

Über die Divergenzpunkte des Newtonschen Verfahrens zur Bestimmung von Wurzeln algebraischen Gleichungen II.

Dem Andenken meines unvergesslichen Freundes Tibor Szele gewidmet.

Von BÉLA BARNA in Debrecen.

In dem I. Teil dieser Arbeit¹⁾ (zitiert mit I) haben wir uns mit dem Newtonschen Näherungsalgorithmus in dem Fall der Polynomen $f(x)$ m -ten Grades mit m verschiedenen reellen Wurzeln beschäftigt.

Die Punkte der Zahlengerade, welche Ausgangspunkte einer solchen Iterationsfolge

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots; x_0 = x)$$

sind, die nach einer Wurzel $\xi^{(k)}$ des Polynoms $f(x)$ konvergiert, sind definitionsgemäß die Konvergenzpunkte, die übrigen werden Divergenzpunkte genannt. Im Fall $x_n \rightarrow \xi$ „gehören die Punkte x_n zu ξ “. Bezüglich der anderen Grundbegriffen, Bezeichnungen, usw. verweisen wir auf I. Wir haben dort bewiesen, daß die Menge der Divergenzpunkte eine perfekte eigentliche Teilmenge besitzt, daß also die Menge der Divergenzpunkte überabzählbar ist. Damit haben wir auf eine, von Herrn A. RÉNYI aufgeworfene Frage²⁾ Antwort gegeben.

In dem vorliegenden II. Teil beschäftigen wir uns mit einigen weiteren Fragen bezüglich der Menge der Divergenzpunkte. Die erreichten Resultate sind in den Sätzen 1—4 zusammengefaßt. Wir verwenden die Ergebnisse und die Bezeichnungen von I, insbesondere bedeutet $f(x)$ (und in § 3 $f(z)$) ein Polynom m -ten Grades ($m > 4$) mit lauter reellen Koeffizienten und m reellen einfachen Nullstellen.

¹⁾ [2] (Die in eckigen Klammern stehenden Zahlen verweisen auf das Literaturverzeichnis am Ende dieser Arbeit.)

²⁾ [9], p. 292; [1], p. 51; [2], p. 109.

§ 1.

Auf die von Herrn A. RÉNYI aufgeworfene zweite Frage³⁾ über die Existenz reeller Polynome mit reellen Nullstellen, bei denen die Menge der Divergenzpunkte ein Intervall enthält, können wir bejahende Antwort geben:

Satz 1. *Es gibt reelle Polynome die auch reelle Wurzeln haben, so, daß bei dem Newtonschen Verfahren Divergenzintervalle existieren.*

Betrachten wir nämlich das Polynom

$$g(x) = 11x^6 - 34x^4 + 39x^2.$$

Hier ist $\xi = 0$ eine zweifache Nullstelle und es gibt keine andere reelle Wurzeln. Das unmittelbare Konvergenzintervall (I, p. 113.) dieser Wurzel ist

$$\Delta\xi \equiv (-\beta, +\beta), \beta = \frac{+\sqrt{117}}{11} < 1.$$

(Es ist nämlich $g(x)$ eine gerade Funktion, woraus für die Endpunkte α und β von $\Delta\xi$ leicht $\alpha = -\beta$ folgt. Es ist aber $N(\beta) = \alpha$, also gilt $N(\beta) = -\beta$, d. h. β kommt unter den Wurzeln der Gleichung $N(x) + x = 0$ vor; diese Wurzeln sind $0, \pm 1, \pm \beta$.)

Außer β und $-\beta$ bilden 1 und -1 einem Zyklus:

$$N(1) = -1, N(-1) = 1.$$

Es sei x ein Punkt in dem Intervall $(\beta, 1)$. Die Funktion $N(x)$ ist in diesem Intervall abnehmend, und bildet dies auf das Intervall $(-1, -\beta)$ ab. Aus Symmetriegründen folgt auch die Umkehrung: das Bild des Intervalls $(-1, -\beta)$ ist $(\beta, 1)$. Dies bedeutet, dass sämtliche Punkte der unendlichen Folge

$$x, x_2, x_4, \dots$$

in $(\beta, 1)$ bleiben, in dem keine Wurzel liegt. Das ist also ein Divergenzintervall⁴⁾.

§ 2.

A. RÉNYI hat gezeigt⁵⁾, daß es im Falle einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $F(x)$ mit drei reellen Nullstellen, wenn noch $F''(x)$ überall monoton wächst, nur zwei verschiedene Divergenzpunkte zweiter Art (I, p. 117.) gibt; die Invers-Iterierten sämtlicher Nullstellen von $F(x)$ häufen sich in diesen zwei Divergenzpunkten.

³⁾ Siehe ³⁾

⁴⁾ Ein Polynom 5-ten Grades, bei dem Divergenzintervalle existieren ist z. B.

$$h(x) = x^5 - 10x^3 + 69x.$$

Dieses Beispiel rührt von Herrn A. RÉNYI her.

⁵⁾ [9], p. 288, 292.

