

Групповые алгебры счетных абелевых p -групп

С. Д. БЕРМАН

Введение

В настоящей статье изучаются групповые алгебры GK счетных периодических абелевых групп G над произвольным полем K . Основные результаты статьи дают необходимые и достаточные условия изоморфизма групповых алгебр GK и G_1K , где G и G_1 — счетные абелевы p -группы (p — простое).

Оказывается, групповая алгебра GK счетной абелевой p -группы G над полем K характеристики p определяет группу G с точностью до изоморфизма (этот результат для конечных p -групп получен Дескинсом [1]). Если $\text{char } K \neq p$, то в общем случае групповая алгебра GK определяется некоторыми свойствами подгруппы P элементов бесконечной высоты в G и факторгруппы G/P .

В работе найдены также необходимые и достаточные условия изоморфизма групповых алгебр GD и G_1D счетных периодических абелевых групп G и G_1 над полем вещественных чисел D и изучена мультипликативная группа алгебры GK , где G — p -группа, а K — поле характеристики p .

В заключительной части статьи дается описание всех неприводимых представлений произвольной (не обязательно счетной) периодической абелевой группы G над произвольным полем K характеристики нуль.

Результаты этой статьи доложены автором на Международном математическом конгрессе в Москве.

Формулировки некоторых теорем статьи опубликованы в [5], [6].

§ 1. Модулярные групповые алгебры счетных примарных абелевых групп

1. Дескинс [1] показал, что из изоморфизма групповых алгебр GK и G_1K конечных абелевых p -групп G и G_1 над полем K характеристики p вытекает изоморфизм групп G и G_1 .

В этом параграфе изучаются групповые алгебры счетных абелевых p -групп над полем характеристики p .

Теорема 1.1. *Групповые алгебры GK и G_1K двух счетных абелевых p -групп G и G_1 над полем K характеристики p изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны группы G и G_1 .*

Доказательство теоремы 1.1 основано на ряде вспомогательных предложений, не участвующих в доказательстве Дескинса.

Следующая лемма часто применяется при исследовании групповых алгебр:

Лемма 1.1. Пусть G -произвольная группа, H -нормальный делитель группы G , T -любое поле, а V -двусторонний идеал алгебры GT , порожденный элементами $h-1$, где $h \in H$. Тогда

$$GT/V \cong \tilde{G}T, \text{ где } \tilde{G} = G/H.$$

Доказательство. Если $x = \sum \lambda_i h_i \in HT$ ($\lambda_i \in T$, $h_i \in H$), то положим $n(x) = \sum \lambda_i$. Пусть $\{g_j\}$ система представителей смежных классов группы G по нормальному делителю H . Произвольный элемент $y \in GT$ можно записать в виде $y = \sum_j y_j g_j$, где $y_j \in HT$. Тогда отображение $y \rightarrow \sum_j n(y_j)(g_j H)$ определяет гомоморфизм алгебры GT на алгебру $\tilde{G}T$, ядром которого является идеал V .

Следствие. Пусть алгебра R над полем T обладает двумя групповыми базисами: $R = GT = G_1 T$. Если H и H_1 -такие нормальные делители соответственно G и G_1 , что $HT = H_1 T$, то $\tilde{G}T \cong \tilde{G}_1 T$, где $\tilde{G} = G/H$, $\tilde{G}_1 = G_1/H_1$.

В дальнейшем будут рассматриваться только абелевы p -группы и их групповые алгебры над полем K характеристики p . Для абелевых p -групп мы будем употреблять терминологию книги [2].

Пусть G -счетная примарная абелева группа. Условимся говорить, что элемент $y \in GK$ имеет бесконечную высоту, если для любого натурального числа n найдется такой элемент $x \in GK$, что $x^{p^n} = y$. Элемент $y \in GK$ будем называть элементом типа p^∞ , если существует такая последовательность $x_1 = y, x_2, \dots, x_n, \dots$ элементов алгебры GK , что $x_i = x_{i+1}^p$.

Определим в GK следующие подалгебры:

$\bar{A}$ -подалгебра, порожденная всеми элементами бесконечной высоты в GK ;

$\bar{P}$ -подалгебра, порожденная всеми элементами типа p^∞ ;

$\bar{C}^{(n)}$ ($n=0, 1, \dots$)-подалгебра, порожденная всеми элементами x^{p^n} , где $x \in GK$;

$\bar{N}$ -подалгебра, порожденная всеми элементами $x \in GK$, удовлетворяющими условию $x^p = 0$.

