Ringe und ihre additive Gruppe.*

Dem Andenken
meines verehrten Kollegen und geliebten Freundes T. Szele gewidmet.

Von L. FUCHS in Budapest.

§ 1. Einleitung.

Die allgemeine Struktur der Ringe wird von vielen Standpunkten aus untersucht. Von der Seite der Idealtheorie betrachtet man entweder die Durchschnittszerlegungen oder die multiplikativen Zerlegungen der Ideale des Ringes. Eine andere Möglichkeit zur Untersuchung ist, Ringe als subdirekte Summe von Ringen einfacher Struktur darzustellen usw. Es scheint uns, daß die Struktur der additiven Gruppe des Ringes bis nun noch nicht einer systematischen Untersuchung unterzogen worden ist,[1]) und somit sind unsere Kenntnisse bezüglich der additiven Struktur der Ringe ziemlich gering. Unser Ziel ist zu zeigen, daß in gewissen Fällen explizite Ergebnisse von der additiven Struktur der Ringe erreicht werden können.

Es ist klar, daß es keinen Zweck hat, die additive Struktur der Ringe in vollster Allgemeinheit zu untersuchen; es kommt nämlich jede abelsche Gruppe unter den additiven Gruppen der Ringe vor. In der Tat läßt sich auf jeder vorgeschriebenen abelschen Gruppe ein sog. Zeroring aufbauen (wo das Produkt von je zwei Elementen verschwindet). Fordert man aber vom Ringe noch weitere Eigenschaften, als bloß ein allgemeiner Ring zu sein, so spezialisiert sich auch die additive Struktur des Ringes. Ist z. B. der Ring ein Schiefkörper, so ist seine additive Gruppe bekanntlich die direkte Summe entweder von rationalen Gruppen[2]) oder von zyklischen Gruppen von Primzahlordnung p (mit fester p), je nachdem die Charakteristik 0 oder p ist. Aus den berühmten Struktursätzen von Wedderburn—Artin folgt, daß die addi-

---

* Vorgetragen auf dem IV. Tschechoslovakischen Mathematiker-Kongreß in Prag, am 7. September 1955.

[1]) Man pflegt die additive Gruppe des Ringes als einen Operatormodul aufzufassen, aber wir sehen jetzt vom Operatorbereich ab und ziehen nur die reine additive Gruppe in Betracht.

[2]) Für die Terminologie und Grundbegriffe verweisen wir auf § 2.

tive Gruppe eines einfachen Ringes dieselbe Struktur besitzt, wie bei Körpern, während die additive Gruppe eines halbeinfachen Ringes die direkte Summe von endlich vielen solchen Gruppen ist (s. auch unten § 8). Als ein anderes Beispiel erwähnen wir das schöne Ergebnis von T. SZELE [14],[3]) nach dem ein nilpotenter Ring mit Minimalbedingung für Linksideale die folgende additive Struktur besitzt: die additive Gruppe eines solchen Ringes ist die direkte Summe von endlich vielen zyklischen und quasizyklischen Gruppen. Umgekehrt läßt sich auf einer solchen Gruppe jeweils ein Ring vom erwähnten Typ aufbauen.[3a])

Wir können nun das recht allgemeine Problem formulieren: *Zu einer gegebenen Ringeigenschaft* E (z. B. Minimal- oder Maximalbedingung für Linksideale, Regularität im Sinne von NEUMANN usw.) *sind hinreichende und notwendige Bedingungen aufzustellen, damit sich auf einer abelschen Gruppe G ein Ring R mit der Eigenschaft* E *aufbauen lasse.*

Das ist der eine Problemkreis, mit dem wir uns jetzt beschäftigen wollen (s. §§ 6—12).

Der andere ist: *Es sind alle Ringe zu bestimmen, die auf einer gegebenen abelschen Gruppe G aufgebaut sind.* Diesem Problem haben zuerst R. A. BEAUMONT [1] und T. SZELE [11] ihre Aufmerksamkeit gewidmet. BEAUMONT hat alle, auf direkten Summen von zyklischen Gruppen aufgebauten Ringe betrachtet und diese durch gewissen Bedingungsgleichungen genügende ganze rationale Zahlen charakterisiert. SZELE hat sämtliche Nil-Torsionsgruppen explizit bestimmt, ferner die Nichtexistenz von gemischten Nilgruppen bewiesen. Dabei ist unter einer Nilgruppe eine solche zu verstehen, die nur die additive Gruppe eines Zeroringes sein kann. SZELE wies auch auf zwei Arten von systematischer Untersuchung hin [12], auf Grund der Begriffe von Quasinilgruppen r-ter Art und von höheren Nilstufen. L. RÉDEI und T. SZELE [8] haben alle Ringe explizit angegeben, deren additive Gruppe eine abelsche Gruppe vom Range 1 ist.[4]) L. RÉDEI befaßte sich mit dem allgemeinen Problem, alle auf einem Operatormodul G über einem Ring mit Einselement aufgebauten Ringe zu bestimmen; sein Ergebnis [9] ist ziemlich kompliziert.

Im zweiten Problemkreis bezieht sich unser Hauptergebnis auf Ringe, deren additive Gruppe eine Torsionsgruppe ist. Unser Resultat ist auch im allgemeinsten Falle verhältnismäßig explizit. Nachdem man bemerkt hat, daß die Elemente von unendlicher Höhe stets Annullatoren des ganzen Torsionsringes sein müssen, ist es leicht zu schließen, daß die Multiplikation

---

[3]) Die Nummern in eckigen Klammern verweisen auf die Literatur am Ende der Arbeit.

[3a]) A. KERTÉSZ machte mich darauf aufmerksam, daß O. GOLDMAN (Semi-simple extensions of rings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 1028—1032) bewiesen hat, daß alle, auf einer gegebenen Gruppe G aufgebauten Ringe dann und nur dann halbeinfache Erweiterungen besitzen, wenn G kein Element der Ordnung p^2 enthält.

[4]) Gruppen vom Range 1 sind die Untergruppen der rationalen Gruppe und die der quasizyklischen Gruppen (s. [8]).

nur für die Elemente irgendeiner Basisuntergruppe B zu erklären ist. Da aber B definitionsgemäß eine direkte Summe von zyklischen p-Gruppen ist, genügt es, die Multiplikation nur für die Basiselemente von B anzugeben. Somit ist *im wesentlichen* die Struktur eines auf einer beliebigen Torsionsgruppe aufgebauten Ringes auf die Multiplikation der Elemente der möglichst einfachsten Torsionsgruppen (nämlich der Zyklensummen) zurückgeführt. — Der Fall von torsionsfreien und gemischten Gruppen ist sehr schwer; bezüglich der torsionsfreien Gruppen werden wir hauptsächlich den Fall von vollständigen Gruppen betrachten und einige Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen den Problemen bezüglich des allgemeinen Falls und des von vollständigen Gruppen machen.

§ 2. Vorbereitungen.

Unter einer Gruppe verstehen wir durchweg eine additive abelsche Gruppe mit mehr als einem Element. Gruppen und Ringe werden hier mit großen Buchstaben, ihre Elemente mit $a, b, \ldots, g, x, y, z$ bezeichnet, während die übrigen kleinen lateinischen Buchstaben für ganze rationale Zahlen (insbesondere p für Primzahlen) reserviert sind. Kleine gotische Typen stehen für Kardinalzahlen.

Mit $O(a)$ bezeichnen wir die Ordnung des Gruppenelements a. Ist S eine Untermenge der Gruppe G oder des Ringes R, so bedeutet $\{S\}$ bzw. $(S)_l$ die von S erzeugte Untergruppe bzw. das von S erzeugte Linksideal. Für irgendeine Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ wird $\sum_{\mathfrak{m}} C_i$ eine (diskret) direkte Summe von $\mathfrak{m}$ Gruppen, von denen jede einer der Gruppen C_i isomorph ist, bezeichnen.

Wir sagen, daß die natürliche Zahl n das Element a annulliert, wenn $na = a + \ldots + a = 0$ ist, und daß sie das Element b teilt, in Zeichnen: $n|b$, wenn die Gleichung $nx = b$ für x in der Gruppe G lösbar ist. Unter $G[n]$ bzw. nG verstehen wir die Gesamtheit der durch n annullierten bzw. teilbaren Elemente. Die zyklische Gruppe der Ordnung r ($1 \leqq r \leqq \infty$) wird mit $\mathfrak{C}(r)$ bezeichnet; $\mathfrak{C}(p^\infty)$ bedeutet die quasizyklische p-Gruppe (d. h. die Prüfersche Gruppe des Typs p^∞) und $\mathfrak{R}$ die rationale Gruppe (d. h. die additive Gruppe aller rationalen Zahlen). Bekanntlich ist jede vollständige (oder, in der Terminologie von T. Szele [10], algebraisch abgeschlossene) abelsche Gruppe (vollständig heißt eine Gruppe G, wenn $nG = G$ für jedes natürliche n) die direkte Summe von Gruppen $\mathfrak{C}(p^\infty)$ und $\mathfrak{R}$, und sie ist ein direkter Summand in jeder sie enthaltenden abelschen Gruppe. H heißt eine Servanzuntergruppe von G, falls für jedes $a \in H$ aus der Richtigkeit der Teilbarkeitsrelation $n|a$ in G ihre Richtigkeit auch in H folgt. B heißt eine Basisuntergruppe der p-Gruppe G, wenn B die direkte Summe von zyklischen Gruppen, eine Servanzuntergruppe von G ist, und außerdem die Faktorgruppe G/B voll-

ständig ist. Nach einem grundlegenden Satz von L. J. KULIKOFF [6][5]) besitzt jede p-Gruppe eine Basisuntergruppe, die bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

Das Element a der Ordnung p^n (p ist eine Primzahl) heißt von der Höhe k, wenn k die größte nichtnegative ganze Zahl ist mit der Eigenschaft $p^k | a$. Gibt es kein größtes k mit dieser Eigenschaft, so ist a von unendlicher Höhe.

