Nachweis von (7) werden wir von der Matrix (1) entsprechenden Hermiteschen Form ausgehend führen. Es sei also

$$(9) \quad x_k = (x_1^{(k)}, \dots, x_p^{(k)}) \quad (k=0, 1, \dots, n)$$

eine aus einer einzigen Zeile und p Spalten bestehende Matrix, und die Konjugierte der Transponierten dieser Matrix sei x_k^* . Somit kann die zur Matrix (1) gehörige Hermitesche Form ((1) wird durch die Matrix $f(x)$, die den Bedingungen des Satzes genüge leistet, erzeugt) in der Gestalt

$$(10) \quad H(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n x_k c_{k-l} x_l^*$$

geschrieben werden. Berücksichtigen wir noch, daß die Elemente von (1) durch (2) gegeben sind, so erhalten wir

$$(11) \quad H(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p f_{st}(x) [P_s(z) \bar{P}_t(z)]_{z=e^{ix}} dx,$$

wo $f_{st}(x)$ das Element mit entsprechenden Indizes der Matrix $f(x)$ bedeutet,

$$(12) \quad P_s(z) = x_s^{(0)} + x_s^{(1)} z + \dots + x_s^{(n)} z^n \quad (s=1, \dots, p)$$

gilt und $\bar{P}_s(z)$ die Konjugierte von $P_s(z)$ ist. Es soll nunmehr die auf der rechten Seite von (11) unter dem Integralzeichen stehende Hermitesche Form durch unitäre Transformation in eine Quadratsumme überführt werden. Dann ergibt sich

$$(13) \quad H(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\lambda_1(x) \|\varphi_1(z)\|^2 + \dots + \lambda_p(x) \|\varphi_p(z)\|^2]_{z=e^{ix}} dx,$$

wo die Funktionen $\varphi_k(z)$ mit den Funktionen (12) durch eine unitäre Transformation zusammenhängen und dementsprechend

$$\|\varphi_1(z)\|^2 + \cdots + \|\varphi_p(z)\|^2 \equiv \|P_1(z)\|^2 + \cdots + \|P_p(z)\|^2$$

gilt. Daraus ergibt sich mit Rücksicht auf (12)

$$(14) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\|\varphi_1(z)\|^2 + \cdots + \|\varphi_p(z)\|^2]_{z=e^{ix}} dx = x_0 x_0^* + x_1 x_1^* + \cdots + x_n x_n^*.$$

Falls wir uns nun auf diejenigen Werte von (9) beschränken, welche auf der Einheitskugel liegen, d. h. für welche

$$(15) \quad x_0 x_0^* + x_1 x_1^* + \cdots + x_n x_n^* \equiv 1$$

gilt, und darauf Rücksicht nehmen, daß die Funktionen (4) der Ungleichung (6) genügen, so erhalten wir wegen (13), (14) und (15)

$$(16) \quad m \leq H(x_0, x_1, \dots, x_n) \leq M.$$

Da aber das Maximum, bzw. das Minimum der Form (10) auf der Einheitskugel durch den größten, bzw. durch den kleinsten der Eigenwerte (5) gegeben ist, so gilt auf Grund von (11) das System von Ungleichungen (7).

Die Gleichung (8) beweisen wir zuerst für den Fall, wo $f(x)$ eine Hermitesche trigonometrische Polynommatrix ist. Zu diesem Zwecke verallgemeinern wir einen Satz von TOEPLITZ. Dieser verallgemeinerte Toeplitz'sche Satz lautet folgendermaßen:

Satz 2. Es seien die Funktionen (4) die Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Hermiteschen trigonometrischen Polynommatrix $\varphi(x)$. Bedeutet f_n , bzw. g_n die Anzahl derjenigen unter den Eigenwerten (5) der Matrix $T_n(\varphi)$, welche nicht kleiner, bzw. kleiner als α — für eine beliebige reelle konstante α — sind, dann ist

$$(17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{n+1} = \frac{s_1(\alpha) + \cdots + s_p(\alpha)}{2\pi}$$

und

$$(18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_n}{n+1} = \frac{r_1(\alpha) + \cdots + r_p(\alpha)}{2\pi},$$

wo $s_k(\alpha)$, bzw. $r_k(\alpha)$ die Gesamtlänge derjenigen Teilintervalle von $-\pi \leq x \leq \pi$ bedeutet, für welche $\lambda_k(x) \geq \alpha$, bzw. $\lambda_k(x) < \alpha$ ($k=1, \dots, p$) gilt.