Обозначим соответственно через $A, P, C^{(n)}, N$ подгруппу элементов бесконечной высоты в G , максимальную полную подгруппу в G , подгруппу, порожденную p^n -степенями элементов группы, и нижний слой группы G .

Лемма 1.2. $\bar{A} = AK$; $\bar{P} = PK$; $\bar{C}^{(n)} = C^{(n)}K$. Подалгебра $\bar{N}$ совпадает с идеалом V алгебры GK , порожденным элементами $h-1$, где h пробегает подгруппу N .

Доказательство. В алгебре GK имеет место упрощенная формула бинома Ньютона: $(a+b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}$. Очевидно, $AK \subseteq \bar{A}$. Пусть $x = \sum_i \alpha_i g_i$ ($\{g_i\}$ -различные элементы группы G ; $\alpha_i \in K$; $\alpha_i \neq 0$)-элемент бесконечной высоты в GK . Тогда при любом натуральном n существует такой элемент $\sum_j \alpha_j g_j \in GK$, что

$x = \sum_i \alpha_i g_i = (\sum_j \alpha_j g_j)^{p^n} = \sum_j \alpha_j^{p^n} g_j^{p^n}$. Следовательно, для каждого элемента g_i найдется такой элемент $g_j \in G$, что $g_i = g_j^{p^n}$, т. е. g_i -элемент бесконечной высоты в G . Таким образом, $\bar{A} \subseteq AK$ и $\bar{A} = AK$. Аналогично доказываются равенства $\bar{P} = PK$; $\bar{C}^{(n)} = C^{(n)}K$.

Пусть $g'_1, \dots, g'_s, \dots$ -система представителей смежных классов группы G по нижнему слою N этой группы. Произвольный элемент $x \in GK$ можно записать в виде:

$x = y_{i_1} g'_{i_1} + \dots + y_{i_r} g'_{i_r}$, где $y_{i_j} \in NK$. Тогда $x^p = y_{i_1}^p g_{i_1}^{p,p} + \dots + y_{i_r}^p g_{i_r}^{p,p} = \lambda_1 g_{i_1}^{p,p} + \dots + \lambda_r g_{i_r}^{p,p}$ ($\lambda_i \in K$), ибо $y^p = \lambda \cdot 1$ ($\lambda \in K$) для любого элемента $y \in NK$. Элементы $g_{i_1}^{p,p}, \dots, g_{i_r}^{p,p}$ попарно различны, так как из равенства $g_{i_1}^{p,p} = g_{i_2}^{p,p}$ вытекает, что элементы g'_{i_1} и g'_{i_2} принадлежат одному смежному классу группы G по подгруппе N . Если $x^p = 0$, то отсюда следует, что $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$ т. е. $y_{i_1}^p = 0, \dots, y_{i_r}^p = 0$. Но тогда $y_{i_j} = \sum_s \gamma_{js} h_s$ ($\gamma_{js} \in K, h_s \in N$), где $\sum_s \gamma_{js} = 0$, и, следовательно, $x \in V$. Таким образом, $\bar{N} \subseteq V$. Обратное включение $V \subseteq \bar{N}$ очевидно. Лемма доказана.

Лемма 1.3. Пусть G -абелева p -группа, а H -подгруппа группы G , разлагающаяся в прямое произведение t циклических групп порядка p , где t -натуральное число или счетная мощность. Пусть V -идеал алгебры GK , порожденный элементами $h-1$, где $h \in H$. Идеал V нильпотентен тогда и только тогда, когда t -конечное число, причем в этом случае, индекс нильпотентности идеала V равен $t(p-1)+1$.

Доказательство. Пусть $H = (a_1) \times \dots \times (a_t)$ ($a_i^p = 1$; $i = 1, \dots, t$). Тогда произведение $(a_1 - 1)^{p-1} \dots (a_t - 1)^{p-1} \neq 0$. С другой стороны, произведение любых $t(p-1)+1$ элементов идеала V равно нулю.