Wir wollen in diesem § den analogen Satz für unser Polynom $f(x)$ ableiten.

Es sei

$$\gamma = \min \{ \iota, \xi \}, \quad \delta = \max \{ \iota, \xi \}$$

und I bezeichne das offene Intervall zwischen $\eta^{(k)}$ und $\eta^{(k)}$:

$$(1) \quad I \equiv (\eta^{(k)}, \eta^{(k)}).$$

Wir beweisen zuerst, daß die Funktion $N'(x)$ in dem Intervall $(\eta^{(k-1)}, \gamma^{(k)})$ monoton wächst, in $(\delta^{(k)}, \eta^{(k)})$ dagegen abnimmt.

Im Inneren dieser Intervalle ist

$$\operatorname{sgn} f(x) = -\operatorname{sgn} f''(x)$$

und so folgert man aus der Gleichheit

$$N'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)},$$

daß für

$$(2) \quad \eta^{(k-1)} < x < \gamma^{(k)} \quad \text{und} \quad \delta^{(k)} < x < \eta^{(k)}$$

$$(3) \quad N'(x) < 0$$

und

$$\lim_{x \rightarrow \eta^{(k-1)}+0} N'(x) = -\infty, \quad N'(\gamma) = 0, \quad N'(\delta) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \eta^{(k)}-0} N'(x) = -\infty$$

gelten, wobei der Einfachheit halber

$$\eta^{(k-1)} = \eta', \quad \gamma = \gamma, \quad \delta = \delta, \quad \eta^{(k)} = \eta''$$

gesetzt wurde. Wenn also a eine beliebige positive Zahl ist, so nimmt die (in dem Intervall (1)) stetige Funktion $N'(x)$ zwischen η' und γ , wie auch

zwischen δ und η'' wenigstens einmal den Wert $-a$ an, also in I wird sie diesen Wert wenigstens zweimal haben. Dies bezieht sich auf die Zahlen

$k=1, 2, \dots, m-2$, d. h. es gibt zwischen $\eta^{(0)}$ und $\eta^{(m-2)}$ wenigstens $2(m-2)$ verschiedene reelle Wurzeln der Gleichung

$$(4) \quad N'(x) = -a.$$

Es gilt noch

$$N'(\xi^{(0)}) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow c'-0} N'(x) = -\infty \quad (c' = \eta^{(0)}),$$

$$\lim_{x \rightarrow c''+0} N'(x) = -\infty \quad (c'' = \eta^{(m-2)}), \quad N'(\xi^{(m-1)}) = 0,$$

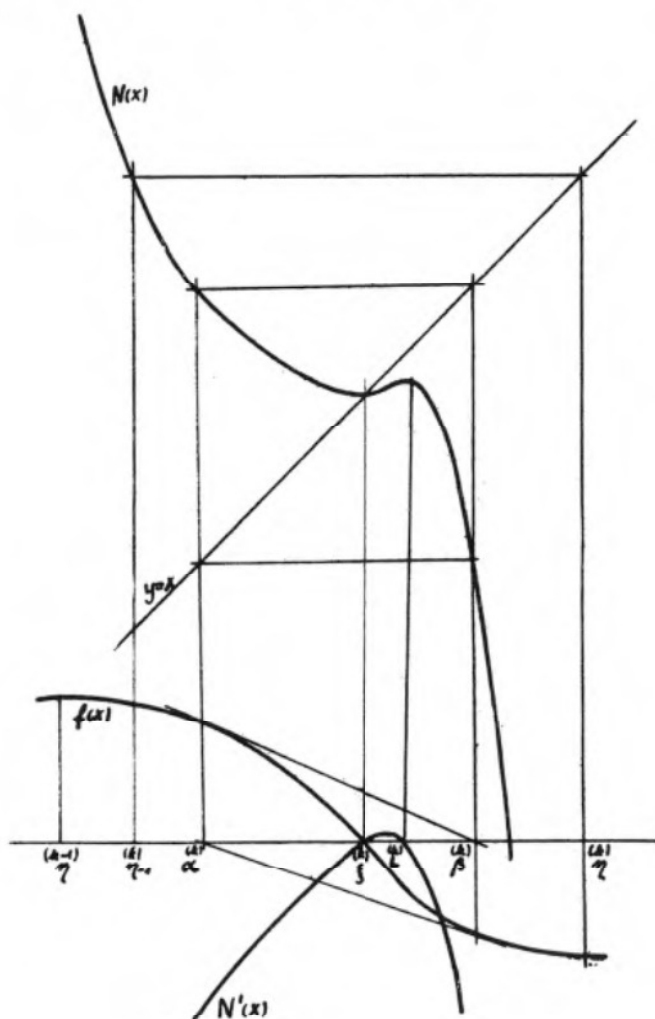
es gibt also zwischen $\xi^{(0)}$ und $\eta^{(0)}$, ebenso zwischen $\eta^{(m-2)}$ und $\xi^{(m-1)}$ mindestens eine

Wurzel der Gleichung (4). Mehrere Wurzeln kann aber diese Gleichung nicht haben, weil (4) bezüglich der Wurzeln mit der Gleichung

$$f(x)f''(x) + af'^2(x) = 0$$

äquivalent ist; dies ist aber eine algebraische Gleichung $(2m-2)$ -ten Grades. $N'(x)$ nimmt also in den Intervallen (2) jeden negativen Wert einmal und nur einmal auf, und so folgt die behauptete Monotonität dieser Funktion.

