

Auflösung eines homogenen linearen diophantischen Gleichungssystems mit Hilfe von Projektormatrizen.

Dem Andenken von Professor Tibor Szele gewidmet.

Von E. EGERVÁRY in Budapest.

Betrachten wir eine homogene lineare diophantische Gleichung in n Variablen

$$\mathbf{a}^* \mathbf{x} \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0. \quad (1)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, daß der größte gemeinsame Teiler $\mathcal{A}(\mathbf{a}^*)$ der ganzzahligen Komponenten von $\mathbf{a}^*$ gleich 1 ist. Dann kann man nach BETTI und GIUDICE die allgemeine Lösung von (1) in der Form darstellen [1] [2]

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{a}$$

wo $\mathbf{Q}$ eine beliebige schiefsymmetrische Matrix n -ter Ordnung mit ganzzahligen Elementen bedeutet, welche also eine überzählige Anzahl $\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$ von willkürlichen Parametern enthält. In ihrer Arbeit „On equal sums of squares“ haben BARNETT und MENDEL die folgende einfachere Lösungsformel angegeben [3]

$$\mathbf{x} = \mathbf{t} - \mathbf{b}(\mathbf{a}^* \mathbf{t}), \quad \mathbf{a}^* \mathbf{b} = 1, {}^1) \quad (2)$$

welche nur n willkürliche Parameter enthält, nämlich die ganzzahlige Komponenten des Vektors $\mathbf{t}^* = [t_1, t_2, \dots, t_n]$.

In einer unlängst erschienenen Arbeit [4] habe ich für die Lösung eines allgemeinen homogenen linearen Gleichungssystems ein endliches Iterationsverfahren entwickelt, welches auf fortgesetzter Rangerniedrigung beruht, überflüssige (d. h. von den früheren linear abhängige) Gleichungen automatisch

¹⁾ Die BARNETT—MENDELSche Lösung läßt sich übrigens auch aus der BETTischen Formel ableiten, wenn man $\mathbf{Q}$ als eine schiefsymmetrische Matrix 2-ten Ranges ansetzt:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{t} \mathbf{b}^* - \mathbf{b} \mathbf{t}^*.$$

Hier bedeutet $\mathbf{b}$ einen der Gleichung $\mathbf{b}^* \mathbf{a} = 1$ genügenden festen Vektor und $\mathbf{t}$ ist der willkürliche Parametervektor.

ausscheidet und (in homogener Form) die nötige Anzahl von willkürlichen Parametern enthält.

In dieser Note will ich zeigen, daß die von mir geschaffene allgemeine Methode [4] auch zur Auflösung eines beliebigen homogenen diophantischen Gleichungssystems geeignet ist und im Falle einer einzigen diophantischen Gleichung gerade die BARNETT-MENDELSche Lösungsformel liefert.

Gegeben sei das homogene lineare diophantische Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1^* \mathbf{x} &= 0 \\ \mathbf{a}_2^* \mathbf{x} &= 0 \\ &\dots \dots \dots \\ \mathbf{a}_m^* \mathbf{x} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

$\mathbf{b}_1$ sei ein ganzzahliger Vektor, welcher der Gleichung $\mathbf{a}_1^* \mathbf{b}_1 = \mathcal{A}(\mathbf{a}_1^*)$ genügt, sonst aber beliebig ist. Man bilde — dem in [4] angegebenen Algorithmus entsprechend — den Projektor $n-1$ -ten Ranges

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{b}_1 \mathbf{a}_1^*}{\mathbf{a}_1^* \mathbf{b}_1} = \mathbf{E} - \mathbf{b}_1 \frac{\mathbf{a}_1^*}{\mathcal{A}(\mathbf{a}_1^*)}. \quad (4)$$

Die auf diese Weise gebildete Matrix (4) ist offenbar ganzzahlig und genügt der Gleichung

$$\mathbf{a}_1^* \mathbf{X}_1 = \mathbf{a}_1^* - (\mathbf{a}_1^* \mathbf{b}_1) \frac{\mathbf{a}_1^*}{\mathbf{a}_1^* \mathbf{b}_1} = 0. \quad (5)$$

Die $n-1$ linear unabhängigen Spaltenvektoren von (4) bilden also ein vollständiges Lösungssystem der Gleichung $\mathbf{a}_1^* \mathbf{x} = 0$ und ihre allgemeine Lösung läßt sich mit Hilfe eines willkürlichen ganzzahligen Parametervektors $\mathbf{t}$ in folgender Form darstellen

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}_1 \mathbf{t} = \mathbf{t} - \mathbf{b}_1 \frac{\mathbf{a}_1^* \mathbf{t}}{\mathcal{A}(\mathbf{a}_1^*)},$$

welche — bei der Voraussetzung $\mathcal{A}(\mathbf{a}_1^*) = 1$ — mit der BARNETT—MENDELSchen Formel vollkommen übereinstimmt.