В самом деле, элементы $(h-1)$ ($h \in H$; $h \neq 1$) образуют базис идеала V_1 алгебры NK размерности $p^t - 1$ над K . Другой базис идеала V_1 образует элементы $(a_1 - 1)^{\alpha_1} \dots (a_t - 1)^{\alpha_t}$ ($0 \leq \alpha_i \leq p-1$; $(\alpha_1, \dots, \alpha_t) \neq (0, \dots, 0)$). Отсюда вытекает, что произведение любых $t(p-1)+1$ элементов идеала V_1 равно нулю ($((a_i - 1)^p = 0)$). Произвольный элемент $x \in V$ записывается в виде $x = \sum_{h \in H} A_h (h-1)$, где $A_h \in GK$. Следовательно, произведение любых $t(p-1)+1$ элементов идеала V также равно нулю. Если $H = (a_1) \times \dots \times (a_m) \times \dots$, то для любого натурального n произведение $(a_1 - 1) \dots (a_n - 1) \neq 0$, и, значит, идеал V не нильпотентен. Лемма доказана.

Следствие. Если в условиях леммы 1.3 идеал V нильпотентен, то индекс нильпотентности s этого идеала однозначно определяет число t прямых множителей в разложении группы H .

Доказательство. В силу леммы 1.3, $s = t(p-1)+1$, откуда $t = \frac{s-1}{p-1}$.

Лемма 1.4. Пусть G и G_1 -счетные полные примарные абелевы группы. Если $GK \cong G_1K$, то $G \cong G_1$.

Доказательство. Пусть $R = GK = G_1K$, где G и G_1 -счетные полные абелевы p -группы. Пусть $N(N_1)$ -нижний слой группы $G(G_1)$ и $\bar{N} = \{x \in R, x^p = 0\}$. Согласно лемме 1.2, идеал $\bar{N}$ порождается элементами $h-1(h_1-1)$, где $h \in N$

($h_1 \in N_1$). Применяя лемму 1.3 и следствие из этой леммы, получим, что группы N и N_1 разлагаются в произведение одного и того числа циклических групп простого порядка, а это число равно числу групп типа p^∞ в прямых разложениях полных групп G и G_1 . Лемма доказана.

Лемма 1.5. Пусть G и G_1 -счетные примарные абелевы группы, причем $G = P \times F$, $G_1 = P_1 \times F_1$, где P и P_1 -полные, а F и F_1 -редуцированные группы. Если $GK = G_1K$, то $P \cong P_1$ и $FK \cong F_1K$.

Доказательство. В силу леммы 1.2, имеет место равенство $\bar{P} = PK = P_1K$, и, на основании леммы 1.4, $P \cong P_1$. Ввиду следствия из леммы 1.1, получим, что $\tilde{G}K \cong \tilde{G}_1K$, где $\tilde{G} = G/P$, $\tilde{G}_1 = G_1/P_1$, т. е. $FK \cong F_1K$.

Лемма 1.6. Пусть F и F_1 -счетные редуцированные примарные группы, а

$$(1.1) \quad F \supset F^{(1)} \supset \dots,$$

$$(1.2) \quad F_1 \supset F_1^{(1)} \supset \dots$$

— ряды Ульма для групп F и F_1 . Если $FK \cong F_1K$, то ряды (1.1) и (1.2) имеют один и тот же порядковый тип, и, при этом, $\tilde{F}^{(i)}K \cong \tilde{F}_1^{(i)}K$, где $\tilde{F}^{(i)} = F^{(i)}/F^{(i+1)}$; $\tilde{F}_1^{(i)} = F_1^{(i)}/F_1^{(i+1)}$.

Доказательство. Очевидно, можно предполагать, что имеет место равенство $FK = F_1K$. Предположим, что для всех $i < w$ уже доказано равенство $F^{(i)}K = F_1^{(i)}K$. Если w -трансфинитное число первого рода, то имеет место равенство $F^{(w-1)}K = F_1^{(w-1)}K$. Так как $F^{(w)}$ и $F_1^{(w)}$ -подгруппы элементов бесконечной высоты соответственно в группах $F^{(w-1)}$ и $F_1^{(w-1)}$, то тогда, на основании леммы 1.2, $F^{(w)}K = F_1^{(w)}K$. Если w -трансфинитное число второго рода, то $F^{(w)}K = \bigcap_{i < w} F^{(i)}K$, $F_1^{(w)}K = \bigcap_{i < w} F_1^{(i)}K$, и снова $F^{(w)}K = F_1^{(w)}K$. Утверждение леммы следует теперь из следствия из леммы 1.2.

Лемма 1.7. Пусть G и G_1 -счетные примарные абелевы группы без элементов бесконечной высоты. Если $GK \cong G_1K$, то $G \cong G_1$.