Jetzt können wir zeigen: *Es gibt in dem Intervall $I^{(k)}$ nur den einzigen (schon bekannten) Zyklus zweiter Ordnung α, β .*



Figur 1

Es ist zuerst zu bemerken, daß in dem Intervall $(\alpha, \beta)^{(k)}$ kein höherer Fixpunkt liegen kann, weil alle Punkte dieses Intervalls Konvergenzpunkte sind. Ferner kann ein Zyklus zweiter Ordnung weder in dem Intervall $(\eta, \alpha)^{(k-1)}$, $(\eta, \alpha)^{(k)}$,

noch in $(\beta, \eta)^{(k)}$ (Figur 1) existieren, weil die Anwendung von $N(x)$ aus beiden Intervallen ausführt. Wenn es also außer $\alpha^{(k)}$ und $\beta^{(k)}$ noch einen solchen Zyklus gibt, z. B. $\alpha', \beta' (\alpha' < \beta')$, so liegt α' in dem Intervall $(\eta, \alpha)^{(k-1)}$, und β' in $(\beta, \eta)^{(k)}$. Wir können die möglichen Intervalle noch mehr verkürzen, indem wir den invers-interierten Punkt von $\eta^{(k)}$ durch die Anwendung der Funktion $N_{-1}^{(k)}(x)$ (I, p. 110.) bilden. Dieser Punkt

$$\eta_{-1}^{(k)} = N_{-1}^{(k)}(\eta^{(k)})$$

liegt in dem Intervall $(\eta, \alpha)^{(k-1)}$, und wegen

$$(\eta, \alpha)_1^{(k-1)} = (\beta, \eta)^{(k)}$$

sind die Ungleichungen

$$\eta_{-1}^{(k)} < \alpha' < \alpha, \beta < \beta' < \eta^{(k)}$$

gültig. Es folgt weiter aus

$$\eta_{-1}^{(k)} < x < \bar{x} < \alpha^{(k)}$$

nach (3), daß

$$\beta^{(k)} < \bar{x}_1 < x_1 < \eta^{(k)}$$

besteht, und — wegen der oben festgestellten Monotonität der Funktion $N'(x)$ — gelten auch die Ungleichungen⁶⁾

$$-N'(x) > -N'(\bar{x}) > 0, -N'(x_1) > -N'(\bar{x}_1) > 0$$

d. h. es ist

$$N'_2(x) = N'(x) \cdot N'(x_1) > N'(\bar{x}) \cdot N'(\bar{x}_1) = N'_2(\bar{x}).$$

Dies bedeutet: $N'_2(x)$ nimmt in dem Intervall $(\eta_{-1}, \alpha)^{(k)}$ ab.

Kehren wir nun auf das Verfahren zurück, wodurch die Lage der Punkte $\alpha^{(k)}$ und $\beta^{(k)}$ festgestellt wurde. (I, p. 112—113.) Nach unseren resultaten (loc. cit.) wird entweder für die geraden, oder für die ungeraden Zahlen n

$$x_{-n} \rightarrow \alpha^{(k)}$$

und

$$\alpha^{(k)} < x_{-n} < x_{-n+2}$$

bestehen, d. h. es gilt

$$\alpha^{(k)} < x_{-n} < N_2(x_{-n}).$$

⁶⁾ Hier bedeutet das Zeichen „'“ das Differenzieren nach der im Klammer stehenden Variable.

Wir können dies — wegen $N_2(\alpha) = \alpha^{(k)}$ — in der Form

$$\frac{N_2(x_{-n}) - N_2(\alpha)^{(k)}}{x_{-n} - \alpha^{(k)}} > 1$$

schreiben, woraus

$$N_2'(\alpha) \geq 1$$

folgt. Es gilt also nach der festgestellten Monotonität der Funktion $N_2'(x)$

$$N_2'(x) > N_2'(\alpha) \geq 1,$$

wenn

$$(5) \quad \eta_{-1}^{(k)} < x < \alpha^{(k)}$$

besteht. So folgt.

$$N_2'(x) - 1 > N_2'(\alpha) - 1 \geq 0,$$

d. h.

$$0 < N_2'(x) - 1 = (N_2(x) - x)'.$$

In dem Intervall (5) ist also $N_2(x) - x$ monoton wachsend; da aber $N_2(\alpha) - \alpha = 0$ ist, gilt

$$N_2(x) - x < 0.$$

Dies bedeutet aber, daß in dem Intervall $(\eta_{-1}^{(k)}, \alpha^{(k)})$ kein Fixpunkt zweiter Ordnung liegt.