Es sei a ein Element von unendlicher Ordnung und p_n bedeute die n-te Primzahl. Es sei ferner k_n der größte Exponent, für den die Relation $p_n^{k_n} | a$ gilt; existiert kein größter k_n, so sei $k_n = \infty$. Die Folge $\chi(a) = (k_1, k_2, \ldots)$ heiße die Charakteristik von a. $\chi(a)$ und $\chi(b) = (l_1, l_2, \ldots)$ seien als äquivalent betrachtet, wenn $k_n = l_n$ für alle n mit Ausnahme von höchstens endlich vielen n, für die aber k_n und l_n beide endlich sein müssen. Die äquivalenten Charakteristiken bilden eine Klasse, die der Typ $\tau(a)$ von a heißt. Wir setzen $\tau(a) \leqq \tau(b)$, falls es Charakteristiken $\chi(a') = (k_1, k_2, \ldots)$, $\chi(b') = (l_1, l_2, \ldots)$ in den Klassen $\tau(a)$ bzw. $\tau(b)$ gibt, so daß $k_n \leqq l_n$ für jedes n.

Um die Terminologie zu vereinfachen, verabreden wir, die gewohnten Benennungen der Theorie der abelschen Gruppen unbeschränkt auf Ringe zu übertragen. So z. B. bedeute ein torsionsfreier Ring nichts anderes, als einen Ring mit torsionsfreier additiver Gruppe, ein Servanzideal dasselbe, wie ein Ideal, dessen additive Gruppe eine Servanzuntergruppe in der additiven Gruppe des ganzen Ringes ist usw. Eine gewisse Identifizierung des Ringes und seiner additiven Gruppe wird keine Mißverständnisse verursachen. (Wir nennen einen Ring R auch einen auf seiner additiven Gruppe R^+ aufgebauten oder konstruierten Ring.)

§ 3. Ideale, die allein durch die additive Gruppe bestimmt sind.

Ein großer Teil unserer Resultate stützt sich auf die triviale, aber für unsere Zwecke grundlegende Beobachtung, daß eine Anzahl von Idealen — ohne Kenntnis der multiplikativen Struktur des Ringes — nur mit Hilfe der additiven Gruppe des Ringes festgestellt werden kann. Es kann natürlich vorkommen, daß diese zum Teil oder in ihrer Gesamtheit mit den trivialen Idealen übereinstimmen. Doch werden diese im folgenden eine entscheidende Rolle spielen.

Zuerst die wichtigste Tatsache:

Haupthilfssatz. 1) *Aus* $n|a$, $m|b$ *folgt* $nm|ab$;
2) *aus* $na = 0$, $mb = 0$ *folgt* $(n, m)\, ab = 0$;[6])
3) *aus* $n|a$, $nb = 0$ *folgt* $ab = 0$.

[5]) S. auch KUROSCH [5] und SZELE [13].

[6]) Hier wird $(n, 0) = n$ gesetzt.

BEWEIS. 1) Existiert x, y mit $nx = a$, $my = b$, so genügt $z = xy$ der Gleichung $(nm)z = ab$. 2) Löst man die diophantische Gleichung $ns + mt = (n, m)$ für ganze Zahlen s, t, so folgt $(n, m)ab = (ns)(ab) + (mt)(ab) = (na)(sb) + (ta)(mb) = 0$. Endlich folgt 3) aus $ab = (nx)b = x(nb) = 0$.

Wir erwähnen die folgenden wichtigen Konsequenzen des Haupthilfssatzes:

(i) nR ist ein Ideal im Ringe R;

(ii) ist L ein Linksideal, so ist es auch nL;

(iii) in einem p-Ring R bilden die Elemente von unendlicher Höhe ein Ideal, nämlich $\bigcap_{k=0}^{\infty} p^k R$; allgemeiner:

(iv) für jede Ordinalzahl β ist[7]) $\bigcap_{\alpha<\beta} p^\alpha R$ stets ein Ideal von R;

(v) die maximale vollständige Untergruppe, sowie deren p-Komponenten sind Ideale;[8])

(vi) in torsionsfreien Ringen bilden die Elemente, deren Typ gleich oder größer als ein fester Typ ist, ein Ideal;

(vii) $R[n]$ ist ein Ideal von R;

(viii) für ein Linksideal L ist $L[n]$ stets auch ein solches;

(ix) die Torsionsuntergruppe (= der Torsionsunterring), sowie deren p-Komponenten sind Ideale;

(x) für verschiedene Primzahlen p und q annulliert jede p-Untergruppe jede q-Untergruppe;

(xi) die Ideale nR und $R[n]$ annullieren einander;

(xii) in einem p-Ring annulliert ein Element von unendlicher Höhe jedes Element des Ringes;

(xiii) in einem Torsionsring ist jede Untergruppe, die aus Elementen von unendlicher Höhe besteht, ein Ideal; usw.

Die Beweise dieser Behauptungen sind fast trivial und können dem Leser überlassen werden. [(i)—(vi) folgen aus 1), (vii)—(x) aus 2) und (xi)—(xiii) aus 3).]

§ 4. Ringe, die auf einer Torsionsgruppe aufgebaut sind.

Und nun wenden wir uns dem Problem zu, eine Übersicht über alle, auf einer gegebenen, sonst beliebigen Torsionsgruppe aufgebauten Ringe zu gewinnen. Jede Torsionsgruppe läßt sich bekanntlich in die direkte Summe

---

[7]) $p^\alpha R$ ist folgendermaßen definiert: es ist gleich $p(p^{\alpha-1}R)$, falls $\alpha-1$ existiert, und gleich $\bigcap_{\gamma<\alpha} p^\gamma R$, falls α eine Limeszahl ist.

[8]) Daher können wir von dem maximalen vollständigen Ideal bzw. dem maximalen vollständigen p-Ideal eines Ringes reden.

von eindeutig bestimmten p-Gruppen zerspalten. Nun sind diese p-Komponenten nicht nur Untergruppen, sondern auch Ideale (dies folgt auch aus (ix) in § 3), somit gilt diese direkte Zerlegung auch im ringtheoretischen Sinne. Deshalb genügt es, uns auf p-Ringe zu beschränken.

Wie schon erwähnt, besitzt jede p-Gruppe eine Basisuntergruppe. Diese ist einer der allerwichtigsten Begriffe der allgemeinen Theorie der abelschen Torsionsgruppen von beliebiger Mächtigkeit. Wir zeigen nun, daß die Basisuntergruppe eine ebensolch wichtige Rolle auch in der Ringtheorie spielt; es gilt nämlich:

Satz 1. *Die Multiplikation der Elemente eines p-Ringes R ist durch die Multiplikation der Elemente einer Basisuntergruppe B von R schon eindeutig bestimmt.*

Der Beweis erfordert nur einige Zeilen. Um das Produkt cd $(c, d \in R)$ zu bestimmen, beachten wir, daß R/B definitionsgemäß eine vollständige Gruppe ist, und somit für alle natürlichen Zahlen h, k die Gleichungen $p^h x = c - a$, $p^k y = d - b$ (mit passenden $a, b \in B$) lösbar sind. Wählt man den Ungleichungen $O(d) \leqq p^h$, $O(a) \leqq p^k$ genügende h, k, so ist

$$cd = (p^h x + a)\, d = ad = a(p^k y + b) = ab, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Zugleich erwähnen wir aus dem bewiesenen Satz folgenden interessanten

Zusatz. *Jedes Ideal des von B erzeugten Ringes ist ein Ideal auch von R.*

Nun sei G eine p-Gruppe und B eine Basisuntergruppe von G; B ist die direkte Summe von zyklischen Gruppen $\{a_\alpha\}$ der Ordnung p^{n_α}, $B = \sum_\alpha \{a_\alpha\}$, wo α eine Indexmenge I beliebiger Mächtigkeit durchläuft. G/B (als eine vollständige p-Gruppe) besitzt die Struktur $G/B = \sum_\beta \bar{C}_\beta \cong \sum \mathfrak{C}(p^\infty)$; hier ist $\bar{C}_\beta = \{\bar{c}_\beta^{(1)}, \bar{c}_\beta^{(2)}, \ldots\}$ mit $p\bar{c}_\beta^{(1)} = \bar{0}$, $p\bar{c}_\beta^{(2)} = \bar{c}_\beta^{(1)}, \ldots$ Da B definitionsgemäß eine Servanzuntergruppe ist, läßt sich jede Nebenklasse $\bar{c}_\beta^{(m)}$ ordnungstreu durch ein Element $c_\beta^{(m)} \in G$ repräsentieren, d. h.[9])

$$(1) \qquad c_\beta^{(1)} \neq 0, \quad pc_\beta^{(1)} = 0, \quad pc_\beta^{(m)} = c_\beta^{(m-1)} - b_\beta^{(m-1)} \qquad (c_\beta^{(m)} \in \bar{c}_\beta^{(m)},\ b_\beta^{(m)} \in B),$$

wo $O(c_\beta^{(m)}) = p^m$ und $b_\beta^{(m)} = \sum_\alpha s_{\beta\alpha}^{(m)} a_\alpha$ (mit endlich vielen nichtverschwindenden Gliedern). [Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, daß $0 \leqq s_{\beta\alpha}^{(m)} \leqq p-1$ gilt.] Es folgt, daß jedes Element g von G eine Darstellung der Form

$$(2) \qquad g = \sum_\alpha v_\alpha a_\alpha + \sum_\beta w_\beta c_\beta^{(m_\beta)} \qquad (v_\alpha, w_\beta \text{ ganz rational}, \ p \nmid w_\beta \neq 0)^{10})$$

[9]) Für die folgenden Überlegungen vgl. [3].