Доказательство. Пусть $GK = G_1K$. Тогда на основании леммы 1.2 имеет место равенство

$$G^{p^n}K = G_1^{p^n}K = R.$$

Пусть $\bar{N} = \{x \in R, x^p = 0\}$. Образует подалгебру $G^{p^{n+1}}K = G_1^{p^{n+1}}K = \tilde{R}$. Пусть $\tilde{N} = \{x \in \tilde{R}, x^p = 0\}$, а V -идеал алгебры R , порожденный идеалом $\tilde{N}$ алгебры $\tilde{R}$. Очевидно, $V \subseteq \bar{N}$.

Пусть

$$(1.3) \quad G^{p^n} = (b_1) \times \dots \times (b_r) \times \dots \times (a_1) \times \dots \times (a_s) \times \dots,$$

где b_i -элементы порядка p , а каждый из элементов a_i имеет порядок p^{β_i} , где $\beta_i \geq 2$. Тогда нижний слой N группы G^{p^n} представляется в виде произведения

$$N = (b_1) \times \dots \times (b_r) \times \dots \times (a_1^{p^{\beta_1}-1}) \times \dots \times (a_s^{p^{\beta_s}-1}) \times \dots,$$

а нижний слой N' группы $G^{p^{n+1}}$ в виде произведения

$$N' = (a_1^{p^{\beta_1}-1}) \times \dots \times (a_s^{p^{\beta_s}-1}) \times \dots$$

Ввиду леммы 1.2, идеал $\bar{N}$ алгебры R порождается всеми элементами $h-1$ ($h \in N$), а идеал V -всеми элементами $h'-1$ ($h' \in N'$). Элементы вида $(b_{i_1}-1)^{\alpha_1} \dots (b_{i_r}-1)^{\alpha_r}$ ($0 < \alpha_j < p$) принадлежат идеалу $\bar{N}$ и не принадлежат идеалу V . Если число подгрупп (b_i) в разложении (1.3) бесконечно, то фактор-кольцо $\bar{N}/V$ не является нильпотентным. В самом деле, в этом случае для любого натурального m в $\bar{N}$ существует произведение

$$(b_1-1) \dots (b_m-1) \in V.$$

Пусть число множителей (b_i) в (1.3) конечно и равно t .

Тогда фактор-кольцо $\bar{N}/V$ -нильпотентное кольцо с показателем нильпотентности $t(p-1)+1$.

Действительно, $(b_1-1)^{p-1} \dots (b_t-1)^{p-1} \in V$, но всякое произведение из $t(p-1)+1$ множителей идеала $\bar{N}$ уже принадлежит идеалу V .

Для фиксированного простого p число $t(p-1)+1$ однозначно определяет число t . Таким образом, групповая алгебра $GK = G_1K$ вполне определяет число прямых множителей порядка p в прямом разложении групп G^{p^n} и $G_1^{p^n}$ ($n=0, 1, \dots$). Следовательно, $G \cong G_1$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.1. Счетная абелева p -группа G записывается в виде прямого произведения $G = P \times F$, где P -полная группа, а F -редуцированная группа. Группа F с точностью до изоморфизма определяется своими ульмовскими факторами. Поэтому теорема 1.1 вытекает из сопоставления леммы 1.5, 1.6 и 1.7.

2. Исследуем теперь мультипликативную группу $M(G)$ групповой алгебры GK примарной абелевой p -группы над полем K характеристики p . Группа $M(G)$ состоит из тех и только тех конечных линейных комбинаций $\sum_{g \in G} \alpha_g g$ ($\alpha_g \in K$), для которых $\sum_g \alpha_g \neq 0$. Легко видеть, что имеет место прямое разложение $M(G) = K^* \times S(G)$, где K^* -мультипликативная группа поля K , а $S(G)$ -силовская p -подгруппа группы $M(G)$:

$$S(G) = \{x = \sum_{g \in G} \alpha_g g, \sum_{g \in G} \alpha_g = 1\}.$$

Лемма 1.2'. Пусть P -максимальная полная подгруппа группы G , а G' -подгруппа элементов бесконечной высоты этой группы. Тогда $S(P)$ и $S(G')$ -соответственно максимальная полная подгруппа и подгруппа элементов бесконечной высоты группы $S(G)$. Кроме того, $S^{p^n}(G) = S(G^{p^n})$ ($n=0, 1, \dots$). Ряды Ульма для групп G/P и $S(G)/S(P)$ имеют один и тот же порядковый тип. Лемма доказывается такими же рассуждениями, как и лемма 1.2.