Damit haben wir den Beweis der Behauptung, daß in $I^{(k)}$ kein anderer Zyklus zweiter Ordnung als $\alpha, \beta^{(k)}$ liegt, zum Schluss geführt.

Jetzt können wir beweisen, daß $\alpha^{(k)}$ und $\beta^{(k)}$ Häufungspunkte der Invers-iterierten eines beliebigen Punktes x sind.

Diese Behauptung für $x \in I^{(k)}$ folgt einfach aus dem Verfahren, womit die Endpunkte $\alpha^{(k)}$ und $\beta^{(k)}$ dieses Intervalls bestimmt wurden. Liegt aber x außer diesem Intervall, so bilden wir mit $N_{-1}^{(k)}(x)$ die invers-iterierten Punkte x_{-n} . Ist z. B. $x < \alpha^{(k)}$, so ergibt sich $x_{-1} > \beta^{(k)}$, und die Glieder der Folge (x_{-n}) mit geraden (ungeraden) Index bilden in dem Intervall $(\eta_1^{(k-1)}, \alpha^{(k)})$ ($(\beta^{(k)}, \eta_1^{(k)})$) eine monoton zunehmende (abnehmende) Folge. Es existieren also

$$\lim x_{-2n} = A, \quad \lim x_{-2n+1} = B$$

mit

$$A \leq \alpha^{(k)}, \quad \beta^{(k)} \leq B.$$

Es folgt sehr einfach, daß A und B einen Zyklus zweiter Ordnung bilden,

und — nach den Vorigen — gelten also hier nur die Gleichheitszeichen, d. h. es ist

$$\lim x_{-2n} = \alpha^{(k)}, \quad \lim x_{-2n+1} = \beta^{(k)}.$$

Ähnlicherweise bekommen wir im Fall $x > \beta^{(k)}$ die Gleichungen

$$\lim x_{-2n} = \beta^{(k)}, \quad \lim x_{-2n+1} = \alpha^{(k)}.$$

Die Punkte $\alpha^{(k)}$ und $\beta^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, m-2$) sind also Häufungspunkte der Menge (x_{-n}) . Diese Eigenschaft behält ihre Gültigkeit auch für die invers-iterierten Punkte $(\alpha_{-n}^{(k)})$ und $(\beta_{-n}^{(k)})$, ferner für alle Häufungspunkte dieser Mengen.

Eine kleine Abänderung dieses Beweisganges lehrt, daß auch die analog aus λ und μ gebildeten Punkte Häufungspunkte der Menge (x_{-n}) sind. Bezeichnet also Z die Menge der Punkte $\alpha_{-n}^{(k)}, \beta_{-n}^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, m-2$), λ_{-n}, μ_{-n} ($n = 0, 1, 2, \dots$), und Z' die Derivierte dieser Menge, so gilt der folgende

Satz 2. *Jedes Element der Mengen Z und Z' ist ein Häufungspunkt der Invers-Iterierten eines beliebigen Punktes x ; es finden sich also in jeder Umgebung eines beliebigen Punktes dieser Mengen zu jeder Wurzel $\xi^{(k)}$ gehörige Konvergenzpunkte.*

§ 3.

Wir beschäftigen uns in diesem § mit dem aus einem beliebigen komplexen Anfangselement z_0 ausgehenden Newtonschen Algorithmus im Falle des Polynoms $f(z)$.

Dann ist die iterative Grundfunktion

$$N(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

eine rationale Funktion den komplexen Variablen z . Wir sind also imstande einige Resultate der Iterationstheorie der rationalen Funktionen⁷⁾ anzuwenden. Deshalb wollen wir zuerst diese Resultate zusammenfassen, indem die zu benützenden wichtigsten Ergebnisse dieser Theorie als Hilfssätze zusammengestellt werden. Es wird aber der Fall der linearen rationalen Funktionen nicht betrachtet, denn es gibt kein Polynom $f(z)$, für das $N(z)$, und überhaupt $N_n(z)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) eine lineare rationale Funktion wäre.

⁷⁾ Diese Theorie wurde von P. FATOU sehr ausführlich behandelt ([4], [5], [6]). Im folgenden werden wir hauptsächlich die Ergebnisse der Abhandlungen dieses Verfassers in Betracht ziehen und anwenden, sowie ein neueres wichtiges Resultat von D. I. TALANOV [10]. Weitere Einzelheiten der Iterationstheorie s. z. B. in [3], [7], [8], Chap. VIII.