[10]) Diese Summen enthalten nur endlich viele nichtverschwindende Glieder. Die unten auftretenden formalen Summen, die auch abzählbar unendlich viele nichtverschwindende Summanden besitzen können, werden durch Sternchen gekennzeichnet.

besitzt;[11]) gilt noch $g=\sum_\alpha v'_\alpha a_\alpha+\sum_\beta w'_\beta c_\beta^{(m'_\beta)}$ ohne die Voraussetzung $p\nmid w'_\beta$, so muß $m'_\beta\geqq m_\beta$, $w'_\beta=p^{m'_\beta-m_\beta}w''_\beta$ (w''_β ganz) sein, ferner

$$g=\sum_\alpha v'_\alpha a_\alpha+\sum_\beta w''_\beta p^{m'_\beta-m_\beta}c_\beta^{(m'_\beta)}=$$
$$=\sum_\alpha v'_\alpha a_\alpha+\sum_\beta w''_\beta[c_\beta^{(m_\beta)}-b_\beta^{(m_\beta)}-pb_\beta^{(m_\beta+1)}-\cdots-p^{m'_\beta-m_\beta-1}b_\beta^{(m'_\beta-1)}].$$

Ordnen wir den Elementen $c_\beta^{(m)}$ die formalen Summen

$$(3)\qquad c_\beta^{(m)}\to b_\beta^{(m)}+pb_\beta^{(m+1)}+p^2b_\beta^{(m+2)}+\cdots=\sum_\alpha{}^*u_{\beta\alpha}^{(m)}a_\alpha\qquad(u_{\beta\alpha}^{(m)}\text{ ganze Zahlen})$$

zu, so folgt aus (1), daß $pu_{\beta\alpha}^{(m)}=u_{\beta\alpha}^{(m-1)}-s_{\beta\alpha}^{(m-1)}$ gilt, d. h.

$$g=\sum_\alpha v'_\alpha a_\alpha+\sum_\beta w''_\beta c_\beta^{(m_\beta)}-\sum_\alpha[\sum_\beta(w''_\beta u_{\beta\alpha}^{(m_\beta)}-w'_\beta u_{\beta\alpha}^{(m'_\beta)})]a_\alpha.$$

Vergleich mit (2) liefert

$$(4)\qquad w_\beta\equiv w''_\beta(\mathrm{mod}\,p^{m_\beta});\quad v_\alpha+\sum_\beta w''_\beta u_{\beta\alpha}^{(m_\beta)}\equiv v'_\alpha+\sum_\beta w'_\beta u_{\beta\alpha}^{(m'_\beta)}\ (\mathrm{mod}\ p^{n_\alpha}).$$

Die formalen Summen in (3) haben die wichtige Eigenschaft, daß *sie sich hinsichtlich Multiplikation ebenso verhalten, wie die entsprechenden* $c_\beta^{(m)}$;[12]) dies folgt unmittelbar aus der Bemerkung, daß $c_\beta^{(m)}g=[p^kc_\beta^{(m+k)}+b_\beta^{(m)}+\cdots+p^{k-1}b_\beta^{(m+k-1)}]g=[b_\beta^{(m)}+\cdots+p^{k-1}b_\beta^{(m+k-1)}]g$, falls $O(g)\leqq p^k$ ist. Ferner folgt aus $p^mc_\beta^{(m)}=0$, daß alle Glieder $p^mu_{\beta\alpha}^{(m)}a_\alpha$ in (3) verschwinden. Da folglich $u_{\beta\alpha}^{(m)}a_\alpha$ durch (p^m,p^{n_α}) annulliert wird, besteht die Teilbarkeitsrelation[13])

$$(5)\qquad u_{\beta\alpha}^{(m)}\equiv 0\quad\left(\mathrm{mod}\,\frac{p^{n_\alpha}}{(p^{n_\alpha},p^m)}\right).$$

Ist nun das Produkt $a_\mu a_\nu$ für je zwei Basiselemente a_μ, a_ν von B bekannt,

$$(6)\qquad a_\mu a_\nu=\sum_\alpha v_{\mu\nu\alpha}a_\alpha+\sum_\beta w_{\mu\nu\beta}c_\beta^{(m_{\mu\nu\beta})},$$

wo

$$(7)\quad\begin{cases}v_{\mu\nu\alpha},\ w_{\mu\nu\beta}\ \textit{ganz},\ v_{\mu\nu\alpha}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,p^{n_\alpha}),\ w_{\mu\nu\beta}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,p^{m_{\mu\nu\beta}})\ \textit{mit Ausnahme}\\ \textit{von endlich vielen}\ \alpha,\beta\ \textit{(für beliebige feste}\ \mu,\nu);\ \textit{ist}\ w_{\mu\nu\beta}\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,p^{m_{\mu\nu\beta}}),\\ \textit{so gilt auch}\ w_{\mu\nu\beta}\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,p),\end{cases}$$

---

[11]) Die Darstellung (2) ist eindeutig in dem Sinne, daß $v_\alpha a_\alpha$ und $w_\beta c_\beta^{(m_\beta)}$ (mit $p\nmid w_\beta$) eindeutig bestimmt sind; (2) heiße die kanonische Darstellung von g mittels der Quasibasis $(a_\alpha, c_\beta^{(m)})$. Zugleich bemerken wir, daß $O(v_\alpha a_\alpha)\leqq O(g)$, $p^{m_\beta}\leqq O(g)$ gelten.

[12]) Ist dieselbe formale Summe zwei verschiedenen Elementen zugeordnet, so ist deren Differenz ein Element von unendlicher Höhe (die also jedes Element des Ringes annulliert).

[13]) Die vorliegende Zuordnung (3) bildet die Gruppe G auf eine mit G/G_1 isomorphe Gruppe ab, wo G_1 die Untergruppe bestehend aus allen Elementen von unendlicher Höhe bedeutet. (Dies folgt aus § 4 meiner Arbeit [3].) Aus dieser Isomorphie folgt die hier benutzte Tatsache.

so ist nach dem Distributivgesetz und Satz 1 die Multiplikation für alle Elemente von G erklärt. Da offensichtlich $O(a_\mu a_\nu) \leqq \min(O(a_\mu), O(a_\nu))$ sein muß, gilt (vgl. Fußnote[11])

$$m_{\mu\nu\beta} \leqq \min(n_\mu, n_\nu); \tag{8}$$

ferner folgt, daß $p^{n_\mu}, p^{n_\nu}, p^{n_\alpha}$ das Element $v_{\mu\nu\alpha} a_\alpha$ annullieren, d. h.

$$v_{\mu\nu\alpha} \equiv 0 \quad \left(\mathrm{mod}\, \frac{p^{n_\alpha}}{(p^{n_\mu}, p^{n_\nu}, p^{n_\alpha})}\right). \tag{9}$$

Da einerseits

$$\begin{aligned}
(a_\mu a_\nu) a_\varrho &= \Big[\sum_\alpha v_{\mu\nu\alpha} a_\alpha + \sum_\beta w_{\mu\nu\beta} c_\beta^{(m_{\mu\nu\beta})}\Big] a_\varrho = \\
&= \sum_\alpha v_{\mu\nu\alpha} (a_\alpha a_\varrho) + \sum_\beta w_{\mu\nu\beta} \sum_\gamma{}^{*} u_{\beta\gamma}^{(m_{\mu\nu\beta})} (a_\gamma a_\varrho) = \\
&= \sum_\alpha v_{\mu\nu\alpha} \Big[\sum_\delta v_{\alpha\varrho\delta} a_\delta + \sum_\varepsilon w_{\alpha\varrho\varepsilon} c_\varepsilon^{(m_{\alpha\varrho\varepsilon})}\Big] + \\
&+ \sum_\beta w_{\mu\nu\beta} \sum_\gamma{}^{*} u_{\beta\gamma}^{(m_{\mu\nu\beta})} \Big[\sum_\delta v_{\gamma\varrho\delta} a_\delta + \sum_\varepsilon w_{\gamma\varrho\varepsilon} c_\varepsilon^{(m_{\gamma\varrho\varepsilon})}\Big] = \\
&= \sum_\delta \Big[\sum_\alpha v_{\mu\nu\alpha} v_{\alpha\varrho\delta} + \sum_\beta \sum_\gamma{}^{*} w_{\mu\nu\beta} u_{\beta\gamma}^{(m_{\mu\nu\beta})} v_{\gamma\varrho\delta}\Big] a_\delta + \\
&+ \sum_\varepsilon \Big[\sum_\alpha v_{\mu\nu\alpha} w_{\alpha\varrho\varepsilon} c_\varepsilon^{(m_{\alpha\varrho\varepsilon})} + \sum_\beta \sum_\gamma{}^{*} w_{\mu\nu\beta} u_{\beta\gamma}^{(m_{\mu\nu\beta})} w_{\gamma\varrho\varepsilon} c_\varepsilon^{(m_{\gamma\varrho\varepsilon})}\Big],
\end{aligned}$$

andererseits

$$\begin{aligned}
a_\mu (a_\nu a_\varrho) &= a_\mu \Big[\sum_\alpha v_{\nu\varrho\alpha} a_\alpha + \sum_\beta w_{\nu\varrho\beta} c_\beta^{(m_{\nu\varrho\beta})}\Big] = \\
&= \sum_\alpha v_{\nu\varrho\alpha} (a_\mu a_\alpha) + \sum_\beta w_{\nu\varrho\beta} \sum_\gamma{}^{*} u_{\beta\gamma}^{(m_{\nu\varrho\beta})} (a_\mu a_\gamma) = \\
&= \sum_\alpha v_{\nu\varrho\alpha} \Big[\sum_\delta v_{\mu\alpha\delta} a_\delta + \sum_\varepsilon w_{\mu\alpha\varepsilon} c_\varepsilon^{(m_{\mu\alpha\varepsilon})}\Big] + \\
&+ \sum_\beta w_{\nu\varrho\beta} \sum_\gamma{}^{*} u_{\beta\gamma}^{(m_{\nu\varrho\beta})} \Big[\sum_\delta v_{\mu\gamma\delta} a_\delta + \sum_\varepsilon w_{\mu\gamma\varepsilon} c_\varepsilon^{(m_{\mu\gamma\varepsilon})}\Big] = \\
&= \sum_\delta \Big[\sum_\alpha v_{\nu\varrho\alpha} v_{\mu\alpha\delta} + \sum_\beta \sum_\gamma{}^{*} w_{\nu\varrho\beta} u_{\beta\gamma}^{(m_{\nu\varrho\beta})} v_{\mu\gamma\delta}\Big] a_\delta + \\
&+ \sum_\varepsilon \Big[\sum_\alpha v_{\nu\varrho\alpha} w_{\mu\alpha\varepsilon} c_\varepsilon^{(m_{\mu\alpha\varepsilon})} + \sum_\beta \sum_\gamma{}^{*} w_{\nu\varrho\beta} u_{\beta\gamma}^{(m_{\nu\varrho\beta})} w_{\mu\gamma\varepsilon} c_\varepsilon^{(m_{\mu\gamma\varepsilon})}\Big],
\end{aligned}$$