BEWEIS. Wir setzen zuerst $\alpha=0$ voraus. Der Grad von $\varphi(x)$ sei μ , ist

$$(19) \quad \varphi(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} e^{i\nu x},$$

dann muß jede hier auftretende Zahlenmatrix, für die der Absolutwert des Index μ übertrifft, mit der Nullmatrix der Ordnung p zusammenfallen.

Mit den in (19) auftretenden Matrizen

$$a_0, a_1, \dots, a_n$$

der Ordnung p als Parametern bilden wir nun, der angedeuteten Reihenfolge entsprechend, die verallgemeinerte zirkulante Matrix

$$(20) \quad Z_n(\varphi) = \begin{pmatrix} T_n(\varphi) & A_n(\varphi) \\ A_n^*(\varphi) & T_{n-1}(\varphi) \end{pmatrix},$$

wo

$$A_n(\varphi) = \begin{pmatrix} a_{-n} & a_{-n+1} & \dots & a_{-2} & a_{-1} \\ a_n & a_{-n} & \dots & a_{-3} & a_{-2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_{-n} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

ist. Ist nun

$$M(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + a_{-n} z^{n+1} + a_{-n+1} z^{n+2} + \dots + a_{-1} z^{2n}$$

und

$$\alpha_j = \frac{2\pi}{2n+1} j \quad (j=0, 1, \dots, 2n),$$

dann kann, wie bekannt ([5], S. 6.), die charakteristische Gleichung der Matrix (20) in der Form

$$(21) \quad \prod_{j=0}^{2n} |M(e^{i\alpha_j}) - \lambda(1)_p| = 0$$

geschrieben werden. Wegen

$$(e^{i\alpha_j})^{n+r} = (e^{i\alpha_j})^{-(n-r+1)} \quad (r=1, \dots, n),$$

ist im Falle $\mu \leq n$ mit Rücksicht auf (19)

$$M(e^{i\alpha_j}) = \sum_{r=-\mu}^{\mu} a_r e^{i r \alpha_j} = \varphi(\alpha_j),$$

so daß (21) durch die Gleichung

$$(22) \quad \prod_{j=0}^{2n} |\varphi(\alpha_j) - \lambda(1)_p| = 0$$

ersetzt werden kann. Da die Eigenwerte von $\varphi(x)$ durch (4) gegeben sind, so sind auf Grund von (22) die Eigenwerte der Matrix (20) die Größen

$$(23) \quad \lambda_k(\alpha_j) \quad (j=0, 1, \dots, 2n; k=1, \dots, p),$$

falls nur $\mu \leq n$ gilt.

Falls in (23) bei festem k die Anzahl der nichtnegativen bzw. der negativen Eigenwerte mit $f_n^{(k)}$ bzw. $g_n^{(k)}$ bezeichnet wird, so ergibt sich, auf ähnliche Weise wie im von TOEPLITZ behandelten Falle $p=1$ ([3], p. 360)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n^{(k)}}{2n+1} = \frac{s_k(0)}{2\pi}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_n^{(k)}}{2n+1} = \frac{r_k(0)}{2\pi}$$

und daher für $\alpha=0$ (17) bzw. (18).

Ist $\alpha \neq 0$, so wenden wir den soeben bewiesenen Spezialfall des Satzes auf die ebenfalls Hermitesche trigonometrische Polynommatrix $\varphi(x) - \alpha(1)_p$ an, und so ergibt sich (17) bzw. (18) auch für jedes reelles α , womit der Satz 2. bewiesen ist.

Es sei nunmehr

$$l(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda < \alpha \\ 1 & \text{für } \lambda \geq \alpha, \end{cases}$$

dann besagt die soeben bewiesene Gleichung (17) dasselbe, wie (8) für eine Hermitesche trigonometrische Polynommatrix, im Falle $F(\lambda) = l(\lambda)$. Daraus folgt sofort, daß (8) auch dann besteht, falls $F(\lambda)$ eine Treppenfunktion ist. Mit Rücksicht darauf, daß jede stetige Funktion durch Treppenfunktionen gleichmäßig approximierbar ist, können wir mit Hilfe des von G. SZEGÖ angewandten Beweisverfahrens ([1], S. 191—192) die Gleichung (8) für eine beliebige, im Intervall $m \leq \lambda \leq M$ stetige Funktion $F(\lambda)$ beweisen, falls nur $f(x)$ eine Hermitesche trigonometrische Polynommatrix ist. Damit haben wir den Satz 1 für Hermitesche trigonometrische Polynommatrizen bewiesen.