Es sei also $R(z)$ eine beliebige, nicht-lineare rationale funktion. Die Iterierten von $R(z)$ sind

$$R_0(z) = z, R_1(z) = R(z), R_{n+1}(z) = R[R_n(z)].$$

Die n -te *inverz-iterierte Funktion* $R(z)$ ist die mehrdeutige (algebraische) Funktion $R_{-n}(z)$, für die

$$R_n[R_{-n}(z)] = z$$

gilt. Der Punkt $z = \kappa$ ist ein *Fixpunkt* ν -ter Ordnung von $R(z)$, falls ν die kleinste positive Zahl ist, für die

$$R_\nu(\kappa) = \kappa$$

besteht. Ist κ endlich, so wird der Wert $R'_\nu(\kappa)$ der *Multiplikator* des Fixpunktes κ genannt, und man nennt den Punkt κ einen *anziehenden, indifferenten, bzw. abstoßenden* Fixpunkt ν -ter Ordnung, je nachdem

$$|R'_\nu(\kappa)| \leq 1$$

besteht. Ist $\kappa = \infty$, so tritt in dieser Klassifikation statt $R'_\nu(\kappa)$ die Grösse $(R'_\nu(\kappa))^{-1}$ auf⁸⁾.

Die Iterierten der Verzweigungspunkte der Funktion $R_{-1}(z)$, d. h. die iterierten Punkte der Nullstellen von $R'(z)$, bilden die Punktmenge⁹⁾ E_c , deren derivierte Menge mit E'_c bezeichnet wird¹⁰⁾. Diese Menge spielt in der Iterationstheorie eine wichtige Rolle.

Die Punkte z der komplexen Zahlenebene können wir nach der Iterationsfolge

$$(6) \quad R_n(z) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

in zwei Punktmengen einteilen. *Reguläre* Punkte sind diejenigen Punkte der Zahlenebene, in denen die Funktionenfolge (6) kompakt¹¹⁾ („normal“, nach der Benennung von MONTEL) ist. Die nicht regulären Punkte sind *irregulär*¹²⁾. Die regulären Punkte bilden Gebiete der Zahlenebene. Aus einem beliebigen Punkt dieser Gebiete ausgehende Iterationsfolge (6) hat eine unendliche Teilfolge, die in dem betreffenden Gebiet gleichmäßig konvergiert. Auf die Grenzfunktion bezieht sich der

⁸⁾ [8], p. 218.

⁹⁾ [5], p. 60.

¹⁰⁾ In dieser Bezeichnung folgen wir die Aufsätze von P. FATOU.

¹¹⁾ Wir nennen eine unendliche Menge von Funktionen *in einem Bereich D kompakt*, wenn aus jeder unendlichen Folge dieser Funktionen sich eine unendliche, im inneren von D gleichmäßig konvergente Teilfolge auswählen läßt; die Grenzfunktion kann auch eine endliche Konstante, oder ∞ sein. Die Funktionenmenge ist *in einem Punkt kompakt*, wenn sie in einer Umgebung dieses Punktes kompakt ist. S. [8], p. 33; [5], p. 33—34. Bezüglich der Benennung „kompakt“ vgl. H. TÖPFFER, Über die Iteration der ganzen transzendenten Funktionen insbesondere $\sin z$ und $\cos z$, *Math. Ann.* 117, (1940—41), 66.

¹²⁾ [10], p. 413.

Hilfssatz 1. *Besteht die Menge E'_c aus endlich vielen Punkten, so hat jede konvergente unendliche Teilfolge von (6) einen (in dem Konvergenzgebiet) konstanten Grenzwert.¹³⁾*

Hilfssatz 2. *Ist κ ein anziehender Fixpunkt, oder ein indifferenter Fixpunkt, dessen Multiplikator eine Einheitswurzel ist, dann gibt es ein Gebiet, in dem eine unendliche Teilfolge von (6) nach κ konvergiert¹⁴⁾.*

Ist der Fixpunkt anziehend, so liegt κ im Innern dieses Gebietes, während ein indifferenter Fixpunkt sich auf dem Rand des Gebietes befindet. Ist κ ν -ter Ordnung, so zerfällt die Folge (6) in ν Teilfolgen so, daß jede solche Teilfolge eine Iterierte von κ für Grenzwert hat. Ist also $\nu = 1$, dann besteht in dem Konvergenzgebiet

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(z) = \kappa.$$

Hilfssatz 3. *Wenn in einem Gebiet eine unendliche Teilfolge von (6), nach dem konstanten Wert ξ konvergiert, dann $\xi \in E'_c$ ¹⁵⁾.*

Die Menge der irregulären Punkte wird mit $\mathcal{F}$ bezeichnet¹⁰⁾.

Hilfssatz 4. *Die Punktmenge $\mathcal{F}$ ist entweder die ganze Zahlenebene, oder — wenn es ein Gebiet gibt in dem (6) kompakt ist — eine, die einzelnen Konvergenzgebiete voneinander trennende perfekte Punktmenge, die dann keinen inneren Punkt enthält¹⁶⁾.*

$\mathcal{F}$ ist die Derivierte der Menge aller abstossenden Fixpunkte; diese Fixpunkte, sowie die indifferenten Fixpunkte mit einer Einheitswurzel als Multiplikator, gehören zu $\mathcal{F}$.

Die Punkte, deren sämtliche Iterierten von einander verschieden sind, nennen wir *mobile* Punkte¹⁷⁾. Die mobilen Punkte von $\mathcal{F}$ sind die irregulären mobilen Punkte.