Теорема 1.2. Пусть $K = GF(q)$ -конечное поле. Конечные абелевы p -группы G и G_1 изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны группы $S(G)$ и $S(G_1)$.

Доказательство. Пусть G -конечная абелева группа, а N -нижний слой группы G . Обозначим через $\tilde{N}$ нижний слой группы $S(G)$. Каждый элемент $x \in \tilde{N}$ можно записать в виде:

$$x = \sum_j b_j \sum_{a \in N} \alpha_{ja} a \quad (\alpha_{ja} \in K),$$

где $\{b_j\}$ ($b_1 = 1$)-система представителей смежных классов группы G по подгруппе N . Имеем

$$x^p = \sum_j b_j^p \sum_{a \in N} \alpha_{ja}^p a = 1,$$

откуда

$$(1.4) \quad \sum_{a \in N} \alpha_{1a} = 1; \quad \sum_{a \in N} \alpha_{ja} = 0 \quad (j \neq 1).$$

Пусть p^l -порядок нижнего слоя группы G . Тогда каждое из уравнений системы (1.4), имеет точно $q^{(p^l-1)}$ решений, а число r решений системы равно

$$(1.5) \quad r = q^{(p^l-1)l},$$

где $l = (G:N)$.

Из формулы (1.5) вытекает, что в случае конечного поля K порядок нижнего слоя $\tilde{N}$ группы $S(G)$ однозначно определяет порядок нижнего слоя группы G , так как числа l и q являются степенями фиксированного простого числа p .

Далее, имеет место формула

$$(1.6) \quad S^{p^l}(G) = S(G^{p^l}).$$

Из формул (1.5) и (1.6) теперь следует, что группа $S^{p^l}(G)$ однозначно определяет порядок нижнего слоя группы G^{p^l} . Таким образом, группа $S(G)$ однозначно определяет порядок нижнего слоя N_i группы G^{p^i} ($i=0, 1, \dots$). Так как порядки групп N_i ($i=0, 1, \dots$) определяют группу G с точностью до изоморфизма, то, тем самым, теорема 1.2 доказана.

Пусть G -произвольная счетная примарная абелева группа, а G' -подгруппа элементов бесконечной высоты в G . Тогда, в силу леммы 1.2, $S(G')$ -подгруппа элементов бесконечной высоты в $S(G)$. Образует фактор-группу $B = S(G)/S(G')$. Эта группа не содержит элементов бесконечной высоты и, следовательно, разлагается в прямое произведение циклических p -групп.

Обозначим через $\tilde{N}_i$ нижний слой группы B^{p^i} ($i=0, 1, \dots$).

Лемма 1.8. Если $G' \neq 1$, то фактор-группа $\tilde{N}_i/\tilde{N}_{i+1}$ для любого $i=0, 1, \dots$ имеет бесконечный порядок.

Доказательство. Фактор-группа $D = G/G'$ разлагается в прямое произведение циклических групп. Так как $G' \neq 1$ то порядки прямых множителей в этом разложении не ограничены. Значит, группы D^{p^i} и $D^{p^{i+1}}$ также разлагаются в прямое произведение счетного числа циклических групп:

$$D^{p^i} = (b_1 G') \times \dots \times (b_r G') \times \dots;$$

$$D^{p^{i+1}} = (b_{j_1}^{p^i} G') \times \dots \times (b_{j_r}^{p^i} G') \times \dots$$

Обозначим через N' нижний слой группы G' . Введем в рассмотрение следующие элементы группы B^{p^i} :

$$\eta_r = (1 + b_{j_r} \sum_i \alpha_i g_i) S(G'),$$

где $\sum_i \alpha_i = 0$ и $g_i \in N'$. Очевидно, $\eta_r \in \hat{N}_i$

Покажем, что элементы η_r и η_m принадлежат различным смежным классам группы $\hat{N}_i$ по подгруппе $\hat{N}_{i+1}$. Действительно, произвольный элемент группы $S^{p^{i+1}}(G) = S(G^{p^{i+1}})$ записывается в виде:

$$\sum b_{j_{i_1}}^{p\alpha_{i_1}} \dots b_{j_{i_t}}^{p\alpha_{i_t}} A_{i_1, \dots, i_t},$$