Daß die so erhaltene Formel alle Lösungen von $\mathbf{a}_1^* \mathbf{x} = 0$ enthält, erkennt man am einfachsten dadurch, daß man den Parametervektor $\mathbf{t}$ mit irgend einem Lösungsvektor zusammenfallen läßt.

Um auch die zweite Gleichung $\mathbf{a}_2^* \mathbf{x} = 0$ zu befriedigen, iteriere ich die durch (4) angegebene Projektorbildung folgendermassen:

Ist $\mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_1 = 0$, so ist $\mathbf{a}_2^* = \text{const.} \mathbf{a}_1^*$ (weil $\mathbf{X}_1$ den Rang $n-1$ hat), die zweite Gleichung (3) ist also eine Folge der ersten und kann somit weggelassen werden.

Ist aber $\mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_1 \neq 0$, so gibt es einen ganzzahligen Vektor $\mathbf{b}_2$, welche der Gleichung $\mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_1 \mathbf{b}_2 = \mathcal{A}(\mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_1)$ genügt. Man bilde nun mit diesem Vektor in Analogie zu (4) den ganzzahligen Projektor $n-2$ -ten Ranges

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1 - \frac{\mathbf{X}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_1}{\mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_1 \mathbf{b}_2} = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_1 \mathbf{b}_2 \frac{\mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_1}{\mathcal{A}(\mathbf{a}_2^* \mathbf{X}_1)}. \quad (6)$$

Wegen (5) (6) genügt X_2 der Gleichung $a_1^* X_2 = 0$. Aus

$$a_2^* X_2 = a_2^* X_1 - \frac{a_2^* X_1 b_2}{\Delta(a_2^* X_1)} a_2^* X_1 = 0$$

sieht man aber, daß X_2 auch der Gleichung $a_2^* X_2 = 0$ genügt.

Die allgemeine Lösung der beiden simultanen Gleichungen $a_1^* x = 0$, $a_2^* x = 0$ läßt sich also folgendermaßen darstellen

$$x = X_2 t,$$

wo t einen willkürlichen ganzzahligen Parametervektor bedeutet.

Das Verfahren kann man offenbar analog fortsetzen:

Ist bei dem k -ten Schritt $a_{k+1}^* X_k = 0$, so ist $a_{k+1}^* x = 0$ eine Folge der ersten k Gleichungen und wird dementsprechend weggelassen.

Ist aber $a_{k+1}^* X_k \neq 0$, so berechnet man einen ganzzahligen Vektor b_{k+1} , welcher der Gleichung

$$a_{k+1}^* X_k b_{k+1} = \Delta(a_{k+1}^* X_k)$$

genügt, und mit dessen Hilfe den ganzzahligen Projektor

$$X_{k+1} = X_k - \frac{X_k b_{k+1} a_{k+1}^* X_k}{a_{k+1}^* X_k b_{k+1}} \quad (k = 0, 1, \dots, r-1).$$

Hat das Gleichungssystem (3) den Rang r , so hat der auf diese Weise gebildete ganzzahlige Projektor X_r den Rang $n-r$, und befriedigt sämtliche Gleichungen

$$a_1^* X_r = 0, a_2^* X_r = 0, \dots, a_m^* X_r = 0.$$

Die $n-r$ linear unabhängigen Spaltenvektoren von X_r bilden also ein vollständiges Lösungssystem des diophantischen Systems (3) und die allgemeine Lösung läßt sich mit Hilfe eines ganzzahligen Parametervektors t folgendermaßen darstellen:

$$x = X_r t.$$

Man erkennt durch eine ähnliche Überlegung, wie oben, daß durch diese Formel sämtliche ganzzahlige Lösungen des gegebenen Systems (3) erfaßt werden.

Literatur.

- [1] J. BERTRAND—G. E. BETTI, *Traité élémentaire d'algèbre*, 1850.
- [2] N. GIUDICE, *Giornale di Mat.* **36** (1898) 226.
- [3] I. A. BARNETT—C. W. MENDEL, On equal sums of squares, *Amer. Math. Monthly* **49** (1942) 157—170.
- [4] E. EGÉRVÁRY, Rank-diminishing operations and the solution of linear equations by finite iteration, Erscheint demnächst in *Acta Sci. Math. Szeged*.

(Eingegangen am 21. November, 1955.)