

Über die Quasiideale von Halbgruppen.

Dem Andenken von Professor T. Szele gewidmet.

Von OTTO STEINFELD in Szeged.

§ 1. Einleitung.

Wir haben in unserer Arbeit [7] den Begriff des Quasiideals in Ringen eingeführt und in einer anderen Arbeit [8] einige Ergebnisse über die Quasiideale publiziert. In dieser Arbeit werden wir diesen Begriff auf Halbgruppen übertragen. Eine nicht-leere Untermenge α der Halbgruppe H wird ein *Quasiideal* genannt, wenn

$$(1) \quad H\alpha \cap \alpha H \subseteq \alpha$$

gilt. Es ist klar, daß die Ideale, die einseitigen Ideale einer Halbgruppe H stets Quasiideale von H sind. Als fernerer Beispiel erwähnen wir die multiplikative Halbgruppe R_n aller $n \times n$ Matrizen über einem Ring R , wo die Menge aller Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & a_{ik} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (a_{ik} \in R)$$

ein Quasiideal ist.

Ein Quasiideal oder ein einseitiges Ideal α der Halbgruppe H heißt *trivial*, wenn $\alpha = H$ oder $\alpha = (0)$ gilt (wo 0 das eventuell vorhandene Nullelement von H bezeichnet) und *eigentlich*, wenn $\alpha \neq H$ gilt. Ferner nennen wir ein Quasiideal $\mathfrak{b}$ von H *minimal*, wenn in H kein Quasiideal $\mathfrak{b}'$ mit $\mathfrak{b}' \subset \mathfrak{b}$ existiert. Ähnlich können die minimalen ein- und zweiseitigen Ideale definiert werden.

In § 2 besprechen wir die allgemeinen Ergebnisse über die Quasiideale. Als Hauptresultat beweisen wir hier, daß der Durchschnitt eines Links- und Rechtsideals einer Halbgruppe H ein Quasiideal ist, und umgekehrt, jedes Quasiideal von H als Durchschnitt eines geeigneten Links- und

Rechtsideals darstellbar ist. Wir erwähnen noch das folgende Ergebnis: Wenn die Halbgruppe H mindestens ein nicht-triviales Quasiideal enthält, welches kein einseitiges Ideal von H ist, so besitzt H auch mindestens ein nicht-triviales Linksideal und ein nicht-triviales Rechtsideal.

In § 3 werden wir uns mit dem speziellen Fall beschäftigen, wo die Halbgruppe H mindestens ein minimales Quasiideal enthält. Die Ergebnisse dieses Paragraphen sind meistens in dem Fall interessant, wenn die Halbgruppe H kein Nullelement enthält. Dann nennen wir die Halbgruppe kurz *nullfrei*. Wir beweisen, daß der Durchschnitt eines minimalen Links- und Rechtsideals einer Halbgruppe H ein minimales Quasiideal von H ist, und umgekehrt jedes minimale Quasiideal von H als Durchschnitt eines geeigneten minimalen Links- und Rechtsideals darstellbar ist. (Satz 3.) Weiterhin zeigen wir u. a. die folgenden zwei Ergebnisse: Ein Quasiideal α einer Halbgruppe ist dann und nur dann minimal, wenn α eine Gruppe ist; alle minimalen Quasiideale einer Halbgruppe sind untereinander isomorph. A. SUSCHKEVITSCH [9] hat den Begriff der "Kerngruppe" einer endlichen Halbgruppe eingeführt. D. REES [5], A. H. CLIFFORD [1], [2], L. FUCHS [3] und ŠT. SCHWARZ [6] haben die Resultate von A. SUSCHKEVITSCH weit entwickelt. Wir verstehen — wie gewöhnlich — unter dem *Suschkevitsch-Kern* (Kerngruppe) einer Halbgruppe H den nicht-leeren Durchschnitt aller zweiseitigen Ideale von H . Die minimalen Quasiideale spielen eine wichtige Rolle in der Zerlegung des Suschkevitsch-Kerns und der minimalen einseitigen Ideale. Es gilt nämlich: „Enthält die Halbgruppe H mindestens ein minimales Quasiideal, so ist der Suschkevitsch-Kern bzw. jedes minimale Linksideal (Rechtsideal) von H die Vereinigung aller minimalen Quasiideale bzw. von gewissen minimalen Quasiidealen von H “. Zuletzt wird eine hinreichende Bedingung gegeben, damit eine mindestens ein minimales Quasiideal enthaltende Halbgruppe ein Einselement besitze. Einige Ergebnisse dieses Paragraphen folgen leicht aus Satz 3 und aus bekannten Resultaten von A. H. CLIFFORD [2], ŠT. SCHWARZ [6]. Diese werden hier von neuem mit einer neuen Methode bewiesen.

In § 4 beweisen wir einige Ergebnisse über die Halbgruppen mit relativ Inversen (s. unten) und REESSche (completely simple) Halbgruppen. Es gilt u. a., daß jedes Quasihauptideal einer Halbgruppe mit relativ Inversen eine Halbgruppe mit relativ Inversen ist. Wir geben eine notwendige und hinreichende Bedingung, damit eine Halbgruppe mit relativ Inversen mindestens ein minimales Quasiideal besitze. Ferner wird bewiesen, daß ein zweiseitiges Ideal m einer nullfreien Halbgruppe H dann und nur dann die Vereinigung aller minimalen Quasiideale von H ist, wenn m eine REESSche Halbgruppe, oder eine idealfreie Halbgruppe mit relativ Inversen ist. Zuletzt definieren wir nach L. FUCHS [3] den Rang eines Quasihauptideals $\langle \alpha \rangle$ einer Halbgruppe mit relativ Inversen und beweisen, daß $\langle \alpha \rangle$ die Vereinigung von gewissen paarweise fremden Gruppen ist.

Wir bemerken noch, daß unsere Ergebnisse über Halbgruppen H , deren Suschkewitsch-Kern (existiert und) von H verschieden ist, bei einer anderen Gelegenheit besprochen werden.

§ 2. Allgemeines über Quasiideale.

Satz 1. *Der Durchschnitt eines Links- und Rechtsideals der Halbgruppe H ist ein Quasiideal. Umgekehrt, jedes Quasiideal a von H ist als Durchschnitt eines geeigneten Links- und Rechtsideals darstellbar¹⁾, und zwar:*

$$a = (a, Ha) \cap (a, aH).$$

BEWEIS. Da für ein Linksideal l und Rechtsideal r von H stets, $rl \subseteq l \cap r$ besteht, ist $l \cap r$ nicht leer. Ferner ist auch

$$(1') \quad H(l \cap r) \cap (l \cap r)H \subseteq Hl \cap rH \subseteq l \cap r$$

erfüllt, was unsere erste Behauptung beweist.

