

О ПРЯМЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ АБЕЛЕВОЙ ГРУППЫ.

Посвящена памяти Профессора Тибора Селе.

Л. Я. КУЛИКОВ в Москве.

В работе „Обобщенные примарные группы“ (Труды Московского математического общества, 2 (1953), 85—167) автором была доказана следующая теорема (теорема 12.12), обобщающая теорему Ульма:

Пусть A и G — нормальные обобщенные примарные¹⁾ группы (с одним и тем же кольцом операторов), каждая из которых имеет счетную систему образующих²⁾ и ульмовские факторы, разложимые в прямые суммы циклических²⁾ подгрупп. Для того, чтобы группы A и G были операторно изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: (а) ульмовский тип $\tau(A)$ группы A равен ульмовскому типу $\tau(G)$ группы G ; (б) соответствующие ульмовские факторы групп A и G изоморфны, т. е. $A^i/A^{i+1} \cong G^i/G^{i+1}$ при $i < \tau(A)$; (с) группы $A^{\tau(A)}$ и $G^{\tau(G)}$ операторно изоморфны.

Было установлено, что теорема неверна, если отказаться либо от условия о нормальности групп A и G , либо от условия о счетности системы, образующих групп A и G .

В работе был поставлен вопрос о том, будет ли верна приведенная выше теорема, если отказаться от условия о разложимости ульмовских факторов групп A и G в прямые суммы циклических²⁾ подгрупп.

По предложению Тибора Селе ответ на этот вопрос отрицательный; однако его попытка доказать это застряла на доказательстве того, что обобщенная примарная группа H (с кольцом операторов Z_p), заданная

¹⁾ Абелева группа с кольцом операторов Z_p или K_p , где Z_p — кольцо целых p -адических чисел и K_p — кольцо рациональных чисел со знаменателями, взаимно простыми с данным простым числом p , называется обобщенной примарной группой. Обобщенная примарная группа G называется нормальной, если для всякой ее допустимой подгруппы E , имеющей конечное число образующих,²⁾ множество порядковых чисел, для которых $E \cap G^i \neq E \cap G^{i+1}$, является конечным.

²⁾ Относительно кольца операторов группы.

образующими $b_1, b_2, \dots$ и определяющими соотношениями $p^2(b_1 - pb_2) = p^4(b_2 - pb_3) = \dots = c \neq 0$, не разлагается в прямую сумму двух смешанных подгрупп.³⁾

Целью настоящей заметки является доказательство неразложимости группы H в прямую сумму двух смешанных подгрупп.

Неразложимость группы H в прямую сумму двух смешанных подгрупп вытекает из следующего свойства этой группы: в любом прямом разложении группы H в прямую сумму двух слагаемых одно из слагаемых является конечной группой. Ниже приводится доказательство этого интересного свойства группы H .

Рассмотрим Z_p -группу (или K_p -группу) G , заданную счетной системой образующих $a_1, a_2, \dots$,

$$G = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

и определяющими соотношениями

$$(1) \quad p^2(a_1 - pa_2) = p^4(a_2 - pa_3) = \dots = p^{2k}(a_k - pa_{k+1}) = \dots = 0.$$

Обозначим $d_1, d_2, \dots$ элементы группы G , определяемые равенствами

$$(2) \quad d_1 = a_1 - pa_2, d_2 = a_2 - pa_3, \dots, d_k = a_k - pa_{k+1}, \dots,$$

и через F — подгруппу группы G , порожденную этими элементами,

$$F = \{d_1, d_2, \dots, d_k, \dots\}.$$

Докажем, что группа F есть максимальная периодическая подгруппа группы G . Действительно, из (1) и (2) следует равенства

$$(3) \quad p^{2k}d_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

показывающие, что F есть p -группа. Кроме того, факторгруппа $\bar{G} = G/F$ является Z_p -группой со счетной системой образующих,

$$\bar{G} = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k, \dots\}, \quad \text{где } \bar{a}_k = a_k + F,$$

и с определяющими соотношениями

$$(4) \quad \bar{a}_1 = p\bar{a}_2, \bar{a}_2 = p\bar{a}_3, \dots, \bar{a}_k = p\bar{a}_{k+1}, \dots,$$

т. е. $\bar{G}$ изоморфна аддитивной группе поля p -адических чисел. Отсюда следует, что F есть максимальная периодическая подгруппа группы G и свободный ранг группы G равен единице.

Докажем, что во всяком разложении

$$(5) \quad G = A + B$$

группы G в прямую сумму двух слагаемых одно из слагаемых является конечной группой. Поскольку F есть группа с образующими $d_1, d_2, \dots$ и определяющими соотношениями (3), то F разла-

³⁾ Глубокоуважаемый Тибор Селе любезно сообщил мне об этом в письме, которое было получено мною в январе 1955 г.

