

## Sur une propriété de la fonction $\varphi(n)$ .

Dédié à la mémoire de T. Szele

Par W. SIERPIŃSKI à Varsovie.

Le but de cette Note est de démontrer la propriété suivante de la fonction  $\varphi(n)$  (où  $\varphi(n)$  est le nombre de tous les nombres naturels  $\leq n$  et premiers avec  $n$ ):

**Théorème 1.** *Il existe pour tout nombre naturel  $k$  un nombre naturel  $n_k$  tel que  $\varphi(n_k + k) = \varphi(n_k)$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $k$  un nombre naturel et soit  $p$  le plus petit nombre premier qui ne divise pas  $k$ . Tout nombre premier  $< p$  est donc un diviseur de  $k$ , d'où il résulte que tout facteur premier du nombre  $p-1$  est un diviseur de  $k$  et il s'en suit que  $\varphi((p-1)k) = (p-1)\varphi(k)$ . Or, comme  $(p, k) = 1$  on a  $\varphi(pk) = \varphi(p)\varphi(k) = (p-1)\varphi(k)$ . On a ainsi  $\varphi(pk) = \varphi((p-1)k)$  et pour  $n_k = (p-1)k$  on a l'égalité  $\varphi(n_k + k) = \varphi(n_k)$ . Notre théorème se trouve ainsi démontré.

Pour  $k$  impairs on a évidemment  $p=2$ , donc  $n_k = k$ .

Il résulte de notre théorème que pour tout nombre naturel  $k$  donné l'équation  $\varphi(x+k) = \varphi(x)$  a au moins une solution (en nombres naturels  $x$ ). Or, il est à remarquer que le nombre  $n_k$  défini dans la démonstration de notre théorème peut n'être pas le plus petit nombre naturel  $x_k$  satisfaisant à l'équation  $\varphi(x+k) = \varphi(x)$ . Par exemple  $n_7 = 7$  et  $x_7 = 5$ ,  $n_8 = 16$  et  $x_8 = 13$ . Voici les valeurs de nombres  $x_k$  pour  $k \leq 25$ :  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 4$ ,  $x_3 = 3$ ,  $x_4 = 8$ ,  $x_5 = 5$ ,  $x_6 = 24$ ,  $x_7 = 5$ ,  $x_8 = 13$ ,  $x_9 = 9$ ,  $x_{10} = 20$ ,  $x_{11} = 7$ ,  $x_{12} = 48$ ,  $x_{13} = 13$ ,  $x_{14} = 16$ ,  $x_{15} = 13$ ,  $x_{16} = 26$ ,  $x_{17} = 17$ ,  $x_{18} = 52$ ,  $x_{19} = 19$ ,  $x_{20} = 37$ ,  $x_{21} = 21$ ,  $x_{22} = 44$ ,  $x_{23} = 13$ ,  $x_{24} = 96$ ,  $x_{25} = 25$ .

En utilisant la formule connue  $\lim_{n \rightarrow \infty} [\pi(2n) - \pi(n)] = +\infty$  (où  $\pi(x)$  est le nombre de nombres premiers  $\leq x$ ) ANDRÉ SCHINZEL a démontré le théorème suivant.

**Théorème 2.** *Il existe pour tout nombre naturel  $m$  un nombre naturel  $k$  tel que l'équation  $\varphi(x+k) = \varphi(x)$  a plus que  $m$  solutions en nombres naturels  $x$ .<sup>1)</sup>*

<sup>1)</sup> Ce théorème, ainsi que sa démonstration publiée ci-dessus, m'ont été communiqués par une lettre de M. ANDRÉ SCHINZEL.

DÉMONSTRATION. Désignons par  $p_i$  le  $i$ -ème nombre premier.  $m$  étant un nombre naturel donné il existe un nombre naturel  $n$  tel que  $\pi(2p_{n+1}) - \pi(p_{n+1}) \geq m$ . Posons  $k = p_1, p_2 \dots p_n$ . Soit  $q$  un nombre premier tel que

$$(1) \quad p_{n+1} \leq q < 2p_{n+1}.$$

Le nombre  $q-1$  est évidemment pair: s'il avait un diviseur premier  $> p_n$ , donc  $\geq p_{n+1}$ , on aurait  $q-1 \geq 2p_{n+1}$  contrairement à (1). Donc tout diviseur premier du nombre  $q-1$  est un diviseur de  $k$  d'où il résulte que  $\varphi((q-1)k) = (q-1)\varphi(k)$  et, comme  $(q, k) = 1$ , d'où  $\varphi(qk) = \varphi(q)\varphi(k) = (q-1)\varphi(k)$ , on obtient  $\varphi((q-1)k + k) = \varphi((q-1)k)$  pour tout nombre premier  $q$  satisfaisant aux inégalités (1). Or, il existe évidemment  $\pi(2p_{n+1}) - \pi(p_{n+1}) + 1 > m$  de tels nombres  $q$ , ce qui prouve que l'équation  $\varphi(x+k) = \varphi(x)$  a plus que  $m$  solutions. Le théorème 2 se trouve ainsi démontré.

Or, je ne sais pas s'il existe pour tout nombre naturel  $k$  plus qu'une solution de l'équation  $\varphi(x+k) = \varphi(x)$  (ou s'il en existe une infinité), ni s'il existe pour tout nombre naturel  $m$  un nombre naturel  $s_m$  tel que pour  $k$  naturels  $> s_m$  l'égalité  $\varphi(x+k) = \varphi(x)$  a plus que  $m$  solutions.

(Reçu le 29 août 1955.)