Um die zweite Behauptung nachzuweisen, bezeichne a ein Quasiideal von H und D den Durchschnitt des Linksideals (a, Ha) und des Rechtsideals (a, aH) . Es ist klar, daß $a \subseteq D$ besteht. Ferner gehört jedes Element δ von D zu a , oder gleichzeitig zu Ha und aH . In beiden Fällen folgt $D \subseteq a$, somit ist Satz 1 richtig.

Nach der Definition (1) oder nach Satz 1 sind die folgenden Ergebnisse leicht einzusehen:

Lemma 1. *Jedes Quasiideal einer Halbgruppe H ist eine Unterhalbgruppe von H .*

Lemma 2. *Eine Gruppe enthält kein eigentliches Quasiideal.*

Lemma 3. *Der Durchschnitt von zwei Quasiidealen einer Halbgruppe ist leer oder selbst ein Quasiideal.*

Nun führen wir den folgenden Begriff ein. Unter einem durch ein Element α der Halbgruppe H erzeugte *Quasihauptideal* $\langle \alpha \rangle$ verstehen wir den Durchschnitt aller das Element α enthaltenden Quasiideale von H .

Lemma 4. *Der Durchschnitt eines Quasiideals a und einer Unterhalbgruppe S einer Halbgruppe ist leer oder ein Quasiideal von S .*

Lemma 5. *Es sei ε ein idempotentes Element, l ein Linksideal und r ein Rechtsideal der Halbgruppe H . Dann sind εl und $r\varepsilon$ Quasiideale von H .*

Ergänzung. *Es gilt: $\varepsilon l = l \cap \varepsilon H$ und $r\varepsilon = H\varepsilon \cap r$.*

¹⁾ Wir erwähnen hier das folgende interessante Problem von Professor L. FUCHS: Gibt es einen Ring R mit einem Quasiideal a , das kein Durchschnitt eines Links- und Rechtsideals von R ist?

Aus dieser Ergänzung folgt, daß $\varepsilon H \varepsilon$ ($\varepsilon^2 = \varepsilon$) mit $\langle \varepsilon \rangle$ übereinstimmt.

Es ist klar, daß die Vereinigung von zwei Linksidealen (Rechtsidealen, Idealen) einer Halbgruppe H wieder ein Linksideal (Rechtsideal, Ideal) von H ist. Das folgende Beispiel zeigt, daß ähnliches über die Quasiideale einer Halbgruppe im allgemeinen falsch ist. In der Halbgruppe K_2 aller 2×2 Matrizen über einem Schiefkörper K ist die Vereinigung α der Quasiideale

$$\alpha_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots \right\} \text{ und } \alpha_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \dots \right\} \quad (\alpha_{11}, \alpha_{22} \in K) \text{ kein Quasiideal. Da}$$

das Element $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1, \alpha \in K)$ in $K_2 \alpha \cap \alpha K_2$ aber nicht in α enthalten ist, ist unsere Behauptung wegen (1) richtig.²⁾

Wir beweisen noch folgenden

Satz 2. Wenn ein nicht-triviales Quasiideal α der Halbgruppe H kein einseitiges Ideal von H ist, so ist $H\alpha$ (αH) ein nicht-triviales Linksideal (Rechtsideal) von H .

BEWEIS. Setzen wir voraus, daß $H\alpha$ ein triviales Linksideal von H ist. Da α wegen der Voraussetzung kein Linksideal ist, ist der Fall $H\alpha = (0)$ unmöglich, also muß $H\alpha = H$ bestehen. Nach (2) gilt: $\alpha = H \cap (\alpha, \alpha H) = (\alpha, \alpha H)$, woraus $\alpha H \subseteq \alpha$ folgt, d. h. α ist im Gegensatz zu unserer Annahme ein Rechtsideal von H . Damit haben wir Satz 2 bewiesen.

§ 3. Ergebnisse über minimale Quasiideale.

Wir beweisen zuerst folgende Verschärfung vom Satz 1.

Satz 3. Der Durchschnitt eines minimalen Links- und Rechtsideals der Halbgruppe H ist ein minimales Quasiideal von H . Umgekehrt, jedes minimale Quasiideal α von H ist als Durchschnitt eines geeigneten minimalen Links- und Rechtsideals darstellbar, und zwar:

$$\alpha = H\alpha \cap \alpha H,$$

wo α irgendein Element von α bezeichnet.

BEWEIS. Nach Satz 1 ist der Durchschnitt δ eines minimalen Linksideals l und Rechtsideals r von H ein Quasiideal. Setzen wir voraus, daß δ nicht minimal ist. Dann gibt es ein Quasiideal δ' mit $\delta' \subset \delta$. Da l und r minimal sind, muß $H\delta' = l$ und $\delta'H = r$ sein. Wegen (1) besteht auch $\delta = l \cap r = H\delta' \cap \delta'H \subseteq \delta'$, was der Voraussetzung $\delta' \subset \delta$ widerspricht. Damit ist die erste Hälfte des Satzes bewiesen.

²⁾ Ob das Produkt von zwei Quasiidealen einer Halbgruppe stets ein Quasiideal ist, ist eine offene Frage.

Ist α ein minimales Quasiideal von H , so gilt wegen der Definition von α für ein beliebiges Element α von α

$$(3) \quad H\alpha \cap \alpha H = \alpha.$$

Wir behaupten, daß $H\alpha$ ein minimales Linksideal von H ist. Wenn es nämlich in H ein Linksideal I mit $I \subset H\alpha$ gibt, so besteht auch

$$(4) \quad HI \subseteq I \subset H\alpha.$$

Es bezeichne D den Durchschnitt von HI und αH . Wegen (3) und (4) gilt:

$$(5) \quad D = HI \cap \alpha H \subseteq H\alpha \cap \alpha H = \alpha.$$

Da D nach Satz 1 ein Quasiideal ist, folgt es aus (5) wegen der Minimalität von α

$$D = HI \cap \alpha H = \alpha,$$

also $\alpha \subseteq HI$ gilt. Daraus folgt $H\alpha \subseteq H\alpha \subseteq HI$, was der Annahme (4) widerspricht.

Ebenso kann man nachweisen, daß αH ein minimales Rechtsideal von H ist. Damit ist der Beweis des Satzes 3 beendet.

In A. H. CLIFFORD [2] sind folgende Ergebnisse bewiesen:

Ist I bzw. r ein minimales Linksideal bzw. Rechtsideal der Halbgruppe H , so gelten:

a) rI ist eine Gruppe,

b) ist ε das Einselement von rI , so ist $I = H\varepsilon$, $r = \varepsilon H$ und $I \cap r = \varepsilon H\varepsilon$,

c) $I \cap r = rI$.