гается в прямую сумму циклических подгрупп четных порядков

$$(6) \quad F = \sum_{k=1}^{\infty} F_k,$$

где $F_k = \{d_k\}$ — циклическая подгруппа порядка p^{2k} . Из равенства (2) следуют соотношения $a_k = d_k + p a_{k+1}$ и

$$(7) \quad p^{2k-1} a_k = p^{2k-1} d_k + p^{2k} a_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Далее, на основании (1) заключаем, что

$$(8) \quad p^k a_1 = p^{2k-1} a_k, \quad k = 2, 3, \dots$$

Сопоставляя (7) и (8), получим

$$(9) \quad p^k a_1 = p^{2k-1} d_k + p^{2k} a_{k+1}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Обозначим через $h(x, G)$ высоту элемента x в группе G . На основании (6) заключаем, что $h(p^{2k-1} d_k, F) = 2k - 1$. Отсюда, поскольку F — сервантная подгруппа группы G , следует, что

$$(10) \quad h(p^{2k-1} d_k, G) = 2k - 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

Далее, на основании (9) и (10) заключаем, что

$$(11) \quad h(p^k a_1, G) = 2k - 1, \quad k = 2, 3, \dots$$

Поскольку свободный ранг группы G равен единице, то в разложении (5) одно из слагаемых является периодической группой; предположим, что A является периодической группой, а B — смешанная группа или группа без кручения. Так как прямое слагаемое A в разложении (5) есть периодическая группа и элемент a_1 имеет бесконечный порядок, то найдутся числа целые k такие, что

$$p^k a_1 \in B;$$

наименьшее из этих чисел обозначим через m , тогда

$$(12) \quad p^m a_1 \in B, \quad p^{m-1} a_1 \notin B.$$

Из (11) и (5) следует, что

$$h(p^{k+1} a_1, B) = 2k + 1, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

следовательно, существует элемент $g_k \in B$, удовлетворяющий условиям:

$$(13) \quad p g_k = p^{k+1} a_1, \quad h(g_k, B) = 2k.$$

На основании (13) заключаем, что элемент $s_k = g_k - p^k a_1$ имеет порядок p и высоту $2k - 1$ в группе B ,

$$p s_k = 0, \quad h(s_k, B) = 2k - 1, \quad k = m, m + 1, \dots$$

Таким образом, доказано, что в B существует бесконечная последовательность элементов,

$$s_m, s_{m+1}, \dots, s_n, \dots$$

каждый из которых имеет порядок p и высоту

$$h(s_k, B) = 2k - 1.$$

Известно, что всякий элемент s_k можно включить в циклическое прямое слагаемое группы B порядка $2k$. Отсюда следует, что любое разложение максимальной периодической подгруппы $F(B)$ группы B в прямую сумму циклических подгрупп содержит циклические слагаемые любых четных порядков, больших или равных $2m$. Но группа F является прямой суммой циклических подгрупп, порядки которых суть четные и различные числа; кроме того, ввиду (5)

$$F = A + F(B).$$

Отсюда следует, что в любом разложении группы A в прямую сумму циклических подгрупп порядки циклических слагаемых меньше $2m$; кроме того, всякое такое разложение не содержит прямых слагаемых одного и того же порядка. Следовательно, группа A является конечной.

Рассмотрим теперь группу H с кольцом операторов Z_p (или K_p), заданную счетной системой образующих $b_1, b_2, \dots$, $H = \{b_1, b_2, \dots\}$, и определяющими соотношениями

$$(14) \quad p^2(b_1 - pb_2) = p^4(b_2 - pb_3) = \dots = p^{2k}(b_k - pl_{k+1}) = \dots = c \neq 0.$$

Докажем, что в любом прямом разложении группы H в прямую сумму двух слагаемых одно из слагаемых является конечной группой.

Пусть

$$(15) \quad H = D + E$$

— какое-либо разложение H в прямую сумму двух слагаемых. Соотношения (14) показывают, что элемент c имеет бесконечную высоту в H , и что факторгруппа $\bar{H} = H/\{c\}$ изоморфна группе G ,

$$(16) \quad \bar{H} \cong G;$$

отсюда, поскольку группа G не имеет элементов бесконечной высоты, следует, что все элементы бесконечной высоты группы H содержатся в группе $C = \{c\}$. Обозначим через D_1 , подгруппу группы D , образованную элементами, имеющими бесконечную высоту в D , через E_1 — подгруппу, образованную элементами, имеющими бесконечную высоту в E . На основании (15) заключаем, что

$$(17) \quad C = D_1 + E_1.$$

Поскольку C — циклическая группа, одно из двух слагаемых в разложении (17) является нулевым; предположим, что $D_1 = \{0\}$. Тогда $E_1 = C$, и, следовательно,

$$(18) \quad H/C \cong D + E/C.$$

На основании (16) и (18) заключаем, что

$$G \cong D + E/C.$$

Выше было доказано, что во всяком разложении группы G в прямую сумму

двух слагаемых одно из слагаемых есть конечная группа. Следовательно, либо D либо E/C является конечной группой. Но элемент s имеет бесконечную высоту в E и, потому, факторгруппа E/C не может быть конечной группой. Следовательно, группа D является конечной.

Из доказанного предложения следует, что группа H неразложима в прямую сумму двух смешанных подгрупп.

(Поступила в редакцию 15-го декабря 1955 г.)