schließt man:

$$\begin{aligned}
&\sum_\delta \Big[\sum_\alpha v_{\mu\nu\alpha} v_{\alpha\varrho\delta} + \sum_\beta \sum_\gamma{}^{*} w_{\mu\nu\beta} u_{\beta\gamma}^{(m_{\mu\nu\beta})} v_{\gamma\varrho\delta}\Big] a_\delta + \\
&+ \sum_\varepsilon \Big[\sum_\alpha v_{\mu\nu\alpha} w_{\alpha\varrho\varepsilon} c_\varepsilon^{(m_{\alpha\varrho\varepsilon})} + \sum_\beta \sum_\gamma{}^{*} w_{\mu\nu\beta} u_{\beta\gamma}^{(m_{\mu\nu\beta})} w_{\gamma\varrho\varepsilon} c_\varepsilon^{(m_{\gamma\varrho\varepsilon})}\Big] = \\
&= \sum_\delta \Big[\sum_\alpha v_{\nu\varrho\alpha} v_{\mu\alpha\delta} + \sum_\beta \sum_\gamma{}^{*} w_{\nu\varrho\beta} u_{\beta\gamma}^{(m_{\nu\varrho\beta})} v_{\mu\gamma\delta}\Big] a_\delta + \\
&+ \sum_\varepsilon \Big[\sum_\alpha v_{\nu\varrho\alpha} w_{\mu\alpha\varepsilon} c_\varepsilon^{(m_{\mu\alpha\varepsilon})} + \sum_\beta \sum_\gamma{}^{*} w_{\nu\varrho\beta} u_{\beta\gamma}^{(m_{\nu\varrho\beta})} w_{\mu\gamma\varepsilon} c_\varepsilon^{(m_{\mu\gamma\varepsilon})}\Big].
\end{aligned} \tag{10}$$

Ist somit auf der Gruppe G ein Ring mit durch (6) erklärter Multiplikation aufgebaut, so müssen (7), (8), (9) und (10) gültig sein.

Umgekehrt, seien in der Gruppe G ganze Zahlen $v_{\mu\nu\alpha}$, $w_{\mu\nu\beta}$ gegeben, die den Bedingungen (7)—(10) genügen. Wir definieren die Multiplikation der Elemente a_α gemäß (6) und erstrecken sie mittels des Distributivgesetzes und der formalen Summen (3) auf alle Elemente von G. Damit wird auf G eine eindeutige Multiplikation erklärt; wird nämlich das Element

$$g = \sum_\alpha v_\alpha a_\alpha + \sum_\beta w_\beta c_\beta^{(m_\beta)} = \sum_\alpha v'_\alpha a_\alpha + \sum_\beta w'_\beta c_\beta^{(m'_\beta)} \qquad (p \nmid w_\beta \neq 0)$$

mit $h = \sum_\mu \bar{v}_\mu a_\mu + \sum_\nu \bar{w}_\nu c_\nu^{(\bar{m}_\nu)}$ multipliziert, so ergibt sich einerseits

$$gh = \sum_\alpha{}^* \Big[v_\alpha + \sum_\beta w_\beta u_{\beta\alpha}^{(m_\beta)}\Big] a_\alpha \cdot \sum_\mu{}^* \Big[\bar{v}_\mu + \sum_\nu \bar{w}_\nu u_{\nu\mu}^{(\bar{m}_\nu)}\Big] a_\mu =$$

$$= \sum_\alpha{}^* \sum_\mu{}^* \Big[v_\alpha + \sum_\beta w_\beta u_{\beta\alpha}^{(m_\beta)}\Big] \Big[\bar{v}_\mu + \sum_\nu \bar{w}_\nu u_{\nu\mu}^{(\bar{m}_\nu)}\Big] \Big[\sum_\gamma v_{\alpha\mu\gamma} a_\gamma + \sum_\delta w_{\alpha\mu\delta} c_\delta^{(m_{\alpha\mu\delta})}\Big],$$

andererseits

$$gh = \sum_\alpha{}^* \sum_\mu{}^* \Big[v'_\alpha + \sum_\beta w'_\beta u_{\beta\alpha}^{(m'_\beta)}\Big] \Big[\bar{v}_\mu + \sum_\nu \bar{w}_\nu u_{\nu\mu}^{(\bar{m}_\nu)}\Big] \Big[\sum_\gamma v_{\alpha\mu\gamma} a_\gamma + \sum_\delta w_{\alpha\mu\delta} c_\delta^{(m_{\alpha\mu\delta})}\Big].$$

Nun ist nach (4)[14])

$$v'_\alpha + \sum_\beta w'_\beta u_{\beta\alpha}^{(m'_\beta)} \equiv v_\alpha + \sum_\beta w''_\beta u_{\beta\alpha}^{(m_\beta)} =$$
$$= v_\alpha + \sum_\beta w_\beta u_{\beta\alpha}^{(m_\beta)} + \sum_\beta p^{m_\beta} k_\beta u_{\beta\alpha}^{(m_\beta)} \qquad (\mathrm{mod}\ p^{n_\alpha}).$$

Aus (5) folgt, daß hier die letzte Summe weggelassen werden kann. Daher sind nach (9) die Koeffizienten von a_γ in beiden Ausdrücken von gh nach dem Modul $p^{n_\alpha} \dfrac{p^{n_\gamma}}{(p^{n_\alpha}, p^{n_\mu}, p^{n_\gamma})}$, und somit auch mod p^{n_γ} zueinander kongruent. Auch die $c_\delta^{(m_{\alpha\mu\delta})}$ enthaltenden Glieder stimmen in beiden Ausdrücken überein, da die Koeffizienten von $c_\delta^{(m_{\alpha\mu\delta})}$ mod p^{n_α}, und somit wegen (8) auch mod $p^{m_{\alpha\mu\delta}}$ zueinander kongruent sind.[15]) Da das Distributivgesetz infolge der Definition und der eben bewiesenen Eindeutigkeit der Multiplikation, das Assoziativgesetz wegen (10) gültig ist, erhält man den

Satz 2. *Auf der p-Gruppe G mit der Quasibasis $(a_\alpha, c_\beta^{(m_\beta)})$ läßt sich dann und nur dann ein Ring mit durch* (6) *gegebener Multiplikation aufbauen, wenn*

(i) *die Multiplikation durch das Distributivgesetz und die Zuordnung* (3) *auf alle Elemente von G erstreckt ist,*

(ii) *die ganzen Zahlen $v_{\mu\nu\alpha}$, $w_{\mu\nu\beta}$ den Bedingungen* (7), (8), (9) *und* (10) *genügen.*

---

[14]) Hier bezeichnet k_β irgendeine ganze Zahl.

[15]) Für hg schließt man analog.

§ 5. Auf torsionsfreien Gruppen aufgebaute Ringe.

Für torsionsfreie und gemischte Gruppen ist das allgemeine Problem um vieles verwickelter als im Torsionsfalle. Doch gibt es eine wichtige Klasse von torsionsfreien Gruppen, auf die sich, obwohl sie keine Zyklensummen sind, dennoch die Beaumontschen Resultate unmittelbar übertragen lassen, nämlich die vollständigen torsionsfreien Gruppen. In der Tat, wähle man in der vollständigen torsionsfreien Gruppe G ein maximales unabhängiges Elementsystem, $S=(a_\alpha)$, und definiere die Multiplikation der Elemente a_α durch

$$a_\mu a_\nu = \sum_\alpha u_{\mu\nu\alpha} a_\alpha, \tag{11}$$

wo $u_{\mu\nu\alpha}$ *rationale* Zahlen sind (nach der vorausgesetzten Torsionsfreiheit besitzt die Multiplikation mit rationalen Zahlen in vollständigen Gruppen einen wohldefinierten Sinn), die den folgenden Bedingungen genügen:

(i) *für feste* μ, ν *ist* $u_{\mu\nu\alpha}=0$ *für fast alle* α;

(ii) *für feste* μ, ν, σ, τ *gilt*[16])

$$\sum_\alpha u_{\mu\nu\alpha} u_{\alpha\sigma\tau} = \sum_\alpha u_{\nu\sigma\alpha} u_{\mu\alpha\tau}.$$

Sind nun $u_{\mu\nu\alpha}$ den Bedingungen (i) und (ii) genügende rationale Zahlen, so wird G zu einem Ring, wenn wir die Multiplikation in G (in der durch (11) und die Distributivgesetze schon eindeutig bestimmten Weise) folgendermaßen ausführen: zuerst stellen wir die gegebenen Elemente $x, y \in G$ in der eindeutigen Form $x=\sum_\mu v_\mu a_\mu$, $y=\sum_\nu w_\nu a_\nu$ mit rationalen Zahlen v_μ, w_ν (die fast alle verschwinden) dar und setzen:

$$xy=\left(\sum_\mu v_\mu a_\mu\right)\left(\sum_\nu w_\nu a_\nu\right)=\sum_\mu\sum_\nu\sum_\alpha u_{\mu\nu\alpha} v_\mu w_\nu a_\alpha. \tag{12}$$

Es ist leicht einzusehen, daß wir auf diese Weise tatsächlich einen auf G aufgebauten Ring konstruiert haben:

Satz 3. *Alle, auf einer vollständigen torsionsfreien Gruppe G aufgebauten Ringe lassen sich mittels eines maximalen unabhängigen Elementsystems* $S=(a_\alpha)$ *in G folgendermaßen angeben: man wähle rationale Zahlen* $u_{\mu\nu\alpha}$ *mit den Eigenschaften* (i) *und* (ii), *und definiere die Multiplikation durch* (12).