Aus Satz 3 und a), b), c) folgt sofort:

Satz 4a. *Jedes minimale Quasiideal α einer Halbgruppe H ist eine Gruppe³⁾ und in der Form $\alpha = \varepsilon H\varepsilon$ darstellbar, wo ε das Einselement der Gruppe α bezeichnet.*

Wir geben hier für Satz 4a auch einen selbständigen Beweis, welcher wesentlich nur auf Satz 3 gegründet ist.

Offenbar können wir annehmen, daß H nullfrei ist; im entgegengesetzten Falle ist nämlich (0) das einzige minimale Quasiideal.

Wegen Satz 3 gilt für irgendein Element α von α :

$$(6) \quad H\alpha \cap \alpha H = \alpha,$$

$$(7) \quad H\alpha^2 \cap \alpha^2 H = \alpha.$$

Aus (6) bzw. (7) folgt, daß sich jedes Element β von α in der Form

$$(6') \quad \beta = \lambda\alpha = \alpha\mu \quad (\lambda, \mu \in H),$$

$$(7') \quad \beta = \nu\alpha^2 = \alpha^2\rho \quad (\nu, \rho \in H)$$

³⁾ Diese Behauptung war eine in einer Unterredung erwähnte Vermutung von Professor ŠT. SCHWARZ, welche mich zu den Ergebnissen von § 3 führte.

schreiben läßt. Z. B. können wir das Element $\alpha (\in \alpha)$ in der Form

$$(7'') \quad \alpha = \nu^* \alpha^2 = \alpha^2 \rho^* \quad (\nu^*, \rho^* \in H)$$

darstellen. Wegen $\nu^* \alpha^2 \rho^* = \nu^* \alpha = \alpha \rho^*$ ist $\nu^* \alpha$ ein Element von $H\alpha \cap \alpha H = \alpha$, ferner ist $\nu^* \alpha = \varepsilon$ wegen $\nu^* \alpha \cdot \nu^* \alpha = \nu^* \alpha \cdot \alpha \rho^* = \nu^* \alpha^2 \rho^* = \nu^* \alpha$ ein idempotentes Element in α . Nach Satz 3 gilt:

$$(3') \quad \alpha = H\varepsilon \cap \varepsilon H \quad (\varepsilon^2 = \varepsilon \in \alpha).$$

und daraus folgt nach der Ergänzung vom Lemma 5

$$(8) \quad \alpha = \varepsilon H \varepsilon \quad (\varepsilon^2 = \varepsilon \in \alpha).$$

Um den Beweis zu beenden, genügt es nachzuweisen, daß $\alpha = \varepsilon H \varepsilon$ eine Gruppe ist. Da ε ein linksseitiges Einselement von α ist, sollen wir nur einsehen, daß es zu jedem Element $\varepsilon \sigma \varepsilon \in \alpha$ mindestens ein Element $\varepsilon \sigma' \varepsilon (\in \alpha)$ mit $\varepsilon \sigma' \varepsilon \cdot \varepsilon \sigma \varepsilon = \varepsilon$ gibt. Da nach Lemma 5 $\varepsilon H \varepsilon \cdot \varepsilon \sigma \varepsilon (\subseteq \alpha)$ ein Quasiideal ist, ist wegen der Minimalität von $\alpha = \varepsilon H \varepsilon$ auch $\varepsilon H \varepsilon \cdot \varepsilon \sigma \varepsilon = \varepsilon H \varepsilon$ erfüllt, womit unsere Behauptung und Satz 4a bewiesen ist.

Man sieht, daß aus Sätzen 3, 4a die Ergebnisse a), b), c) leicht zu erreichen sind.

Als Ergänzung zu Satz 4a beweisen wir

Satz 4b. *Alle minimalen Quasiideale einer Halbgruppe H sind untereinander isomorph.*

BEWEIS. Es seien $\alpha_1 = \varepsilon_1 H \varepsilon_1 (\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1)$ und $\alpha_2 = \varepsilon_2 H \varepsilon_2 (\varepsilon_2^2 = \varepsilon_2)$ zwei minimale Quasiideale und α ein festes Element von H . Für $\varepsilon_1 \alpha \varepsilon_2 (\in \varepsilon_1 H \varepsilon_2)$ gilt wegen $\varepsilon_1 \alpha \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_2 H \varepsilon_2 \subseteq \varepsilon_1 H \varepsilon_1$, Lemma 5 und der Minimalität des Quasiideals $\varepsilon_1 H \varepsilon_1$ die Bedingung $\varepsilon_1 \alpha \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_2 H \varepsilon_2 = \varepsilon_1 H \varepsilon_1$. Daraus folgt die Existenz eines Elementes $\varepsilon_2 \beta \varepsilon_1$ mit $\varepsilon_1 \alpha \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_2 \beta \varepsilon_1 = \varepsilon_1$. Da $\varepsilon_2 \beta \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 \alpha \varepsilon_2$ wegen $(\varepsilon_2 \beta \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 \alpha \varepsilon_2)^2 = \varepsilon_2 \beta \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 \alpha \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_2 \beta \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 \alpha \varepsilon_2 = \varepsilon_2 \beta \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 \alpha \varepsilon_2 = \varepsilon_2 \beta \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 \alpha \varepsilon_2$ ein idempotentes Element der Gruppe $\varepsilon_2 H \varepsilon_2$ ist, stimmt $\varepsilon_2 \beta \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 \alpha \varepsilon_2$ mit ε_2 überein. Wir behaupten, daß $\varepsilon_1 \rho \varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2 \beta \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 \rho \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 \alpha \varepsilon_2$ eine isomorphe Abbildung von $\varepsilon_1 H \varepsilon_1$ auf $\varepsilon_2 H \varepsilon_2$ darstellt. Da die genannte Abbildung die Inverse $\varepsilon_2 \sigma \varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_1 \alpha \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_2 \sigma \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_2 \beta \varepsilon_1$ hat und die Homomorphie nach $\varepsilon_1 \rho \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 \sigma \varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2 \beta \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 \rho \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 \sigma \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 \alpha \varepsilon_2 = \varepsilon_2 \beta \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 \rho \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 \alpha \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_2 \beta \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 \sigma \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1 \alpha \varepsilon_2$ erfüllt ist, ist Satz 4b bewiesen.

Wir beweisen hier auch die Umkehrung der ersten Hälfte vom Satz 4a.