где $A_{i_1, \dots, i_t} \in G'K$. Если η_r и η_m ($m \neq r$) принадлежат одному смежному классу группы $\hat{N}_i$ по подгруппе $\hat{N}_{i+1}$, то

$$(1.7) \quad (1 + b_{j_r} \sum_i \alpha_i g_i) = (1 + b_{j_m} \sum_i \alpha'_i g_i) (\sum b_{j_{i_1}}^{p\alpha_{i_1}} \dots b_{j_{i_t}}^{p\alpha_{i_t}} A_{i_1, \dots, i_t}) C,$$

где $C \in S(G')$, $A_{i_1, \dots, i_t} \in G'K$ ($\alpha_i, \alpha'_i \in K$).

Равенство (1.7) невозможно, ибо элемент в левой части содержит элементы группы G из смежного класса $b_{j_r} G'$, не встречающиеся в правой части.

Так как число элементов η_r бесконечно, то, тем самым, мы показали, что индекс $(\hat{N}_i : \hat{N}_{i+1})$ бесконечен. Лемма доказана.

Следствие. В условиях леммы 1.8, фактор-группа $S(G)/S(G')$ разлагается в прямое произведение циклических групп таким образом, что каждая циклическая группа порядка p^i ($i=1, 2, \dots$) входит в это разложение бесконечное число раз.

В самом деле, число множителей порядка p^i в прямом разложении группы $S(G)/S(G')$ определяется индексом $(\hat{N}_{i-1} : \hat{N}_i)$ ($i=1, 2, \dots$).

Лемма 1.9. Пусть группа G разлагается в прямое произведение счетного числа циклических групп:

$$(1.8) \quad G = (a_1) \times \dots \times (a_s) \times \dots,$$

а K -конечное поле. Тогда в прямом разложении группы $S(G)$ встречается бесконечно много циклических множителей порядка p .

Доказательство. Если разложение (1.8) содержит только конечное число множителей порядка p^i , где $i \geq 2$, то утверждение леммы очевидно.

В самом деле, если бы в этом случае в разложении группы $S(G)$ встречалось только конечное число множителей порядка p , то подгруппа $S^p(G)$ была бы бесконечной. С другой стороны, $S^p(G) = S(G^p)$, а подгруппа G^p -конечна, что ведет к противоречию.

Предположим, что в прямом разложении (1.8) встречается бесконечно много множителей с порядком, большим, чем p .

Положим $H = (b_1) \times (b_2) \times \dots$, где (b_i) -такие прямые множители в разложении (1.8), что $b_i^p \neq 1$. Образует элементы

$$(1.9) \quad 1 + b_i \sum_j \alpha_j g_j,$$

где $\{g_j\}$ -элементы нижнего слоя группы G и $\sum_j \alpha_j = 0$.

Так же, как и в предыдущей лемме, устанавливаем, что элементы (1.9) принадлежат различным смежным классам нижнего слоя $\tilde{N}$ группы $S(G)$ по нижнему слою N' группы $S^p(G) = S(G^p)$. Значит, $(\tilde{N}: N') = \infty$, что и доказывает утверждение леммы.

Следствие. Если порядки прямых множителей в (1.8) не ограничены, то в прямом разложении группы $S(G)$ каждая циклическая группа порядка p^i ($i = 1, 2, \dots$) встречается бесконечное число раз. Если эти порядки ограничены и p^α -наибольший из порядков прямых множителей в (1.8), p^β ($\beta \leq \alpha$)-наибольший из порядков тех прямых множителей, которые входят в (1.8) бесконечное число раз, а H -прямое произведение прямых множителей (1.8), порядки которых не превосходят p^β , то в прямое разложение группы $S(G)$ циклические множители порядков $p, \dots, p^\beta$ входят бесконечное число раз, а множители порядка p^γ , где $\beta < \gamma \leq \alpha$ встречаются в этом разложении столько раз, сколько их участвует в разложении конечной группы $S(G/H)$.

Доказательство. Обозначим через N_i порядок нижнего слоя группы $S^{p^i}(G) = S(G^{p^i})$. Если порядки прямых множителей группы G не ограничены, то из леммы 1.9 следует для каждого i ($i = 0, 1, \dots$) индекс $(N_i: N_{i+1})$ бесконечен. Отсюда вытекает первое утверждение леммы.