Obwohl es sehr schwer zu sein scheint, über alle auf einer beliebigen torsionfreien Gruppe aufgebauten Ringe eine volle Übersicht zu bekommen, können wir einen engen Zusammenhang zwischen den torsionsfreien Ringen und den vollständigen torsionsfreien Ringen feststellen, der das Erreichen der erwähnten Übersicht möglicherweise erleichtern wird.

Bekanntlich läßt sich jede (torsionsfreie) Gruppe in eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte minimale vollständige (torsionsfreie) Gruppe einbetten.

[16]) Dies folgt aus dem Assoziativgesetz der Multiplikation.

Ist nun R ein beliebiger torsionsfreier Ring und führt man diese Einbettung der additiven Gruppe R^+ von R aus, so bekommt man eine vollständige torsionsfreie Gruppe S^+, die zu einem Ring S wird, wenn die Multiplikation der Elemente $c, d \in S$ folgendermaßen definiert wird: nach der Definition von S^+ gibt es ganze rationale Zahlen m, n und Elemente $a, b \in R$ mit $mc = a$, $nd = b$, daher wird

$$cd = \frac{1}{m} a \cdot \frac{1}{n} b = \frac{1}{mn} ab$$

wegen der Torsionsfreiheit ein wohlbestimmtes Element von S sein. Es ist evident, daß wir dadurch tatsächlich einen Ring S definiert haben, der zusammen mit R kommutativ oder nichtkommutativ ist. Es ist auch klar, daß das eventuell vorhandene Einselement e von R sich zugleich als Einselement für S erweist.

Jedes Ideal A von R erzeugt in S ein Ideal A', sein Erweiterungsideal, und umgekehrt ist der Durchschnitt $A' \cap R$ eines Ideals A' von S mit R stets ein Ideal in R, das Verengungsideal von A'; dies ist nach dem Ergebnis von H. GRELL [4] eine ein-eindeutige Zuordnung der ausgezeichneten Ideale. Es gibt aber in diesem Falle auch eine andere wichtige Zuordnung von Idealen, nämlich die der Servanzideale: jedes Ideal A von R erzeugt in S ein Servanzideal A^* und der Durchschnitt $A^* \cap R$ ist ein Servanzideal von R (das sich auch als das durch A erzeugte Servanzideal von R definieren läßt). Diese Zuordnung der Servanzideale fällt mit der Grellschen Zuordnung zusammen, falls R ein Einselement besitzt, denn die Existenz eines Einselements in S zieht den Servanz-Charakter jedes Ideals in S nach sich.

Die Servanzideale spielen in torsionsfreien Ringen eine wichtige Rolle, wie dies aus den folgenden Überlegungen erhellt.

Es sei I ein nilpotentes (Links-, Rechts-) Ideal in R; $I^k = 0$. Dann ist auch das von I erzeugte Servanzideal J von R nilpotent. In der Tat folgt aus dem Verschwinden aller Produkte $a_1 a_2 \dots a_k$ $(a_i \in I)$ das aller Produkte $b_1 b_2 \dots b_k = \frac{1}{n_1} a_1 \cdot \frac{1}{n_2} a_2 \dots \frac{1}{n_k} a_k = \frac{1}{n_1 n_2 \dots n_k} a_1 a_2 \dots a_k$ $(b_i \in J$, n_i ganze rationale Zahlen $\neq 0)$, d. h. $J^k = 0$. Daraus ergibt sich unmittelbar: *das Radikal N eines torsionsfreien Ringes R* (d. h. die Vereinigung aller nilpotenten Linksideale) *ist ein Servanzideal in R*. Bei der erwähnten Zuordnung der Servanzideale von R und von S entspricht dem Radikal N von R das Radikal N^* von S. — Dasselbe gilt, wenn wir unter dem Radikal die Vereinigung aller Nilideale verstehen. Es sei noch bemerkt, daß das Jacobsonsche Radikal nicht mehr ein Servanzideal zu sein braucht. (Beispiel: der Ring aller rationalen Zahlen mit ungeradem Nenner.)

Es folgt mühelos, daß das annullierende Linksideal L eines beliebigen Elementes x von R (d. h. die Gesamtheit aller $a \in R$ mit $ax = 0$) ein Servanzideal ist.

Es ist leicht zu schließen, daß das Bestehen der Maximal- oder der Minimalbedingung für die Linksideale von R dasselbe für S nach sich zieht. Dieselbe Behauptung, sowie ihre Umkehrung gilt für die Servanzideale.

Zunächst nehmen wir an, daß R ein Einselement enthält.[17]) Dann gibt es bekanntlich zu jedem Linksideal ein dieses enthaltendes maximales Linksideal. Die additive Gruppe eines maximalen Linksideals M besitzt nun die Eigenschaft: *Sie ist entweder eine Servanzuntergruppe oder fällt zwischen pR und R für irgendeine Primzahl p.* In der Tat, ist M keine Servanzuntergruppe in R, so ist die von M erzeugte Servanzuntergruppe $\overline{M}$ ein M umfassendes Linksideal, d. h. $\overline{M}=R$. In diesem Falle gibt es eine Primzahl p mit der Eigenschaft, daß die Gesamtheit N aller $x\in R$ mit $px\in M$ das Linksideal M echt enthält, $N\supset M$. Da N ebenfalls ein Linksideal ist, muß $N=R$ sein, woraus $pN\subseteq M$ folgt, w. z. b. w.

§ 6. Die additive Gruppe eines einfachen Ringes.

Jetzt gehen wir auf das andere Problem über und suchen zuerst eine notwendige und hinreichende Bedingung, daß eine abelsche Gruppe die additive Gruppe eines einfachen Ringes sei. Dabei ist die Einfachheit in dem Sinne zu verstehen, daß der Ring kein nichttriviales Ideal enthält (die Minimalbedingung für die Linksideale wird daher nicht gefordert).

Es sei nun R ein einfacher Ring. Dann stimmt das Ideal pR für jede Primzahl p mit 0 oder R überein. Tritt der erste Fall für ein p auf, $pR=0$, so muß R die direkte Summe von zyklischen Gruppen der Ordnung p sein. Im entgegengesetzten Fall ist R vollständig und somit die direkte Summe von rationalen und quasizyklischen Gruppen. Quasizyklische Gruppen können aber hier nicht vorkommen, denn anderenfalls wäre für mindestens ein p das Ideal $R[p]$ ein nichttriviales. Dies beweist die eine Hälfte des Satzes: ·

Satz 4. *Auf einer abelschen Gruppe G läßt sich dann und nur dann ein einfacher Ring aufbauen, wenn sie eine der folgenden Strukturen besitzt:*

$$G=\sum_{\mathfrak{m}}\mathcal{C}(p) \quad \textit{oder} \quad G=\sum_{\mathfrak{m}}\mathfrak{R}, \tag{13}$$

wo $\mathfrak{m}$ eine beliebige (endliche oder unendliche) Kardinalzahl bezeichnet.

Um auch den übrigbleibenden Teil der Behauptung zu beweisen, beachte man, daß sich auf einer Gruppe G der Gestalt (13) sogar ein Körper konstruieren läßt. In der Tat besitzt die additive Gruppe einer algebraischen Erweiterung vom Grade n des Primkörpers P die Form $\sum_{n}\mathcal{C}(p)$ bzw. $\sum_{n}\mathfrak{R}$, und die einer transzendenten Erweiterung vom Transzendenzgrad $\mathfrak{m}(\geqq\aleph_0)$ die Form $\sum_{\mathfrak{m}}\mathcal{C}(p)$ bzw. $\sum_{\mathfrak{m}}\mathfrak{R}$, je nachdem die Charakteristik von P die Primzahl p oder Null ist. Q. e. d.

[17]) Es genügt hier, das Vorhandensein eines Rechtseinselementes anzunehmen.

§ 7. Die additive Gruppe von Artinschen Ringen.

Unter einem Artinschen Ring verstehen wir einen Ring, dessen Linksideale der Minimalbedingung genügen. Ist nun R ein Artinscher Ring, so gibt es unter den Idealen nR ein minimales $mR=A$. Dieses genügt $pA=A$ für jede Primzahl p, somit ist A vollständig und daher ein direkter Summand von R: $R=A+B$.[18]) Hier muß (wegen $A+mB=mA+mB=mR=A$) $mB=0$ gelten. Die Torsionsuntergruppe T von A gehört zum Annullator von R, somit sind die Untergruppen von T Ideale von R. Infolge der vorausgesetzten Minimalbedingung kann T nur endlich viele Untergruppen von Primzahlordnung enthalten, somit ist A (als vollständige Gruppe) die direkte Summe von rationalen und endlich vielen quasizyklischen Gruppen. Ferner ist B (als eine Gruppe mit Elementen von beschränkter Ordnung) die direkte Summe von zyklischen Gruppen, deren Ordnungen Teiler von m sind:[19])

$$R=\sum_{\mathfrak{m}}\mathfrak{R}+\sum_{\text{endlich}}\mathcal{C}(p_i^{\infty})+\sum_{\mathfrak{n}}\mathcal{C}(p_i^{k_i}) \qquad (p_i^{k_i}\mid m). \tag{14}$$

Umgekehrt können wir auf jeder Gruppe, die in der Form (14) zerlegt werden kann ($\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ können beliebige Kardinalzahlen sein), einen Artinschen Ring aufbauen, und zwar folgendermaßen. Auf dem Summand $\sum_{\mathfrak{m}}\mathfrak{R}$ bauen wir einen Körper, auf $\sum\mathcal{C}(p_i^{\infty})$ einen Zeroring auf; im dritten Summand $\sum\mathcal{C}(p_i^{k_i})$ fassen wir die zyklischen Gruppen von derselben Ordnung p^k zusammen und bauen dann auf jeder von den so entstandenen Gruppen einen Ring mit endlich vielen Linksidealen (vgl. den nachstehenden Satz 6). Daraus schließt man:

Satz 5. *Auf einer abelschen Gruppe läßt sich dann und nur dann ein Artinscher Ring aufbauen, falls sie die Form* (14) *besitzt.*[20])

Es sei bemerkt, daß aus dem Beweis folgt, daß sich dasselbe Resultat ergibt, wenn die Minimalbedingung nur für die zweiseitigen Ideale gefordert wird.