Hilfssatz 5. *Die Elemente der Iterationsfolge eines irregulären mobilen Punktes bilden eine insichdichte Menge¹⁸⁾.*

Die bisher erwähnten Ergebnisse der Iterationstheorie sind schon hinreichend für die folgenden Untersuchungen der Iterationsfolge

$$(8) \quad N_n(z) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

¹³⁾ [5], p. 55—56; 70—71. — Vgl. noch [3], p. 191.

¹⁴⁾ [4], p. 191—220; [7], p. 233. — Vgl. noch [8], p. 219, 222.

¹⁵⁾ [5], p. 60—61. — Vgl. noch [3], p. 200.

¹⁶⁾ [5], p. 38, 40—41; [3] p. 191—192, 198—199; [8], p. 233—234.

¹⁷⁾ [10], p. 413.

¹⁸⁾ [10], p. 415.

Wir bestimmen zuerst die Menge E'_c im Falle der Funktion $N(z)$. Die Verzweigungspunkte von $N_{-1}(z)$ sind die ersten Iterierten der Nullstellen von

$$N'(z) = \frac{f(z)f''(z)}{f'^2(z)},$$

d. h. die ersten Iterierten von $\xi^{(k)}$ ($k=0, 1, 2, \dots, m-1$) und von $\iota^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots, m-2$) (I, p. 109.). Die Verzweigungspunkte sind also $\xi_1^{(k)} = \xi^{(k)}$ und $\iota_1^{(k)}$. Diese Punkte liegen mit sämtlichen Iterierten in $\mathcal{A}\xi^{(k)}$ (I, p. 112—113.), der einzige Häufungspunkt der Iterationsfolgen von $(\xi_n^{(k)})$ und $(\iota_n^{(k)})$ ist also $\xi^{(k)}$. Die Menge E'_c besteht also aus den Punkten $\xi^{(k)}$ ($k=0, 1, 2, \dots, m-1$), d. h. sie ist endlich.

Nach dem Hilfssatz 1 ist die Grenzfunktion in jedem Gebiet, in dem die Folge (8), oder eine unendliche Teilfolge derselben konvergiert, eine, in diesem Gebiet von dem Anfangspunkt z_0 unabhängige Konstante, die — nach dem Hilfssatz 3 — zu E'_c gehört. Die Punkte dieser Menge, die Wurzeln $\xi^{(k)}$ ($k=0, 1, 2, \dots, m-1$) sind in unserem Fall anziehende Fixpunkte erster Ordnung, d. h. — nach Hilfssatz 2 und (7) — sind beliebige genügend kleine Umgebungen dieser Punkte Konvergenzgebiete. Gemäß dem Hilfssatz 4 ist $\mathcal{F}$ also eine Menge ohne innere Punkte. Abgesehen von den Punkten dieser Menge konvergiert jede aus einem Punkt der Zahlenebene ausgehende Iterationsfolge zu einer Wurzel $\xi^{(k)}$. Wir formulieren dieses Resultat im

Satz 3. *Abgesehen von den Punkten einer inneren Punkte nicht enthaltenden Menge der komplexen Zahlenebene, konvergiert jede aus einem Punkt z_0 ausgehende Iterationsfolge $N_n(z_0)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) zu einer Wurzel der Gleichung $f(z)=0$; es gibt also im Fall des Polynoms f kein Divergenzgebiet.*

§ 4.

Wir wenden uns zur Frage der Divergenzintervalle bei der Iteration der Funktion $N(x)$.

Aus dem vorigen § folgt, daß die Punkte der reellen Achse, die nicht zu $\mathcal{F}$ gehören, Konvergenzpunkte sind. Ist also ein Divergenzintervall vorhanden, d. h. liegt auf der reellen Achse ein Intervall, dessen Punkte Divergenzpunkte sind, so gehört dasselbe zu der Menge $\mathcal{F}$. Die möglicherweise vorhandenen Divergenzintervalle können aber nur in den Ergänzungsintervallen (I, p. 115.) liegen, da sämtliche übrigen Intervalle der reellen Achse außer isolierten Divergenzpunkten nur Konvergenzpunkte enthalten. Es ist aber jedes iterierte Intervall eines Divergenzintervalles auch ein solches,

woraus folgt, daß alle Iterierten eines Divergenzintervalls in den Ergänzungsintervallen liegen. Im diesen ist $N(x)$ differenzierbar; bezeichnet nun d ein geschlossenes Divergenzintervall, und ist $x \in d$, so liegt x_1 in dem Divergenzintervall d_1 , also existiert auch $N'(x_1)$ sowie, auch die Derivierte

$$N'_2(x) = N'(x) \cdot N'(x_1).$$

Es folgt einfach, daß für jedes $x \in d$ und für jedes $n = 0, 1, 2, \dots$ die derivierte Funktion

$$N'_n(x) = N'(x) N'(x_1) \cdots N'(x_{n-1})$$

vorhanden ist. Es ist noch zu beachten, daß in den Ergänzungsintervallen $N'(x) < 0$ ist; ein solches Intervall bildet nämlich einen Teil von einem der Intervalle $(\eta, \gamma)^{(k-1)(k)}$, oder $(\delta, \eta)^{(k)(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, m-2$), und im Inneren dieser Intervalle gilt (3). Dies bedeutet, daß $N'_n(x)$ in dem Intervall d sein Vorzeichen nicht wechselt; es ist also $N_n(x)$ in d monoton zunehmend, oder abnehmend, je nachdem n eine gerade, oder ungerade Zahl bedeutet. Nach unseren bisherigen Resultaten kann behauptet werden: *Gibt es ein Divergenzintervall, dann ist darin $N_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) eine differenzierbare und streng monotone Funktion von x .*