Es sei nunmehr $f(x)$ eine stetige Hermitesche Funktionenmatrix. Kraft des Weierstraßschen Satzes kann eine solche durch Hermitesche trigonometrische Polynommatrizen gleichmäßig approximiert werden. Es sei demnach

$$\varphi_s(x) \quad (s = 1, 2, \dots)$$

eine Folge Hermitescher trigonometrischer Polynommatrizen, für welche

$$(24) \quad \|f(x) - \varphi_s(x)\| < \frac{1}{s} E_p$$

gilt, wo E_p diejenige Matrix der Ordnung p bedeutet, die aus lauter Einsen besteht.

Es sei

$$c_\nu^{(s)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_s(x) e^{-i\nu x} dx$$

und es sei c_ν der mit $f(x)$ gebildete Ausdruck (2); dann gilt

$$\|c_\nu - c_\nu^{(s)}\| = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - \varphi_s(x)) e^{-i\nu x} dx \right\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f(x) - \varphi_s(x)\| dx < \frac{1}{s} E_p$$

und folglich

$$\lim_{s \rightarrow \infty} c_\nu^{(s)} = c_\nu \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

so daß

$$\lim_{s \rightarrow \infty} T_n(\varphi_s) = T_n(f)$$

ist. Bezeichnen wir die Eigenwerte von $T_n(\varphi_s)$ mit

$$\lambda_{\nu k}^{(n)} \quad (\nu = 0, 1, \dots, n; k = 1, \dots, p),$$

dann ist also

$$(25) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \lambda_{\nu k}^{(n)} = \lambda_{\nu k}^{(n)},$$

wo auf der rechten Seite die Eigenwerte der Matrix $T_n(f)$ stehen.

Es seien die Eigenwerte von $\varphi_s(x)$

$$\lambda_{(s)}^{(x)} \quad (k = 1, \dots, p; s = 1, 2, \dots).$$

Offenbar sind diese mit Rücksicht auf (24) gleichmäßig beschränkt. Wählen wir die Zahlen m und M so, daß (6) und die Ungleichungen

$$m \leq \lambda_{(s)}^{(x)} \leq M \quad (s = 1, 2, \dots; k = 1, \dots, p)$$

gleichzeitig bestehen; dann gelten außer den Ungleichungen (7) auch die Ungleichungen

$$m \leq \lambda_{k\nu}^{(n)} \leq M$$

$$(\nu = 0, 1, \dots, n; k = 1, \dots, p; n = 0, 1, 2, \dots, s = 1, 2, \dots).$$

Es sei nunmehr $F(\lambda)$ eine die Bedingungen des Satzes 1 erfüllende Funktion. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$R^{(n)} = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n \sum_{k=1}^p F(\lambda_{\nu k}^{(n)}),$$

$$R_s^{(n)} = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n \sum_{k=1}^p F(\lambda_{\nu k}^{(n)}) \quad (s = 1, 2, \dots),$$

$$A_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=1}^p F(\lambda_{(s)}^{(x)}) \right] dx$$

$$A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=1}^p F(\lambda_k(x)) \right] dx.$$

Sämtliche Integrale existieren, da die Integranden stetige Funktionen sind.

Da $F(\lambda)$ eine stetige Funktion ist, gilt

$$\|F(\lambda_{\nu k}^{(n)}) - F(\lambda_{\nu k}^{(n)})\| < \frac{\varepsilon}{3p}$$

für

$$\|\lambda_{\nu k}^{(n)} - \lambda_{\nu k}^{(n)}\| < \delta_1(\varepsilon),$$

bzw. auf Grund von (25) falls $s > N(\delta_1(\varepsilon)) = N_1(\varepsilon)$ ist, und so haben wir

$$(26) \quad \|R^{(n)} - R_s^{(n)}\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für } s > N_1(\varepsilon).$$

Auf Grund des, für trigonometrische Polynommatrizen bereits bewiesenen Satzes 1 ist

$$(27) \quad \|R_s^{(n)} - A_s\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für } n > N(\varepsilon, s).$$