Satz 5. *Wenn ein Quasiideal α einer Halbgruppe H eine Gruppe ist, so ist α ein minimales Quasiideal von H .*

BEWEIS. Setzen wir voraus, daß α nicht minimal ist. Dann gibt es in H ein Quasiideal α' mit

$$(9) \quad \alpha' \subset \alpha.$$

Da α' wegen $\alpha \alpha' \cap \alpha' \alpha \subseteq H \alpha' \cap \alpha' H \subseteq \alpha'$ ein Quasiideal auch von der Gruppe α ist, widerspricht (9) dem Lemma 2, womit Satz 5 bewiesen ist.

Aus Sätzen 4a, 5 folgt:

Korollar 1. *Ein Quasiideal α einer Halbgruppe H ist dann und nur dann minimal, wenn α eine Gruppe ist.*

Zu den folgenden benutzen wir

Lemma 6. (Vgl. ŠT. SCHWARZ [6].) *Wenn I (r) ein minimales Linksideal (Rechtsideal) und $\varepsilon (\in I(r))$ ein idempotentes Element der Halbgruppe H ist, so ist εI ($r\varepsilon$) eine Gruppe,⁴⁾ sogar ein minimales Quasiideal von H .*

BEWEIS. Es genügt unsere Behauptung bezüglich εI nachzuweisen. Da $\varepsilon I \cdot \varepsilon I = \varepsilon \cdot I\varepsilon I \subseteq \varepsilon I$, ist εI eine Halbgruppe. Offenbar ist ε ein linksseitiges Einselement von εI . Da wegen der Minimalität von I auch $I \cdot \varepsilon I = I$ gilt ($\lambda \in I$), ist $\varepsilon I \cdot \varepsilon I = \varepsilon I$ auch erfüllt. Daraus folgt, daß es für jedes $\varepsilon \lambda (\in \varepsilon I)$ mindestens ein Element $\varepsilon \lambda' (\in \varepsilon I)$ mit der Bedingung $\varepsilon \lambda' \cdot \varepsilon \lambda = \varepsilon$ gibt. Somit ist εI eine Gruppe. Nach Lemma 5 ist εI ein Quasiideal, das wegen Satz 5 minimal ist.

Satz 6. *Für eine Halbgruppe H sind folgende Bedingungen äquivalent:*

- (A) *H enthält mindestens ein minimales Quasiideal,*
- (B) *H enthält mindestens ein minimales Links- und Rechtsideal,*
- (C) *H enthält mindestens ein minimales Linksideal und jedes minimale Linksideal von H besitzt mindestens ein idempotentes Element,*
- (D) *H enthält mindestens ein minimales Rechtsideal und jedes minimale Rechtsideal von H besitzt mindestens ein idempotentes Element.*

BEWEIS. Aus der zweiten Hälfte vom Satz 3 folgt: (A) $\Rightarrow$ (B). Wegen a) ist auch (B) $\Rightarrow$ (C) und (B) $\Rightarrow$ (D) richtig. Da aus Lemma 6 (C) $\Rightarrow$ (A) und (D) $\Rightarrow$ (A) folgt, ist der Beweis beendet.⁵⁾

Die minimalen Quasiideale einer Halbgruppe H spielen eine wichtige Rolle in der Zerlegung der minimalen Links- und Rechtsideale von H . Es gilt der folgende Satz:

Satz 7. *Wenn für eine Halbgruppe H die Bedingung (A) erfüllt ist, so ist jedes minimale Linksideal (Rechtsideal) von H die Vereinigung von gewissen (paarweise fremden) minimalen Quasiidealen von H .*

Zum Beweis des Satzes benutzen wir

Lemma 7. *Ist α ein minimales Quasiideal einer Halbgruppe H , so sind für alle Elemente ϱ von H auch $\varrho\alpha$ und $\alpha\varrho$ minimale Quasiideale von H .*

⁴⁾ Ähnlicherweise gilt für einen Ring R : Wenn I (r) ein minimales Linksideal (Rechtsideal) und $\varepsilon (\in I(r))$ ein idempotentes Element von R ist, so ist εI ($r\varepsilon$) ein Schiefkörper.

⁵⁾ Im Beweis von (C) $\Rightarrow$ (A) und (D) $\Rightarrow$ (A) benutzen wir nur die Tatsache, daß ein minimales Linksideal (Rechtsideal) von H ein idempotentes Element besitzt. Bezüglich der Äquivalenz von (B), (C), (D) siehe ŠT. SCHWARZ [6].

BEWEIS. Nach Satz 4a können wir α in der Form $\alpha = \varepsilon H \varepsilon$ schreiben, wo ε ein idempotentes Element in α ist. Da nach Lemma 5 $\rho \alpha = \rho \varepsilon H \varepsilon$ ein Quasiideal ist, genügt es wegen Satz 5 zu zeigen, daß $\rho \varepsilon H \varepsilon$ eine Gruppe ist. Wegen der Minimalität des Quasiideals $\varepsilon H \varepsilon$ gilt für ein beliebiges Element $\rho \varepsilon \sigma \varepsilon$ von $\rho \varepsilon H \varepsilon$

$$\rho \varepsilon \sigma \varepsilon \cdot \rho \varepsilon H \varepsilon = \rho \cdot \varepsilon \sigma \varepsilon \rho \varepsilon H \varepsilon = \rho \cdot \varepsilon H \varepsilon = \rho \varepsilon H \varepsilon,$$

ferner

$$\rho \varepsilon H \varepsilon \cdot \rho \varepsilon \sigma \varepsilon = \rho \cdot \varepsilon H \varepsilon \rho \varepsilon \sigma \varepsilon = \rho \cdot \varepsilon H \varepsilon = \rho \varepsilon H \varepsilon,$$

deshalb ist $\rho \varepsilon H \varepsilon$ eine Gruppe, was den Beweis beendet.

BEWEIS DES SATZES 7. Nach der Voraussetzung besitzt jedes minimale Linksideal $l (\subseteq H)$ infolge Satz 6 mindestens ein idempotentes Element ε , deshalb läßt sich l in der Form $l = H \varepsilon$ schreiben. Nach Lemma 6 und 7 ist $\varepsilon l = \varepsilon H \varepsilon$ bzw. $\sigma \varepsilon \cdot \varepsilon H \varepsilon = \sigma \varepsilon H \varepsilon$ mit $\sigma \varepsilon (\in H \varepsilon)$ ein minimales Quasiideal von H . Da $\sigma \varepsilon \in \sigma \varepsilon H \varepsilon \subseteq H \varepsilon$, ist jedes Element $\sigma \varepsilon$ von $H \varepsilon$ mindestens in einem in $H \varepsilon$ liegenden minimalen Quasiideal von H enthalten. Wegen Lemma 3 ist entweder der Durchschnitt der minimalen Quasiideale $\rho \varepsilon H \varepsilon$ und $\sigma \varepsilon H \varepsilon$ leer oder $\rho \varepsilon H \varepsilon = \sigma \varepsilon H \varepsilon$; deshalb ist jedes Element von $H \varepsilon$ nur in einem minimalen Quasiideal enthalten. Damit haben wir Satz 7 bewiesen.

