Ein einfaches Beispiel direkt unzerlegbarer abelscher Gruppen.

Dem Andenken von T. Szele gewidmet

Von M. BOGNÁR in Budapest.

Im Herbst 1953 habe ich T. SZELE das folgende Beispiel direkt unzerlegbarer Gruppen gezeigt:

In der additiven Gruppe der komplexen Zahlen ist die Untergruppe, erzeugt durch die Zahlen

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \ldots, \frac{1}{3^n}, \ldots; \frac{i}{5}, \frac{i}{5^2}, \ldots, \frac{i}{5^n}, \ldots; \frac{1+i}{2},$$

eine direkt unzerlegbare torsionsfreie abelsche Gruppe zweiten Ranges.

T. SZELE hat mir damals das Problem aufgeworfen, direkt unzerlegbare abelsche Gruppen von höherem Range in ähnlicher Weise explizit anzugeben.

Zuerst ist es L. S. PONTRJAGIN gelungen, eine direkt unzerlegbare abelsche Gruppe vom Range 2 zu konstruieren [1]. Die Servanzuntergruppen der additiven Gruppe der ganzen p-adischen Zahlen sind bekannte Beispiele für direkt unzerlegbare abelsche Gruppen von beliebigem Range, der nicht größer als die Mächtigkeit des Kontinuums $\mathfrak{c}$ ist. (S. z. B. [2], S. 202.) Diese Gruppen können aber nicht explizit angegeben werden. Unser Zweck ist explizite Beispiele für die erwähnten Gruppen anzugeben.

Es sei die Gruppe R die direkte Summe ihrer Untergruppen R_α, wo die R_α der additiven Gruppe der rationalen Zahlen isomorph sind, und α eine Indexmenge K der Mächtigkeit $\leqq \mathfrak{c}$ durchläuft. Von jedem R_α wählen wir ein festes Element $e_\alpha(\neq 0)$ aus.

Für jedes $\alpha \in K$ nehmen wir eine Menge M_α von Primzahlen mit den Eigenschaften:

a) die Primzahl 2 gehört zu keinem M_α,

b) für jedes (geordnete) Paar α, β $(\alpha \neq \beta)$ aus K gibt es eine Primzahl q mit $q \in M_\alpha, q \notin M_\beta$.

Ein solches System der M_α (für $\alpha \in K$) existiert gewiß, da die Mächtigkeit von K nicht größer als $\mathfrak{c}$ vorausgesetzt ist.*)

Wir definieren nun G als die Untergruppe der Gruppe R, die durch alle Elemente der Form $\frac{e_\alpha}{q^m}$, $\frac{e_\alpha + e_\beta}{2}$ erzeugt ist, wo q alle Primzahlen von M_α, m alle nichtnegativen ganzen Zahlen, α und β die Elemente der Menge K durchlaufen. Offenbar stimmt der Rang von G mit der Mächtigkeit von K überein. Wir zeigen, daß G *direkt unzerlegbar ist.*

In der Gruppe R sei G_α die durch die Elemente $\frac{e_\alpha}{q^m}$ ($q \in M_\alpha$, m nichtnegative ganze Zahl) erzeugte und H_α die durch G_α und $\frac{e_\alpha}{2}$ erzeugte Untergruppe. Wir bezeichnen mit H die direkte Summe aller Untergruppen H_α von R.

Für jedes $\alpha \in K$ ist die Gruppe G_α eine echte Untergruppe von H_α, da genau diejenigen Elemente von H_α zur Gruppe G_α gehören, die in der Gruppe H durch 2 teilbar sind $\left(\frac{e_\alpha}{2} \notin G_\alpha\right)$.

Jedes Element g von G läßt sich als Summe von Elementen aus H_α darstellen, und zwar eindeutig, wenn wir voraussetzen, daß aus jedem H_α in der Summe höchstens ein Glied vorkommt. Zur Gruppe G gehören genau diejenigen Summen, die eine gerade Anzahl von in H durch 2 unteilbaren Gliedern enthalten, nämlich solche und nur solche Elemente sind durch die gegebenen Erzeugenden von G darstellbar. Deshalb gehört keines der Elemente $\frac{e_\alpha}{2}$ zu G.