Zur Vervollständigung des Beweises von Satz 5 fehlt noch:

Satz 6. *Ist G die direkte Summe von zyklischen Gruppen derselben Ordnung p^k, $G=\sum_{\mathfrak{m}}\mathcal{C}(p^k)$, so läßt sich auf ihr ein (ja sogar kommutativer) Ring mit endlich vielen Linksidealen aufbauen.*

Diese Behauptung ist für endliches $\mathfrak{m}$ trivial, während der Beweis für $\mathfrak{m}\geqq\aleph_0$ aus den folgenden Hilfssätzen folgt. (Mit $R\langle x\rangle$ werden wir den Ring

[18]) Es sei hier betont, daß direkte Summenzerlegungen jeweils im gruppentheoretischen Sinne zu verstehen sind.

[19]) Die direkte Summenzerlegung $R=A+B$ gilt auch im ringtheoretischen Sinne, falls A torsionsfrei ist; in diesem Falle muß nämlich A ein Ideal von R sein.

[20]) Der Teil „nur dann" dieses Satzes war schon T. Szele bekannt.

aller formalen Potenzreihen

$$f(x)=a_{-m}x^{-m}+\cdots+a_{-1}x^{-1}+a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

über dem Ring R, d. h. mit $a_i\in R$, bezeichnen.)

Hilfssatz 1. Es sei R ein Ring mit Einselement 1, der die folgenden Eigenschaften besitzt: 1) er ist die direkte Summe von zyklischen Gruppen derselben Ordnung p^k; 2) $R, pR, \ldots, p^kR$ erschöpfen alle seine Linksideale. — Dann hat auch $S=R\langle x\rangle$ die beiden Eigenschaften 1), 2).

Aus der Form der Elemente von S folgt, daß S^+ die direkte Summe der diskret und der vollständig direkten Summe von je abzählbar vielen Exemplaren der additiven Gruppe R^+ des Ringes R ist. Diese Tatsache bestätigt 1) für S.

Um auch das Erfülltsein von 2) zu beweisen, zeigen wir, daß jedes Linkshauptideal $L=(g(x))_l\neq 0$ mit einem von $R, pR, \ldots, p^{k-1}R$ übereinstimmt. Wir zerlegen $g(x)$ folgendermaßen:

$$g(x)=p^{k-1}g_{k-1}(x)+\ldots+p^sg_s(x)\quad(0\leqq s\leqq k-1,\ g_s(x)\neq 0), \tag{15}$$

wo kein nichtverschwindender Koeffizient von $g_i(x)$ durch p teilbar ist und keine Potenz von x in zwei $g_i(x)$ vorkommt. Da diese Forderungen die Eindeutigkeit von (15) sichern, können wir (15) die *kanonische Zerlegung* von $g(x)$ nennen. Aus (15) ergibt sich $p^{k-s-1}g(x)=p^{k-1}g_s(x)(\in L)$. Es folgt aus direkter Berechnung der Koeffizienten der formalen Potenzreihe $h_s(x)$, daß es ein $h_s(x)$ mit $h_s(x)g_s(x)\equiv 1 \pmod{pS}$ gibt,[21]) d. h. $h_s(x)g_s(x)=1+pf_s(x)$ für ein $f_s(x)\in S$. Dann gehört wegen $p^{k-1}h_s(x)g_s(x)=p^{k-1}$ das Linksideal $p^{k-1}S$ zu L, $p^{k-1}S\subseteq L$. Ist $s\leqq k-2$, so folgt aus $p^{k-s-2}g(x)=p^{k-1}g_{s+1}(x)+$ $+p^{k-2}g_s(x)\in L$ und aus dem Bewiesenen, daß $p^{k-2}g_s(x)\in L$, und somit $p^{k-2}h_s(x)g_s(x)=p^{k-2}+p^{k-1}f_s(x)\in L$, $p^{k-2}\notin L$, d. h. $p^{k-2}S\subseteq L$. So fortschreitend erhält man zum Schluß $p^sS\subseteq L$, und da $g(x)=p^s(\ldots+g_s(x))\in p^sS$, gelangt man zu $L=p^sS$.

Hilfssatz 2. Für jede unendliche Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ gibt es einen Ring S mit Einselement, dessen Mächtigkeit nicht kleiner als $\mathfrak{m}$ ist und der den Bedingungen 1)—2) in Hilfssatz 1 genügt.

Es sei R der Restklassenring der ganzen rationalen Zahlen modulo p^k und x_α seien Unbestimmten, wo α eine Indexmenge der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ durchläuft. Wir betrachten den Ring $S=R\langle\ldots,x_\alpha,\ldots\rangle$ der formalen Potenzreihen über R mit den Unbestimmten x_α (die x_α sind vertauschbar und jede formale Potenzreihe enthält nur *endlich viele* x_α). Es ist klar, daß die Mächtigkeit und die additive Struktur von S der Forderung genügt, ferner folgt — durch endlich vielmalige Anwendung von Hilfssatz 1 —, daß das durch die formale Potenzreihe $g(\ldots,x_\alpha,\ldots)=g(x_{\alpha_1},\ldots,x_{\alpha_s})$ erzeugte Linksideal von der Form p^sS ist, w. z. z. w.

---

[21]) Dies folgt übrigens auch aus der bekannten Tatsache, daß ein Ring (hier S/pS) aller formalen Potenzreihen über einem Körper (R/pR) selbst ein Körper ist.

Hilfssatz 3. Für jede unendliche Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ gibt es einen Ring $R = \sum_{\mathfrak{m}} \mathcal{C}(p^k)$, der kein Linksideal außer $R, pR, \ldots, p^kR = 0$ besitzt.

Zu der gegebenen Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ nehmen wir einen Ring S, der in Hilfssatz 2 definiert ist. Wir wählen in S eine beliebige, das Einselement enthaltende Untermenge der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ und betrachten den von ihr erzeugten Unterring T_0. Wir können annehmen, daß die Elemente von S formale Potenzreihen $g(\ldots, x_\alpha, \ldots) = g(x)$ über dem Restklassenring des Ringes der ganzen Zahlen mod p^k sind. Dann stellen wir jedes Element $g(x) \in T_0$ in der kanonischen Form (15) dar, bestimmen ein $h_s(x)$ mit $h_s(x)g_s(x) \equiv 1 \pmod{pS}$ und danach $f_s(x)$ durch $h_s(x)g_s(x) = 1 + pf_s(x)$. Die Menge aller $g_{k-1}(x), \ldots, g_s(x), h_s(x), f_s(x)$ erzeugt einen T_0 umfassenden Ring T_1. Die Wiederholung dieses Verfahrens mit den Elementen von T_1 führt zu einem noch größeren Unterring T_2 von S usw. Nun sei R die Vereinigung der aufsteigenden Kette von Unterringen $T_0 \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq \ldots$ Offenbar ist R ein Ring der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ (jeder Ring T_i hat die Mächtigkeit $\mathfrak{m}$). Aus der Konstruktion folgt, daß $g(x) \in T_{n+1}$, falls $p^s g(x) \in T_n$, also ist R ein Servanzunterring von S, d. h. R besitzt die erwünschte additive Struktur. Endlich folgt die Behauptung über die Linksideale von R aus dem Beweis von Hilfssatz 1, sowie aus der Tatsache, daß alle, dort auftretenden formalen Potenzreihen nach der Definition von R zu R gehören müssen.

Damit ist der Beweis von Satz 6 zu Ende geführt.

§ 8. Die additive Gruppe von halbeinfachen und Neumannschen Ringen.

Um auch die additive Struktur von halbeinfachen Ringen (d. h. Artinschen Ringen ohne Radikal) unabhängig von dem Wedderburn—Artinschen Struktursatz kennen zu lernen, vergleichen wir die Resultate des vorigen Paragraphen mit der in § 10 zu beweisenden Tatsache, daß pa ein nilpotentes Ideal in R erzeugt, wenn $a \in R$ die Ordnung p^κ besitzt. Also gibt es in einem halbeinfachen Ring kein Element von nicht-quadratfreier endlicher Ordnung.

Satz 7. *Auf einer abelschen Gruppe G läßt sich genau dann ein halbeinfacher Ring aufbauen, wenn sie die Form*

$$G = \sum_{\mathfrak{m}} \mathfrak{R} + \sum_{\mathfrak{n}_1} \mathcal{C}(p_1) + \ldots + \sum_{\mathfrak{n}_s} \mathcal{C}(p_s) \tag{16}$$

besitzt, wo $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_s$ beliebige Kardinalzahlen sind.

Daß sich auf G tatsächlich ein halbeinfacher Ring aufbauen läßt, folgt unmittelbar aus Satz 4.