Da die Wurzeln einer algebraischen Gleichung stetige Funktionen der Koeffizienten sind, so ist

$$F(\lambda_k(x)) = \Phi_k(\varphi_s(x)), \quad F(\lambda_k(x)) = \Phi_k(f(x)),$$

die zwischen Klammern stehenden Matrizen bedeuten, daß die betreffende Funktion von den p^2 Elementen der Matrix abhängig ist, und zwar ist diese Abhängigkeit, laut des vorher gesagten, eine stetige. Dementsprechend gilt

$$\|F(\lambda_k(x)) - F(\lambda_k(x))\| = \|\Phi_k(f(x)) - \Phi_k(\varphi_s(x))\| < \frac{\varepsilon}{3p}$$

für

$$\|f(x) - \varphi_s(x)\| < \delta_2(\varepsilon) E_p,$$

bzw. gemäß (24) für $s > N(\delta_2(\varepsilon)) = N_2(\varepsilon)$. Daraus ergibt sich

$$(28) \quad \|A_s - A\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für } s > N_2(\varepsilon).$$

Geben wir jetzt (26) und (28) entsprechend, s einen festen Wert, dann ergibt sich gemäß (27)

$$\|R^{(n)} - A\| \leq \|R^{(n)} - R_s^{(n)}\| + \|R_s^{(n)} - A_s\| + \|A_s - A\| \quad \text{für } n > N(\varepsilon).$$

Damit haben wir den Satz 1 vollständig bewiesen.

Bei unserem Beweise des ersten Teiles von Satz 1 (Ungleichung (7)) genügt es die Funktionenmatrix $f(x)$ als integrierbar voraussetzen. Die Stetigkeit von $f(x)$ haben wir nur bei dem Beweis von (8) ausgenutzt. Demnach ist die Frage naheliegend, ob nicht der Satz 1 auch unter der alleinigen Voraussetzung der Integrierbarkeit von $f(x)$ bewiesen werden kann? Auf diese Frage werden wir an anderer Stelle noch zurückkommen.

Von Satz 1 ausgehend, kann man auch den folgenden Satz beweisen:

Satz 3. *Es sei $f(x)$ eine, die Bedingungen des Satzes 1 erfüllende Funktionenmatrix und es seien $\alpha < \beta$ zwei reelle Konstanten. Falls die Menge derjenigen Stellen x , für welche*

$$\alpha < \lambda_k(x) < \beta \quad (k = 1, \dots, p)$$

gilt, keine Nullmenge ist, dann fällt für genügend großes n irgendeiner der Werte (5) in das Intervall $\alpha \leq x \leq \beta$.

Für $p = 1$ findet sich dieser Satz bei G. SZEGŐ. Der von SZEGŐ gegebene Beweis bleibt auch in diesem allgemeinen Fall wörtlich gültig. ([1], S. 216—217).

Aus diesem Satz ergibt sich folgendes

Korollar 1. *Ist $\lambda_a^{(n)}$, bzw. $\lambda_\omega^{(n)}$ das kleinste, bzw. das größte Element von (5) und gilt*

$$(29) \quad \inf_{-\pi \leq x \leq \pi} \lambda_k(x) = m_k, \quad \sup_{-\pi \leq x \leq \pi} \lambda_k(x) = M_k$$

$$(k = 1, \dots, p),$$

dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\alpha}^{(n)} = m, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\omega}^{(n)} = M,$$

wo m , bzw. M die kleinste, bzw. die größte unter den Zahlen (29) bedeutet.

Mit Rücksicht darauf, daß gemäß unseren, der Funktionenmatrix $f(x)$ auferlegten Bedingungen die Eigenwerte (4) stetige Funktionen sind und die durch (29) definierten Zahlen m_k , bzw. M_k das Minimum, bzw. Maximum der Funktion $\lambda_k(x)$ bedeuten, gilt folgendes

Korollar 2. Die Eigenwerte (5) liegen in den Intervallen $m_k \leq \lambda \leq M_k$ ($k = 1, \dots, p$) überall dicht.

Literatur.

- [1] G. SZEGŐ, A Toeplitz-féle formákról, *Math. Termud. Értesítő* **35** (1917), 185—222.
- [2] G. SZEGŐ, Ein Grenzwertsatz über die Toeplitzschen Determinanten einer reellen positiven Funktion, *Math. Ann.* **76** (1915), 490—503.
- [3] O. TOEPLITZ, Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen von unendlichvielen Veränderlichen. 1. Teil: Theorie der L -Formen, *Math. Ann.* **70** (1911), 351—377.
- [4] H. WEBER, Lehrbuch der Algebra, *Braunschweig*, 1928.
- [5] Aufgaben und Lösungen, *Jber. Deutsch. Math. Verein.* **42** (1932), 6—12.
- [6] B. GYIRES, Über zu reellen Funktionenmatrizen gehörige verallgemeinerte Toeplitzsche Determinanten, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* (In Erscheinung.)

(Eingegangen am 23. August, 1955.)