Nehmen wir an, daß d ein Divergenzintervall ist, dessen beide Endpunkte Häufungspunkte von (außenliegenden) Konvergenzpunkten sind. Durch diese Annahme wird die Allgemeinheit offenbar nicht beschränkt. Wir bilden nun die iterierten Intervalle d_n von $d = d_0$.

Es gibt zwei Fälle:

A) *In dem ersten Fall* nehmen wir an, daß sich unter diesen Intervallen d_n wenigstens ein Paar mit gemeinsamen Punkten findet, z. B. das Paar $d_n, d_{n'}$. Wir beweisen, daß dies unmöglich ist. Es ist zuerst zu bemerken, daß dann sämtliche Punkte dieser beiden Intervalle gemeinsame Punkte sind: $d_n \equiv d_{n'} (n \neq n')$. Im entgegengesetzten Fall würde nämlich wenigstens in einem dieser Intervalle ein Endpunkt des anderen liegen, der als Häufungspunkt von Konvergenzpunkten kein innerer Punkt eines Divergenzintervalls sein kann. Es seien jetzt $n_0 \geq 0$ und $\nu > 0$ die kleinsten ganzen Zahlen, für die

$$d_{n_0+\nu} \equiv d_{n_0}$$

gilt. Dieses bedeutet, daß das Intervall $d_{n_0} \equiv [a, b]$ durch die iterierte Funktion $N_\nu(x)$ auf sich selbst abgebildet wird. Dann hat auch die erste Iterierte dieser Funktion, $N_{2\nu}(x) \equiv M(x)$ dieselbe Eigenschaft, und diese Funktion ist — wie wir es vorher gesehen haben — in $[a, b]$ stetig und monoton zunehmend. Da $M(x)$ das Intervall d_{n_0} auf sich selbst abbildet folgt, in Hinsicht auf die Monotonität

$$M(a) = a, \quad M(b) = b.$$

Wir beweisen, daß diese Funktion $M(x)$ in dem (geschlossenen) Intervall $[a, b]$ wenigstens einen Fixpunkt κ mit

$$(9) \quad 0 \leq M'(\kappa) \leq 1$$

besitzt. Es gilt $0 \leq M'(x)$. Ist $M'(b) \leq 1$, so hat $\kappa = b$ die erwünschte Eigenschaft. Es sei also $M'(b) > 1$. $M(x)$ ist eine rationale Funktion, die Gleichung $M(x) = x$ hat also nur endlich viele Wurzeln. Unter den Wurzeln, die kleiner als b sind, bezeichnen wir die Grösste mit κ . Offenbar ist $\kappa \geq a$. Aus $M'(b) > 1$ folgt, daß in einer Umgebung von b

$$\frac{M(b) - M(x)}{b - x} > 1$$

besteht, d. h. unter Beachtung von $M(b) = b$ haben wir

$$(10) \quad M(x) < x,$$

und diese Ungleichung ist, wegen der Stetigkeit von $M(x)$, in dem ganzen Intervall $\kappa < x < b$ richtig. Aus der Monotonität von $M(x)$ folgt weiter im Fall $\kappa < x$ die Ungleichung $M(\kappa) < M(x)$, und so ist wegen (10)

$$\kappa = M(\kappa) < M(x) < x,$$

woraus sich

$$0 < M(x) - M(\kappa) < x - \kappa,$$

und

$$0 < \frac{M(x) - M(\kappa)}{x - \kappa} < 1$$

herleiten läßt. Diese letzte Relation ergibt unmittelbar die zu beweisende Ungleichung (9).

Der Punkt κ des Divergenzintervalls $[a, b]$ ist also ein Fixpunkt ν -ter, oder 2ν -ter Ordnung von $N(x)$ für welchen

$$(11) \quad 0 \leq N'_{2\nu}(\kappa) \leq 1$$

gilt. In dem ersten Fall folgt aus dieser Ungleichung, gemäß den Gleichungen

$$N'_{2\nu}(x) = N'_\nu(x_\nu) \cdot N'_\nu(x), \quad \kappa_\nu = \kappa,$$

daß

$$N'_{2\nu}(\kappa) = (N'_\nu(\kappa))^2,$$

d. h.

$$-1 \leq N'_\nu(\kappa) \leq +1$$

besteht: κ ist also ein anziehender oder indifferenter Fixpunkt, dessen Multiplikator eine Einheitswurzel ist. In dem zweiten Fall folgt dies für den Fixpunkt κ 2ν -ter Ordnung unmittelbar aus (11). Nach dem Hilfssatz 2 gibt es also in der Zahlenebene ein Gebiet, in dem eine unendliche Teilfolge der Iterationsfolge (8) nach κ konvergiert. Dann ist aber, gemäß dem Hilfssatz 3, $\kappa \in E'_c$, und das bedeutet, daß für ein gewisses k unter den Zahlen $0, 1, 2, \dots, m-1$ die Gleichheit $\kappa = \xi^{(k)}$ gilt. Dies ist aber unmöglich, da alle

^(k) ξ inneren Punkte von Konvergenzintervallen sind, und somit nicht in das Divergenzintervall $[a, b]$ fallen können.