Eine wichtige Verallgemeinerung des Begriffes von halbeinfachen Ringen ist der des regulären Ringes mit Einselement, eingeführt von J. NEUMANN [7]; wir werden einen solchen Ring als *Neumannschen Ring* bezeichnen. Da es zu jedem Element a definitionsgemäß ein x mit $axa = a$ gibt, schließt man aus einer Teilbarkeitsrelation $p^k | a$, daß auch $p^{2k} | axa = a$. Mithin ist jedes Element a eines Neumannschen Ringes R entweder durch p unteilbar oder durch jede Potenz von p teilbar. Ferner enthält R keine Untergruppe vom Typ p^∞, da die Vereinigung solcher Untergruppen ein Ideal von R ist, wo das Produkt von je zwei Elementen verschwindet, d. h. $(ax)a$ stets 0 ausfällt. Aus dem Gesagten ergibt sich, daß jede p-Komponente T_p der Torsionsuntergruppe T von R die Form $\sum \mathcal{C}(p)$ besitzt. p-Komponenten von dieser Art sind stets direkte Summanden (da sie Servanzuntergruppen sind), somit gilt für jedes p die direkte Zerlegung $B = T_p + B_p$, wo B eine Gruppe mit $R = A + B$ ist (A ist die maximale vollständige Untergruppe von R). Hier müssen alle Elemente von B_p durch p teilbar sein, weil nach dem Obigen pb ($b \in B_p$) nicht nur durch p, sondern auch durch p^2 teilbar ist: $pb = p^2 c$, wo ohne Einschränkung der Allgemeinheit $c \in B_p$ angenommen werden kann. Aus $p(b - pc) = 0$ ergibt sich $b = pc$ (B_p enthält keine Elemente der Ordnung p). Nun ist im Durchschnitt aller B_p (p durchläuft die Primzahlen) jedes Element durch jede p teilbar, d. h. $\bigcap_p B_p$ eine vollständige Gruppe und somit gleich Null.

Der Faktorring R/T ist offenbar ein torsionsfreier Neumannscher Ring. Dieser muß vollständig sein, da pa und somit auch a durch jede hohe Potenz von p teilbar ist.

Jetzt sind wir in der Lage zu beweisen, daß B einer interdirekten Summe[22]) der T_p isomorph ist. Wir betrachten die Endomorphismen $\varepsilon_p B = T_p$. Offenbar gilt: $\varepsilon_p \varepsilon_q = \varepsilon_p$ oder 0, je nachdem $p = q$ oder $p \neq q$ ist. Gibt es ein $b \in B$ mit $\varepsilon_p b = 0$ für alle p, so gehört b zu jedem B_p, woraus $b = 0$ folgt. Damit ist die folgende Behauptung bewiesen:

Satz 8. *Jeder Neumannsche Ring R besitzt die folgende Struktur:*

$$R = \sum_{\mathfrak{m}} \mathfrak{R} + \sum{}^{*} \left(\sum_{n_p} \mathcal{C}(p) \right), \tag{17}$$

wo der Stern anzeigt, daß eine solche interdirekte Summe zu nehmen ist, deren Faktorgruppe nach der diskret direkten Summe vollständig ist.

Die Umkehrung, d. h. die Frage, ob sich auf jeder Gruppe der Form (17) tatsächlich ein Neumannscher Ring aufbauen läßt, ist noch offen geblieben. Ich konnte nur zeigen, daß sich auf der vollständig direkten Summe stets ein Neumannscher Ring aufbauen läßt, und zwar folgendermaßen: auf den Gruppen $\sum \mathfrak{R}$ und $\sum \mathcal{C}(p)$ bauen wir je einen Körper auf und dann nehmen

[22]) Eine interdirekte Summe ist als eine Zwischengruppe der diskret direkten und der vollständig direkten Summen definiert. Für die Definition s. T. SZELE—J. SZENDREI [15].

wir ihre vollständig direkte Summe. Der so entstandene Ring ist ein Neumannscher, da ein zu $a = \sum_i a_i$ gehöriges Element x mit $axa = a$ durch $x = \sum_i x_i$ gegeben werden kann, wo x_i das Reziproke von a_i im i-ten Körper $\sum \mathcal{C}(p_i)$ bedeutet.

Es sei noch erwähnt, daß in (17) die interdirekte Summe nur im Falle von endlich vielen p-Komponenten mit der diskret direkten Summe übereinstimmen kann, da andernfalls der Ring kein Einselement besitzen kann.

§ 9. Die additive Gruppe von Ringen mit Maximal- oder abgeschwächter Minimalbedingung.

Zunächst betrachten wir einen Ring R mit Maximalbedingung für Linksideale. Unter den Idealen $R[n]$ gibt es ein maximales, z. B. $R[m]$. Dann muß der Torsionsunterring T von R durch m annulliert werden, $mT = 0$. Also ist T ein direkter Summand von R und hat die Gestalt: $\sum \mathcal{C}(p_i^{k_i})$ mit $p_i^{k_i} | m$. (In der direkten Zerlegung $R = S + T$ ist T ein Ideal, aber S braucht nicht einmal ein Unterring zu sein.)

Satz 9. *Auf einer Torsionsgruppe G läßt sich dann und nur dann ein Ring mit Maximalbedingung für (Links-) Ideale konstruieren, wenn*

$$G = \sum \mathcal{C}(p_i^{k_i}) \qquad \text{mit } p_i^{k_i} | m$$

gilt. Für gemischte Gruppen ist eine notwendige Bedingung, daß ihre Torsionsuntergruppe ein direkter Summand von dieser Form sei.

Es fehlt noch der Beweis des Teiles „dann". Dies ist aber eine unmittelbare Folge von Satz 6 in § 7.

Ein Vergleich der Sätze 5 und 9 ergibt, daß *sich auf einer Gruppe G dann und nur dann ein Ring mit Maximal- und Minimalbedingung aufbauen läßt, wenn G die Form $\sum \mathcal{R} + \sum \mathcal{C}(p_i^{k_i})$ $(p_i^{k_i} | m)$ besitzt.*

In der Idealtheorie kommutativer Ringe spielen die Ringe mit abgeschwächter Minimalbedingung eine wichtige Rolle; dashalb betrachten wir jetzt solche Ringe. Es sei nun R ein (nicht notwendig kommutativer) Ring mit abgeschwächter Minimalbedingung für (Links-) Ideale, d. h. es gelte modulo jedem von Null verschiedenen Ideal die Minimalbedingung für (Links-) Ideale. Ist R kein torsionsfreier Ring, so besitzt er z. B. Elemente der Ordnung p. Dann ist $R[p]$ ein von Null verschiedenes Ideal und daher $R/R[p]$ ein Artinscher Ring, dessen additive Struktur nach § 7 völlig bekannt ist. Wählt man m so, daß $m(R/R[p])$ vollständig sei, dann ist für $n = mp$ der Ring nR vollständig, und somit besitzt R die Gestalt (14). Dies zusammen mit Satz 5 beweist den

Satz 10. *Damit man auf einer nicht-torsionsfreien Gruppe G einen Ring mit abgeschwächter Minimalbedingung für (Links-) Ideale aufbauen könne, ist es notwendig und hinreichend, daß G von der Form* (14) *sei.*

Für den torsionsfreien Fall können wir ein notwendiges Kriterium feststellen.

Satz 11. *Auf einer torsionsfreien Gruppe G läßt sich nur in dem Falle ein Ring mit abgeschwächter Minimalbedingung für (Links-) Ideale aufbauen, wenn alle ihre Elemente denselben Typ der Form $(k_1, k_2, \ldots)$ mit $k_i = 0$ oder $k_i = \infty$ besitzen.*

Zum Beweis nehmen wir zuerst an, daß das größte vollständige Ideal A von R von Null verschieden ist. Da R/A jetzt ein torsionsfreier Artinscher Ring ist, ist wegen Satz 5 auch R/A vollständig, d. h. R ist vollständig und alle seine Elemente besitzen den Typ $(\infty, \infty, \infty, \ldots)$. — Gibt es in R kein nichtverschwindendes vollständiges Ideal, so betrachten wir die Durchschnitte der Form $\bigcap_{i,k} p_i^k R = B$. Nun ist das Ideal B entweder Null, oder es gilt nach ihm die Minimalbedingung für Linksideale. Daraus schließt man unmittelbar, daß in R kein Element vom Typ $(k_1, k_2, \ldots)$ mit unendlich vielen endlichen $k_i > 0$ vorhanden ist. Es folgt ferner, daß keine Primzahl p mit endlichem und unendlichem Exponenten unter den Typen verschiedener Elemente vorkommt, da andernfalls $R \supset pR \supset p^2R \supset \ldots$ eine unendliche absteigende Kette von Idealen mit $R \cap pR \cap p^2R \cap \ldots \neq 0$ wäre, was der abgeschwächten Minimalbedingung widerspricht. Deshalb erhält man, daß jeder Typ von derselben Form $(k_1, k_2, \ldots)$ mit $k_i = 0$ oder $k_i = \infty$ sein soll, w. z. b. w.

Ob man auf jeder torsionsfreien Gruppe mit einem einzigen Typ der erwähnten Form tatsächlich einen Ring mit abgeschwächter Minimalbedingung konstruieren kann, ist eine offene Frage. Es sei nur erwähnt, daß der Ring derjenigen rationalen Zahlen, deren Nenner zu einer vorgeschriebenen Primzahlmenge relativ prim ist, zeigt, daß zu jedem Typ $(k_1, k_2, \ldots)$ mit $k_i = 0$ oder $k_i = \infty$ tatsächlich ein Ring mit abgeschwächter Minimalbedingung existiert.

Die Überlegungen dieses und des vorigen Paragraphen zeigen die interessante Tatsache, daß die Maximalbedingung für Torsionsringe eine tiefere Wirkung auf die additive Struktur ausübt, als die abgeschwächte Minimalbedingung, während es bei torsionsfreien Ringen eben umgekehrt zu sein scheint.

§ 10. Die additive Gruppe von Ringen ohne nilpotente Linksideale.