Aus den Sätzen 4a, 4b, 6, 7 bekommen wir gleich das folgende bekannte Ergebnis. (S. H. HASHIMOTO [4].)

Satz 8. *Ist in einer (nullfreien) Halbgruppe H die Bedingung (B) erfüllt, so ist jedes minimale Links- und Rechtsideal von H eine Vereinigung von paarweise fremden isomorphen Gruppen.*

Ist für die Halbgruppe H die Bedingung (B) erfüllt, so ist bekanntlich die Vereinigung aller minimalen Linksideale (Rechtsideale) von H der Suschkewitsch-Kern von H . (S. A. H. CLIFFORD [2].) Aus diesem Ergebnis und aus Sätzen 3, 6 folgt unmittelbar:

Satz 9. *Ist für die Halbgruppe H die Bedingung (A) erfüllt, so ist die Vereinigung aller minimalen Quasiideale von H der Suschkewitsch-Kern von H .*

Wir geben hier einen anderen Beweis, welcher im wesentlichen auf das folgende wichtige Lemma gegründet ist.

Lemma 8. *Ist die Vereinigung M aller minimalen Quasiideale α_i einer Halbgruppe H nicht leer, so ist M ein minimales Ideal von H und als Halbgruppe idealfrei.⁶⁾*

⁶⁾ Wir nennen eine Halbgruppe H idealfrei, wenn H kein von H und (0) verschiedenes (zweiseitiges) Ideal besitzt.

BEWEIS. Wir werden zuerst zeigen, daß $M = \sum_i a_i$ ein minimales Ideal von H ist. Da mit einem beliebigen Element $\varphi (\in H)$ $\varphi M = \varphi \sum_i a_i = \sum_i \varphi a_i$ gilt, ist wegen Lemma 7 und nach der Definition von M auch $\varphi M = \sum_i \varphi a_i \subseteq M$ erfüllt. M ist also ein Linksideal von H . Ebenso folgt, daß M ein Rechtsideal von H ist; M ist also ein (zweiseitiges) Ideal von H . Es sei n ein Ideal von H mit

$$(10) \quad n \subseteq M = \sum_i a_i.$$

Betrachten wir jetzt ein beliebiges minimales Quasiideal $a_i = \varepsilon_i H \varepsilon_i$ ($\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i$) von H . Da $\varepsilon_i n \varepsilon_i$ nach Lemma 5 ein Quasiideal von H ist, gilt wegen $\varepsilon_i n \varepsilon_i \subseteq \varepsilon_i H \varepsilon_i$ und wegen der Minimalität von $\varepsilon_i H \varepsilon_i$

$$(11) \quad \varepsilon_i n \varepsilon_i = \varepsilon_i H \varepsilon_i = a_i.$$

Andererseits besteht nach der Definition von n

$$(12) \quad \varepsilon_i n \varepsilon_i \subseteq n.$$

Aus (11) und (12) folgt $\sum_i a_i = M \subseteq n$, also stimmt n wegen (10) mit M überein. Damit ist unsere erste Behauptung bewiesen.

M ist offenbar eine Halbgruppe. Es bezeichne $m \subseteq M$ ein zweiseitiges Ideal von M . Da $MmM (\subseteq M)$ ein Ideal von H ist, gilt wegen der Minimalität des Ideals M die Bedingung $MmM = M$. Andererseits besteht auch $MmM \subseteq m$, woraus $m = M$ folgt. Damit haben wir bewiesen, daß M eine idealfreie Halbgruppe ist, qu. e. d.

Wir schicken noch die folgende bekannte und leicht einsehbare *Bemerkung* voraus. (S. A. H. CLIFFORD [2].) Wenn $\mathfrak{k}$ ein minimales (zweiseitiges) Ideal der Halbgruppe H ist, so ist $\mathfrak{k}$ der Suschkewitsch-Kern von H .

Der Beweis vom Satz 9 folgt unmittelbar aus dieser Bemerkung und aus der ersten Behauptung vom Lemma 8.

Aus Sätzen 4a, 4b, 6, 9 folgt das folgende wohl bekannte Ergebnis. (S. A. H. CLIFFORD [2].)

Satz 10. Wenn die Bedingung (B) für eine Halbgruppe H erfüllt ist, so ist der Suschkewitsch-Kern von H die Vereinigung von paarweise fremden isomorphen Gruppen.

Wir werden noch folgendes nachweisen:

Satz 11. Enthält ein minimales Quasiideal a einer Halbgruppe H mindestens ein Element, welches regulär¹⁾ in H ist, so besitzt H ein Element.

¹⁾ Ein Element α der Halbgruppe H heißt regulär, wenn für α die zweiseitige Kürzungsregel gilt.

BEWEIS. Für ein reguläres Element $\alpha (\in \alpha)$ der Halbgruppe H gilt nach Satz 3 $H\alpha \cap \alpha H = \alpha$. Daraus bekommen wir $\alpha \subseteq H\alpha, \alpha H$, deshalb gibt es zu dem Element $\alpha (\in \alpha)$ mindestens ein Element $\varepsilon (\in H)$ mit

$$(13) \quad \varepsilon \alpha = \alpha \quad (\varepsilon \in H, \alpha \in \alpha).$$

Wegen der Regularität von α ist das Element ε eindeutig bestimmt. Für irgendein Element ρ von H folgt aus (13) $\rho \varepsilon \alpha = \rho \alpha$, woraus wir wegen der Regularität von α

$$(14) \quad \rho \varepsilon = \rho \quad (\rho \in H)$$

erhalten. ε ist also ein rechtsseitiges Einselement in H . Aus (14) folgt insbesondere $\alpha \varepsilon = \alpha$ ($\alpha \in \alpha$), und daraus ergibt sich — wie oben — die Bedingung $\varepsilon \rho = \rho$ ($\rho \in H$), womit wir Satz 11 bewiesen haben.⁸⁾

§ 4. Über Halbgruppen mit relativ Inversen und Reessche Halbgruppen.