So haben wir die Nichtexistenz solcher Divergenzintervalle bewiesen, die mit ihren Iterierten gemeinsame Punkte haben.

B) In dem zweiten Fall nehmen wir an, daß die Intervalle d_n paarweise keinen gemeinsamen Punkt haben. Wir beweisen, daß auch dieser Fall unmöglich ist. Wählen wir einen beliebigen inneren Punkt $x \in d$. Hat die Folge (x_n) nur endlich viele verschiedene Punkte, so gibt es ein Zahlenpaar n, n' für das $x_n = x_{n'}$ gilt. Dies bedeutet, daß die Intervalle d_n und $d_{n'}$ — trotz der Voraussetzung — gemeinsame Punkte haben. Die Folge $(x_n) \subset \mathfrak{F}$ hat nur verschiedene Punkte, x ist also ein irregulärer mobiler Punkt, d. h. — gemäß Hilfssatz 5 — ein Häufungspunkt der Folge $(x_n): \lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i} = x$. Das bedeutet aber, daß die Intervalle d_{n_i} für genügend großes i mit d gemeinsame Punkte haben, und dies widerspricht der Annahme.

So haben wir die Nichtexistenz solcher Divergenzintervalle bewiesen, welche mit ihren iterierten Intervallen keine gemeinsamen Punkte haben.

Aus diesen Resultaten folgt der

Satz 5. In der Menge der reellen Divergenzpunkte des auf das Polynom f angewandten Newtonschen Algorithmus gibt es keinen inneren Punkt; jeder Punkt der Zahlengerade ist also ein Konvergenzpunkt, oder ein Häufungspunkt von Konvergenzpunkten.

Aus dem Verfahren, wodurch die nicht-isolierten Divergenzpunkte (die Divergenzpunkte zweiter und dritter Art) aufgesucht wurden (I, p. 115—116.) folgt jetzt durch Satz 5, daß die Vereinigung der Mengen Z und Z' des Satzes 2 mit der Menge der nicht isolierten Divergenzpunkte identisch ist. Es gilt also der

Satz 2A. In jeder Umgebung eines nicht-isolierten Divergenzpunktes gibt es zu jeder Wurzel des Polynoms f gehörige Punkte¹⁹⁾.

Literatur.

- [1] B. BARNA, Über das Newtonsche Verfahren zur Annäherung von Wurzeln algebraischer Gleichungen, *Publ. Math. Debrecen* 2 (1951), 40—63.
- [2] B. BARNA, Über die Divergenzpunkte des Newtonschen Verfahrens zur Bestimmung von Wurzeln algebraischer Gleichungen I, *Publ. Math. Debrecen* 3 (1953), 109—118.

¹⁹⁾ Dies hängt mit der Eigenschaft der Menge $\mathfrak{F}$ zusammen, daß es höchstens zwei Punkte der Zahlenebene gibt, deren Invers-Iterierten sich nicht in den Punkten von $\mathfrak{F}$ häufen ([5], p. 35; [8], 235.) Satz 2A sagt aus, daß die reellen Punkte von $\mathfrak{F}$ (mit Ausnahme der isolierten Divergenzpunkte) Häufungspunkte der reellen Invers-Iterierten von $\xi^{(k)}$ sind.

- [3] H. CREMER, Über die Iteration rationaler Funktionen, *Jber. Deutsch. Math. Verein.* **33** (1925), 185—210.
- G. FATOU, Sur les équations fonctionnelles,
 - [4] Première Mémoire, *Bull. Soc. Math. France* **47** (1919), 161—271.
 - [5] Deuxième Mémoire, *Bull. Soc. Math. France* **48** (1920), 33—94.
 - [6] Troisième Mémoire, *Bull. Soc. Math. France* **48** (1920), 208—314.
- [7] G. JULIA, Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles, *J. Math. Pures Appl. ser. 8*, **1** (1918), 47—245.
- [8] P. MONTEL, Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications, *Paris*, 1927.
- [9] RÉNYI A., A Newton-féle gyökközelítő eljárásról (On Newton's method of approximation), *Mat. Lapok* **1** (1950), 278—293.
- [10] Д. И. ТАЛАНОВ, О некоторых вопросах теории итерации рациональной функции, Доклады А. Н. **93** (1953), 413—416.

(Eingegangen am 18. Oktober, 1955.)