Es sei R ein beliebiger Ring. Hat ein Element a in R die Ordnung p^k, so erzeugt pa in R ein nilpotentes Linksideal, da für beliebige $x_i \in R$ oder ganze rationale x_i

$$(x_1 pa)(x_2 pa)\dots(x_k pa) = (x_1 a x_2 a \dots a x_k)(p^k a) = 0$$

ist. Also enthält ein R ohne nilpotente Linksideale kein Element von nichtquadratfreier endlicher Ordnung, d. h. der Torsionsunterring von R (falls R ein Torsionsring ist, er selbst) besitzt die Gestalt: $\sum_p \sum_{n_p} \mathcal{C}(p)$. Dies liefert eine vollständige Übersicht über die additive Struktur von Torsionsringen ohne nilpotente Linksideale, da sich auf einer jeden Gruppe vom letzterwähnten Typ eine direkte Summe von Körpern von Primzahlcharakteristik aufbauen läßt:

Satz 12. *Auf einer Torsionsgruppe kann man einen Ring ohne nilpotente Ideale genau dann aufbauen, wenn sie nur Elemente von quadratfreier Ordnung enthält, d. h. eine sog. elementare abelsche Gruppe ist.*

Eine Verallgemeinerung dieses Satzes ist der folgende

Satz 13. *Das Radikal N eines Torsionsringes R enthält den Durchschnitt aller pR, wenn p alle Primzahlen durchläuft. Auf jeder Torsionsgruppe läßt sich ein Ring aufbauen, dessen Radikal genau mit $\bigcap_p pR$ zusammenfällt.*

Aus dem vorher Gesagten folgt gleich, daß pR_p zum Radikal N von R gehört, wo R_p die p-Komponente des Torsionsringes R bedeutet. Die Vereinigung aller pR_p stimmt aber genau mit $\bigcap_p pR$ überein. — Um die zweite Hälfte der Behauptung einzusehen, nehmen wir eine Basisuntergruppe B_p in jedem R_p und bezeichnen mit $a_\alpha^{(p)}$ $(\alpha \in I_p)$ eine Basis von B_p. Wir setzen: $a_\alpha^{(p)} a_\beta^{(p)} = 0$ bzw. $= a_\alpha^{(p)}$, je nachdem $\alpha \neq \beta$ oder $\alpha = \beta$ ist. Dadurch ist nach § 4 ein Ring mit der additiven Gruppe R_p erklärt. Wir sahen in § 4, daß jedem Element x von R_p eine (i. a. unendliche) Summe $x \to \sum_\alpha^* n_\alpha a_\alpha$ zugeordnet werden kann, die sich hinsichtlich Multiplikation ebenso verhält wie x. Es folgt, daß bei dieser Zuordnung im betrachteten Falle dem Element x^k die Summe $\sum_\alpha^* n_\alpha^k a_\alpha$ entspricht, und dies zeigt, daß x^k nur in dem Falle verschwinden kann, wenn alle Koeffizienten n_α und somit x selbst durch p teilbar sind. [13]) Damit ist bewiesen, daß im betrachteten Beispiel das Radikal kein Element außer denen von $\bigcap_p pR$ enthalten kann, q. e. d.

Bemerkenswert ist die interessante Tatsache, daß $\bigcap_p pR$ genau mit der Frattinischen Untergruppe von R übereinstimmt. [23])

[23]) Vgl. Arbeit [2], wo gezeigt wird, daß in Ringen mit einseitigem Einselement das Jacobsonsche Radikal der Frattinischen Untergruppe der als Operatorgruppe aufgefaßten additiven Gruppe entspricht.

§ 11. Die additive Gruppe von Ringen ohne Annullatoren.

Es sei R ein p-Ring. Jedes Element a von unendlicher Höhe ist ein Rechts- und Linksannullator des Ringes R (vgl. Haupthilfssatz, (xii)). Folglich ist das Ideal, bestehend aus allen Elementen von R von unendlicher Höhe, stets ein Annullator des Ringes. Also besitzt kein p-Ring ohne Annullatoren Elemente von unendlicher Höhe. — Ist nun eine beliebige p-Gruppe G ohne Elemente von unendlicher Höhe gegeben, so läßt sich nach dem Muster des Beispiels des vorigen Paragraphen auf G ein Ring ohne Annullatoren konstruieren. Ist nämlich die Multiplikation der Basiselemente a_α einer Basisuntergruppe B von G wie dort durch $a_\alpha a_\beta = \delta_{\alpha\beta} a_\alpha$ ($\delta_{\alpha\beta}$ = das Kroneckersche Symbol) definiert, so läßt sich zu jedem von Null verschiedenen Element b von G ein a_α finden, so daß $a_\alpha b \neq 0$. In der Tat, sei dem Element b die formale Summe $\sum^* n_\alpha a_\alpha$ zugeordnet; da $b \neq 0$ von endlicher Höhe ist, gibt es hier nichtverschwindende Glieder $n_\alpha a_\alpha$.[24]) Dann kann a_α als das gesuchte Element gewählt werden.

Da das Gesagte ersichtlich nicht nur für p-Ringe, sondern auch für Torsionsringe gilt, ergibt sich unmittelbar:

Satz 14. *Auf einer Torsionsgruppe G läßt sich genau dann ein Ring ohne Annullatoren aufbauen, wenn G keine Elemente von unendlicher Höhe besitzt.*

Es folgt ferner, daß G dann und nur dann eine Nilgruppe ist, wenn ihre Basisuntergruppe 0 ist, d. h.

Satz 15 (Szele). *Eine Torsionsgruppe ist genau dann eine Nilgruppe, wenn sie vollständig ist.*[25])

§ 12. Ringe mit idempotenten Elementen und die mit Einselement.

Es sei f ein idempotentes Element eines Ringes R. Wegen $f^2 = f$ folgt aus $n \mid f$, daß auch $n^2 \mid f$ gilt, also ist f durch keine oder jede Potenz der Primzahl p (p beliebig) teilbar. Ist nun f von der endlichen Ordnung $n = p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$, so läßt sich f in der Form $f = f_1 + \dots + f_k$ schreiben, wo $O(f_i) = p_i^{r_i}$ ($i = 1, \dots, k$), $f_i^2 = f_i$ und f_i die Höhe 0 besitzt. Ist f von unendlicher Ordnung, so folgt aus dem Gesagten, daß f die Charakteristik $(k_1, k_2, \dots)$ mit $k_i = 0$ oder $k_i = \infty$ hat.

Zunächst sei e ein Linkseinselement im Ringe R. Dann schließt man aus $ne = 0$, daß $na = nea = 0$ für jedes $a \in R$ gilt. Dies beweist die (wohlbekannte) erste Hälfte des folgenden Satzes.

---

[24]) Vgl. Fußnote [15]).

[25]) T. Szele [11].

Satz 16. *Ein Torsionsring mit Linkseinselement hat die Struktur* $\sum_{\nu}\{a_\nu\}$ *mit* $O(a_\nu)\,|\,n$ *für festes* n. *Ist, umgekehrt,* G *eine Gruppe von dieser Gestalt, so läßt sich auf ihr ein Ring mit Einselement aufbauen.*

Um die zweite Behauptung zu bestätigen, wähle man in G ein Element e von maximaler Ordnung n. Die Gruppentheorie lehrt, daß eine direkte Summenzerlegung $G=\{e\}+H$ existiert. Nun bleibt bloß $ex=xe=x$ für jedes $x\in G$ und $yz=0$ für alle $y,\ z\in H$ zu setzen, um G zu einem Ring mit Einselement zu machen. Q. e. d.

Auch in Nichttorsionsringen R können wir von einem Linkseinselement e etwas feststellen Trivialerweise ist e von unendlicher Ordnung. Ferner folgt aus $n|e$, daß $n|ea=a$ für jedes $a\in R$, somit ist die Charakteristik von e die kleinste unter allen Charakteristiken in R. Bemerkt sei, daß jede beliebige Einheit g in R — wegen der Existenz eines g' mit $gg'=e$ — dieselbe minimale Charakteristik wie e besitzt. Es folgt noch, daß im Falle $p|e$, R kein Element der Ordnung p enthält.

Literatur.

[1] R. A. Beaumont, Rings with additive group which is the direct sum of cyclic groups, *Duke Math. J.* **15** (1948), 367—369.

[2] L. Fuchs, A remark on the Jacobson radical, *Acta Sci. Math. Szeged* **14** (1952), 167—168.

[3] L. Fuchs, On the structure of abelian p-groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **4** (1953), 267—288.

[4] H. Grell, Beziehungen zwischen den Idealen verschiedener Ringe, *Math. Ann.* **97** (1927), 490—523.

[5] А. Г. Курош, Теория групп. Москва, 1953.

[6] Л. Я. Куликов, К теории абелевых групп произвольной мощности, Мат. Сборник **16** (58) (1945), 129—162.

[7] J. von Neumann, On regular rings, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **22** (1936), 707—713.

[8] L. Rédei und T. Szele, Die Ringe ersten Ranges, *Acta Sci. Math. Szeged* **12 A** (1950), 18—29.

[9] L. Rédei, Über die Ringe mit gegebenem Modul, *Acta Sci. Math. Szeged* **15** (1954), 251—254.

[10] T. Szele, Ein Analogon der Körpertheorie für Abelsche Gruppen, *Journ. f. reine u. angew. Math.* **188** (1950), 167—192.

[11] T. Szele, Zur Theorie der Zeroringe, *Math. Ann.* **121** (1949), 242—246.

[12] T. Szele, Gruppentheoretische Beziehungen bei gewissen Ringkonstruktionen, *Math. Z.* **54** (1951), 168—180.

[13] T. Szele, On the basic subgroups of abelian p-groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **5** (1954), 129—141.

[14] T. Szele, Nilpotent Artinian rings, *Publ. Math. Debrecen* **4** (1955), 71—78.

[15] T. Szele and J. Szendrei, On abelian groups with commutative endomorphism ring, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **2** (1951), 309—324.

(Eingegangen am 4. Dezember, 1955.)