Es sei H eine Halbgruppe mit relativ Inversen in dem Sinne, daß es in der Halbgruppe H zu jedem Element α ein Element ε und ein relativ Inverses α' mit $\varepsilon \alpha = \alpha \varepsilon = \alpha$, $\alpha' \alpha = \alpha \alpha' = \varepsilon$ gibt. (A. H. CLIFFORD [1].) Es ist leicht zu beweisen, daß dieses ε idempotent und durch α eindeutig bestimmt ist; ε heiße das zu α gehörige idempotente Element. Ferner, wenn α' ein relativ Inverses von α ist, ist $\alpha^{-1} = \varepsilon \alpha' \varepsilon$ auch eines, für welches auch die Eindeutigkeit und $\alpha^{-1} \varepsilon = \varepsilon \alpha^{-1} = \alpha^{-1}$ erfüllt ist. Wenn wir über das relativ Inverse von α sprechen, verstehen wir immer das Element α^{-1} . Für jedes Linkshauptideal $H\alpha$ (Rechtshauptideal αH) gilt $H\alpha = H\alpha^{-1} = H\varepsilon$ ($\alpha H = \alpha^{-1}H = \varepsilon H$) (S. L. FUCHS [3].) Nach diesem Ergebnis, Satz 1 und der Ergänzung vom Lemma 5 ist das durch α erzeugte Quasihauptideal $\langle \alpha \rangle$ in der Form $\langle \alpha \rangle = H\alpha \cap \alpha H = H\varepsilon \cap \varepsilon H = \varepsilon H\varepsilon$ darstellbar. Es sei ε ein idempotentes Element von H . Die Menge aller Elemente α von H , wofür $\varepsilon \alpha = \alpha \varepsilon = \alpha$ und $\alpha^{-1} \alpha = \alpha \alpha^{-1} = \varepsilon$ gilt, bildet nach A. H. CLIFFORD [1] eine Gruppe, die im folgenden stets mit H_ε bezeichnet wird.

Wir führen jetzt nach D. REES [5] einige Begriffe ein. Ein idempotentes Element $\varepsilon (\neq 0)$ einer Halbgruppe H ist *primitiv* genannt, wenn aus $\eta \varepsilon = \varepsilon \eta = \eta$ ($\eta \neq 0, \eta^2 = \eta$) jeweils $\eta = \varepsilon$ folgt. H heiße eine REESSche (completely simple) Halbgruppe, wenn

1. H eine idealfreie Halbgruppe ist,
2. jedes Element von H mindestens in einer Menge $\varepsilon H \eta$ enthalten ist, wo ε, η idempotente Elemente von H sind,
3. jedes idempotente Element von H primitiv ist.

⁸⁾ Aus dem Beweis des Satzes 11 sehen wir, daß Satz 11 statt einer Halbgruppe auch für einen Ring gültig ist.

Jetzt beweisen wir einige Ergebnisse über die Quasiideale einer Halbgruppe mit relativ Inversen bzw. einer REESScher Halbgruppe.

Satz 12. Ist H eine Halbgruppe mit relativ Inversen, so ist jedes Quasihauptideal: $\varepsilon H \varepsilon (\varepsilon^2 = \varepsilon)$ von H eine Halbgruppe mit relativ Inversen; und zwar gilt: $\varepsilon H \varepsilon = \sum_i H_{\eta_i}$, wo $\eta_i (\in H)$ die idempotenten Elemente mit $\varepsilon \eta_i = \eta_i \varepsilon = \eta_i$ bezeichnen.

BEWEIS. Es sei $\bar{\alpha} = \varepsilon \alpha \varepsilon$ ein beliebiges Element des Quasihauptideals $\varepsilon H \varepsilon$ und $\bar{\alpha} \in H_{\eta}$. Dann ist $\eta \bar{\alpha} = \bar{\alpha} \eta = \bar{\alpha}$ und $\bar{\alpha} \bar{\alpha}^{-1} = \bar{\alpha}^{-1} \bar{\alpha} = \eta$. Aus letzterem und aus $\varepsilon \bar{\alpha} = \bar{\alpha} \varepsilon = \bar{\alpha}$ folgt $\varepsilon \eta = \eta \varepsilon = \eta$. Es gilt also $H_{\eta} \subseteq \eta H \eta \subseteq \varepsilon H \varepsilon$. Ferner, wenn es für ein idempotentes Element $\eta_i (\in H)$ $\varepsilon \eta_i = \eta_i \varepsilon = \eta_i$ gilt, so gilt auch $H_{\eta_i} \subseteq \eta_i H \eta_i \subseteq \varepsilon H \varepsilon$. Da für verschiedene idempotente Elemente η, η^* der Durchschnitt von H_{η}, H_{η^*} die leere Menge ist, ist die zweite Hälfte vom Satz 12 bewiesen, woraus die erste Behauptung gleich folgt.

Satz 13. Eine nullfreie Halbgruppe H mit relativ Inversen enthält dann und nur dann mindestens ein minimales Quasiideal, wenn mindestens ein idempotentes Element von H primitiv ist; und zwar ist das Quasiideal $\varepsilon H \varepsilon (\varepsilon^2 = \varepsilon)$ dann und nur dann minimal, wenn ε primitiv ist.⁹⁾ In diesem Fall stimmt H_{ε} mit $\varepsilon H \varepsilon$ überein.

Zum Beweis der Behauptung „dann“ bezeichne ε ein primitives idempotentes Element von H . Wir behaupten, daß $\varepsilon H \varepsilon$ ein minimales Quasiideal von H ist. Wegen Lemma 5 und Satz 5 genügt es nachzuweisen, daß $\varepsilon H \varepsilon$ eine Gruppe ist. Offenbar ist $\varepsilon (\in \varepsilon H \varepsilon)$ ein Einselement von $\varepsilon H \varepsilon$. Es bezeichne $\sigma = \varepsilon \rho \varepsilon$ ein beliebiges Element von $\varepsilon H \varepsilon$ und es sei η das zu σ gehörige idempotente Element, d. h.

$$(15) \quad \eta \sigma = \sigma \eta = \sigma, \quad \sigma \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \sigma = \eta \quad \text{und} \quad \eta \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \eta = \sigma^{-1}.$$

Wegen der Definition von σ und (15₂) gilt $\varepsilon \eta = \eta \varepsilon = \eta$, woraus wegen der Voraussetzung

$$(16) \quad \eta = \varepsilon$$

folgt. Infolge (15) und (16) ist σ^{-1} ein Element von $\varepsilon H \varepsilon$ mit $\sigma^{-1} \sigma = \varepsilon$, deshalb ist $\varepsilon H \varepsilon$ eine Gruppe, w. z. b. w.