Setzen wir voraus, daß G direkt zerlegbar ist, $G = G_1 + G_2$ ($G_1, G_2 \neq 0$). Wir unterscheiden zwei Fälle.

a) Jedes Element e_α gehört entweder zu G_1, oder zu G_2. Es sei H_i ($i = 1, 2$) die durch G_i erzeugte Servanzuntergruppe von H. H ist offenbar die direkte Summe von H_1 und H_2, $H = H_1 + H_2$. Außerdem gilt:

$$H_i \cap G = G_i \qquad (i = 1, 2). \tag{1}$$

Nach Voraussetzung gibt es sicher ein Element e_α in G_1, und ein e_β in G_2. Wir betrachten das Element $\frac{e_\alpha + e_\beta}{2} \in G$. $\frac{e_\alpha + e_\beta}{2}$ ist als Element von $H = H_1 + H_2$ in der eindeutigen Form $\frac{e_\alpha + e_\beta}{2} = h_1 + h_2$ ($h_i \in H_i$) darstellbar, und zwar ist offenbar $h_1 = \frac{e_\alpha}{2}$, $h_2 = \frac{e_\beta}{2}$. Wegen $\frac{e_\alpha}{2}, \frac{e_\beta}{2} \notin G$ und wegen (1)

*) Die Menge aller Primzahlen > 2 teilen wir in zwei elementfremde Klassen $\{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ bzw. $\{p_1', p_2', \ldots, p_n', \ldots\}$. Die Menge aller Folgen $(q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots)$ mit $q_n = p_n$ oder $q_n = p_n'$ besitzt die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ und keine von zwei verschiedenen Folgen enthält die andere.

ist $\frac{e_\alpha + e_\beta}{2}$ keine Summe von Elementen aus G_1 und G_2, daher ist die vorausgesetzte Zerlegung falsch.

b) Es gibt ein e_α, das weder zu G_1, noch zu G_2 gehört. Dann gilt $e_\alpha = g_1 + g_2$ mit $g_1 \in G_1$ und $g_2 \in G_2$. Es gilt eindeutig

$$(2) \qquad \begin{cases} g_1 = h_{\alpha_1} + h_{\alpha_2} + \cdots + h_{\alpha_k} & \text{mit} \quad h_{\alpha_i} \in H_{\alpha_i} \ (\alpha_i \in K), \\ g_2 = h_{\beta_1} + h_{\beta_2} + \cdots + h_{\beta_l} & \text{mit} \quad h_{\beta_j} \in H_{\beta_j} \ (\beta_j \in K). \end{cases}$$

Da weder g_1 noch g_2 zu H_α gehört, gibt es unter den h_{α_i} sicher ein $h_{\alpha'} \notin H_\alpha$. Es sei q eine — nach Voraussetzung gewiß vorhandene — Primzahl in M_α, die nicht zu $M_{\alpha'}$ gehört. Dann existiert eine positive ganze Zahl m mit $\frac{h_{\alpha'}}{q^m} \notin H_{\alpha'}$.

Wegen $q \in M_\alpha$ ist $\frac{e_\alpha}{q^m}$ ein Element von G, und daher ist es auch $\frac{g_i}{q^m}$ $(i = 1, 2)$. Aus (2) schließt man, daß $\frac{h_{\alpha'}}{q^m} \in H_{\alpha'}$, also ein Widerspruch.

Wir haben damit die direkte Unzerlegbarkeit der Gruppe G bewiesen.

Literatur.

[1] L. S. Pontrjagin, The theory of topological commutative groups, *Ann. of Math.* **35** (1934), 360—388.

[2] А. Г. Курош, Теория групп, Москва, 1953.

(*Eingegangen am 10. Dezember, 1955.*)