Um die Behauptung „nur dann“ zu beweisen, bezeichne $\varepsilon H \varepsilon$ ein minimales Quasiideal von H . Nach Satz 4a ist $\varepsilon H \varepsilon$ eine Gruppe mit dem Einselement ε . Wenn $\eta (\in H)$ ein idempotentes Element mit $\varepsilon \eta = \eta \varepsilon = \eta$ ist, ist η in der Gruppe $\varepsilon H \varepsilon$ enthalten, deshalb muß $\eta = \varepsilon$ bestehen. ε ist also ein primitives idempotentes Element von H .

⁹⁾ Nach Satz 9 folgt, daß wenn eine nullfreie Halbgruppe H mit relativ Inversen mindestens ein primitives idempotentes Element besitzt, so ist der Suschkewitsch-Kern von H die Vereinigung der durch die primitiven idempotenten Elemente von H erzeugten (minimalen) Quasihauptideale.

Wir haben noch die letzte Behauptung zu beweisen. Nach der Definition von H_ε gilt $H_\varepsilon \subseteq \varepsilon H \varepsilon$. Wegen der Minimalität von $\varepsilon H \varepsilon$ genügt es zu zeigen, daß H_ε ein Quasiideal ist. Es sei $\rho\alpha = \beta\sigma$ ($\alpha, \beta \in H_\varepsilon$, $\rho, \sigma \in H$) ein beliebiges Element von $HH_\varepsilon \cap H_\varepsilon H$. Es bezeichne η das zu $\rho\alpha$ gehörige idempotente Element. Da $\varepsilon \cdot \rho\alpha = \rho\alpha \cdot \varepsilon = \rho\alpha$ gilt, ist auch $\varepsilon\eta = \eta\varepsilon = \eta$ erfüllt, woraus wegen der Definition von ε , $\eta = \varepsilon$ folgt. D. h. $\rho\alpha \in H_\varepsilon$, womit wegen (1) unsere Behauptung und Satz 13 bewiesen ist.

Satz 14. Für eine nicht-leere Untermenge M einer nullfreien Halbgruppe H sind folgende Bedingungen äquivalent:

- (I) M ist die Vereinigung aller minimalen Quasiideale α_i von H ,
- (II) M ist ein Ideal von H und eine idealfreie Halbgruppe mit relativ Inversen,
- (III) M ist ein Ideal von H und eine Reessche Halbgruppe.

Zum Beweis des Satzes 14 benutzen wir

Lemma 9. (D. REES [5].) Ist H eine Reessche Halbgruppe und bezeichnen $\varepsilon_i, \varepsilon_j, \varepsilon_k$ idempotente Elemente von H , so sind im Falle $\varepsilon_i \alpha \varepsilon_j \neq 0$ die Relationen $\varepsilon_i \alpha \varepsilon_j \cdot \varepsilon_j H \varepsilon_i = \varepsilon_i H \varepsilon_i$, $\varepsilon_j H \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \alpha \varepsilon_j = \varepsilon_j H \varepsilon_j$, $\varepsilon_k H \varepsilon_i \cdot \varepsilon_i \alpha \varepsilon_j = \varepsilon_k H \varepsilon_j$ und $\varepsilon_i \alpha \varepsilon_j \cdot \varepsilon_j H \varepsilon_k = \varepsilon_i H \varepsilon_k$ gültig.¹⁰⁾

Unter der Voraussetzung von (I) ist M nach Lemma 8 ein Ideal und eine idealfreie Halbgruppe, ferner nach Satz 4a und Lemma 3 die Vereinigung von paarweise fremden Gruppen, deshalb ist M eine Halbgruppe mit relativ Inversen. Damit ist (I) $\Rightarrow$ (II) bewiesen.

Die Implikation (II) $\Rightarrow$ (III) ist schon in A. H. CLIFFORD [1] bewiesen.

Ist endlich das Ideal M eine REESSche Halbgruppe, so ist jedes Element α von M nach 2. mindestens in einer Menge $\varepsilon M \eta$ enthalten, wo ε, η idempotente Elemente von M sind. Wir zeigen, daß $\varepsilon M \eta$ ein minimales Quasiideal von H ist. Da $\varepsilon M \varepsilon$ nach Lemma 5 ein Quasiideal von H ist und für jedes Element $\varepsilon \mu \varepsilon (\in \varepsilon M \varepsilon)$ wegen Lemma 9 $\varepsilon \mu \varepsilon \cdot \varepsilon M \varepsilon = \varepsilon M \varepsilon$ und $\varepsilon M \varepsilon \cdot \varepsilon \mu \varepsilon = \varepsilon M \varepsilon$ erfüllt sind, ist $\varepsilon M \varepsilon$ nach Satz 5 ein minimales Quasiideal von H . Nach Lemma 7, 9 ist auch $\varepsilon M \varepsilon \cdot \varepsilon \rho \eta = \varepsilon M \eta$ ($\varepsilon \rho \eta \in \varepsilon M \eta$) ein minimales Quasiideal von H . Somit ist M die Vereinigung von gewissen minimalen Quasiidealen von H ist. Da jedes minimale Quasiideal von H nach Satz 9 und der Definition des Suschkewitsch-Kerns im Ideal M enthalten ist, deshalb ist auch die Behauptung (III) $\Rightarrow$ (I) bewiesen, womit der Beweis beendet ist.

Im folgenden bezeichne H stets eine Halbgruppe mit relativ Inversen. Nach L. FUCHS [3] verstehen wir unter dem Rang eines Linkshauptideals $H\alpha$ 1, wenn $H\alpha$ minimal ist, und $n+1$, wenn aus $H\beta \subset H\alpha$ folgt, daß der

¹⁰⁾ Dieses Lemma ist nur ein Teil des Lemma 2.62 von D. REES [5].

Rang von $H\beta$ höchstens n ist, und unter den Rängen von $H\beta$ auch n vorkommt. Es ist nach dieser Definition klar, daß jedes Linkshauptideal vom Rang n für jeden Rang $\leq n-1$ ein Linkshauptideal, aber kein Linkshauptideal vom Rang $\geq n$ echt enthält. Ähnlicherweise definiert man den Rang eines Rechtshauptideals und eines Quasihauptideals.

Satz 15. *Das Quasihauptideal $\varepsilon H\varepsilon$ ($\varepsilon^2 = \varepsilon$, $\varepsilon \neq 0$) einer Halbgruppe mit relativ Inversen hat dann und nur dann den Rang n , wenn das Linkshauptideal $H\varepsilon$ vom Rang n ist.*

Zum Beweis des Satzes 15 benutzen wir folgenden

Satz 16. (L. FUCHS [3].) *Das Rechtshauptideal εH ist vom Rang n genau dann, wenn das Linkshauptideal $H\varepsilon$ denselben Rang n hat.*

Der Beweis des Satzes 15 geht durch Induktion nach n . Die Behauptung ist wegen Sätze 16, 3, 4a für $n=1$ richtig. Es sei $n > 1$ und setzen wir voraus, daß Satz 15 für jeden Rang $m < n$ gültig ist. Ist $H\varepsilon$ ($\varepsilon^2 = \varepsilon$) vom Rang n , dann ist $\varepsilon H\varepsilon$ nach der Induktionsvoraussetzung mindestens vom Rang n . So gibt es ein Quasihauptideal $\eta H\eta$ vom Rang n mit

$$(17) \quad \eta H\eta \subseteq \varepsilon H\varepsilon \quad (\eta^2 = \eta).$$

Wieder wegen der Induktionsvoraussetzung hat $H\eta$ mindestens den Rang n . Aus (17) folgt $\eta \in \varepsilon H\varepsilon$, so gilt: $\eta \in H\varepsilon, \varepsilon H$, woraus $H\eta \subseteq H\varepsilon$ und $\eta H \subseteq \varepsilon H$. Da $H\varepsilon$ vom Rang n und $H\eta (\subseteq H\varepsilon)$ vom Rang $\geq n$ ist, muß $H\eta = H\varepsilon$ bestehen. Wegen Satz 15 gilt ebenso $\eta H = \varepsilon H$. Daraus und aus der Ergänzung vom Lemma 5 folgt $\eta H\eta = H\eta \cap \eta H = H\varepsilon \cap \varepsilon H = \varepsilon H\varepsilon$, d. h. $\varepsilon H\varepsilon$ ist vom Rang n .

Umgekehrt, sei $\varepsilon H\varepsilon$ vom Rang n . Wegen der Induktionsvoraussetzung ist $H\varepsilon$ mindestens vom Rang n , deshalb gibt es ein Linkshauptideal $H\eta (\subseteq H\varepsilon)$ ($\eta^2 = \eta$) vom Rang n . Da offenbar $\eta\varepsilon = \eta$ gilt, enthält das Linksideal $H\varepsilon\eta$ das Element $\eta\varepsilon \cdot \eta = \eta\eta = \eta$, woraus $H\eta \subseteq H\varepsilon\eta$ folgt. Dies bedeutet mit $H\varepsilon\eta \subseteq H\eta$ zusammen, daß

$$(18) \quad H\varepsilon\eta = H\eta \quad (\eta^2 = \eta)$$

besteht und $H\varepsilon\eta$ vom Rang n ist. $\varepsilon\eta$ ist wegen $\varepsilon\eta \cdot \varepsilon\eta = \varepsilon \cdot \eta\varepsilon\eta = \varepsilon\eta$ ein idempotentes Element; somit folgt aus (18) und aus der Ergänzung vom Lemma 5

$$(19) \quad \varepsilon\eta H\varepsilon\eta = \varepsilon\eta H \cap H\varepsilon\eta \subseteq \varepsilon H \cap H\varepsilon = \varepsilon H\varepsilon \quad ((\varepsilon\eta)^2 = \varepsilon\eta).$$

$\varepsilon\eta H\varepsilon\eta$ ist nach der Induktionsvoraussetzung mindestens vom Rang n , es gilt also wegen der Annahme und (19) $\varepsilon\eta H\varepsilon\eta = \varepsilon H\varepsilon$. So ist ε in der Form $\varepsilon = \varepsilon\eta\rho\varepsilon\eta$ darstellbar, woraus wegen $\eta^2 = \eta$

$$(20) \quad \varepsilon\eta = \varepsilon\eta\rho\varepsilon\eta^2 = \varepsilon\eta\rho\varepsilon\eta = \varepsilon$$

folgt. Angesichts (20) besteht $H\varepsilon\eta = H\varepsilon$, d. h. $H\varepsilon$ ist vom Rang n . Damit ist Satz 15 bewiesen.

Es ist möglich der Suschkevitsch-Kern vom Rang n der Halbgruppe H zu definieren und ähnliche Ergebnisse, wie im Fall $n=1$, zu bekommen. (L. FUCHS [3].)

Ein idempotentes Element ε von H nennen wir vom Rang n , wenn das Quasihauptideal $\varepsilon H \varepsilon$ vom Rang n ist; wegen Satz 13 ist ε im Falle $n=1$ primitiv. Nach L. FUCHS [3] gilt, daß die Menge aller Elemente von H , die ein festes Quasihauptideal $\eta H \eta$ ($\eta^2 = \eta$) erzeugen, eben mit der Gruppe H_η zusammenfällt. Aus dieser Bemerkung und aus Satz 12 erhält man:

Satz 17. In einer Halbgruppe H mit relativ Inversen gilt für jedes Quasihauptideal $\varepsilon H \varepsilon$ ($\varepsilon^2 = \varepsilon$) vom Rang n die folgende Zerlegung

$$\varepsilon H \varepsilon = \sum_{i_1} H_{\varepsilon_{i_1}} + \cdots + \sum_{i_{n-1}} H_{\varepsilon_{i_{n-1}}} + H_\varepsilon,$$

wo ε_{i_1} alle in $\varepsilon H \varepsilon$ enthaltenden idempotenten Elemente vom Rang 1, ..., $\varepsilon_{i_{n-1}}$ alle idempotenten Elemente ($\in \varepsilon H \varepsilon$) vom Rang $n-1$ durchläuft.

Literatur.

- [1] A. H. CLIFFORD, Semigroups admitting relative inverses, *Ann. of Math.* (II. s.) 42 (1941), 1037—1049.
- [2] A. H. CLIFFORD, Semigroups containing minimal ideals, *Amer. J. Math.* 70 (1948), 521—526.
- [3] L. FUCHS, On semigroups admitting relative inverses and having minimal ideals, *Publ. Math. Debrecen* 1 (1950), 227—231.
- [4] H. HASHIMOTO, On the kernel of semigroups, *J. Math. Soc. Japan* 7 (1955), 59—66.
- [5] D. REES, On semi-groups, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 36 (1940), 387—400.
- [6] ŠT. SCHWARZ, On the structure of simple semigroups without zero, *Czechoslovak Math. J.* 1 (76) (1951), 41—53.
- [7] O. STEINFELD, On ideal-quotients and prime ideals, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 4 (1953), 289—298.
- [8] O. STEINFELD, Bemerkung zu einer Arbeit von T. Szele, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 6 (1955), 479—484.
- [9] A. SUSCHKEVITSCH, Über die endlichen Gruppen ohne das Gesetz der eindeutigen Umkehrbarkeit, *Math. Ann.* 99 (1928), 30—50.

(Eingegangen am 24. September, 1955, und in umgearbeiteter Form am 3. Januar, 1956.)