Если порядки прямых множителей в (1.8) ограничены и p^α -наибольший из этих порядков, то, в силу леммы 1.9, индексы $(N_{i-1}: N_i)$ ($i = 1, \dots, \beta$) не ограничены. Индексы $(N_\beta: N_{\beta+1}), \dots, (N_{\alpha-1}: N_\alpha)$ совпадают с соответствующими индексами для группы $S(G/H)$. Отсюда, в силу теоремы 1.2, следует второе утверждение леммы.

Лемма 1.10. Пусть $G = (a)$ -циклическая группа порядка p^n , а K -счетное поле характеристики p . Тогда в прямое разложение группы $S(G)$ входят только циклические группы порядков $p, \dots, p^n$, причем каждая подгруппа порядка p^i ($1 \leq i \leq n$) встречается в этом разложении счетное число раз.

Доказательство. Рассмотрим группы $S^{p^i}(G) = S(G^{p^i})$ и $S^{p^{i+1}}(G) = S(G^{p^{i+1}})$ ($i = 0, \dots, n-1$). Тогда элементы вида

$$1 + a^{p^i}(\alpha + \beta a^{p^{n-1}}) \quad (\alpha + \beta = 0)$$

принадлежат нижнему слою N_i группы $S^{p^i}(G)$. Возьмем элементы

$$1 + a^{p^i}(\alpha + \beta a^{p^{n-1}}) \quad \text{и} \quad 1 + a^{p^i}(\alpha_1 + \beta_1 a^{p^{n-1}}). \quad (1.10)$$

Если эти элементы принадлежат одному смежному классу группы $S^{p^i}(G)$ по подгруппе $S^{p^{i+1}}(G)$, то

$$(1.11) \quad 1 + a^{p^i}(\alpha + \beta a^{p^{n-1}}) = [1 + a^{p^i}(\alpha_1 + \beta_1 a^{p^{n-1}})] \left(\sum_j \gamma_j a^{j p^{i+1}} \right).$$

Если $\sum_j \gamma_j a^{j p^{i+1}} \neq \gamma_1 \cdot 1$, то равенство (1.11) невозможно, а если $\sum_j \gamma_j a^{j p^{i+1}} = \gamma_1 \cdot 1$, то $\gamma_1 = 1$ и $\alpha_1 = \alpha$; $\beta_1 = \beta$. Таким образом, для различных пар (α, β) и (α_1, β_1) ($\alpha + \beta = 0$; $\alpha_1 + \beta_1 = 0$) элементы (1.11) принадлежат различным смежным классам группы $S^{p^i}(G)$ по подгруппе $S^{p^{i+1}}(G)$. Так как поле K содержит бесконечно много элементов, то отсюда следует, что индекс $(N_i: N_{i+1})$ бесконечен.

Значит, в прямом разложении группы $S(G)$ встречается бесконечно много циклических прямых множителей порядка p^{i+1} ($i = 0, \dots, n-1$). Так как для любого элемента $x \in S(G)$ $x^{p^n} = 1$, то утверждение леммы доказано.

Лемма 1.11. Пусть группа G разлагается в прямое произведение циклических p -групп:

$$G = G_1 \times \dots \times G_s \times \dots \quad (G_i = \langle a_i \rangle),$$

а K -произвольное поле характеристики p . Тогда подгруппа $S(G_i)$ является сервантной подгруппой группы $S(G)$.

Доказательство. Имеет место прямое разложение: $G = G_i \times H$, где $H = \prod_{j \neq i} G_j$.

Пусть теперь $x \in S(G_i)$ и $x = z^{p^n}$, где $z \in S(G)$. Элемент z можно записать в виде:

$$z = \sum_j A_j h_j, \quad \text{где } A_j \in G_i K, \quad h_j \in H.$$

Тогда

$$x = z^{p^n} = \sum_j A_j^{p^n} h_j^{p^n}.$$

Значит,

$$x = A_{i_1}^{p^n} + \dots + A_{i_r}^{p^n},$$

где $i_1, \dots, i_r$ - такие индексы, что $h_{i_1}^{p^n} = \dots = h_{i_r}^{p^n} = 1$ и $h_t^{p^n} \neq 1$, если $t = i_j$ ($j = 1, \dots, r$). Лемма доказана

Следствие. Пусть группа G разлагается в прямое произведение конечного или счетного числа циклических p -групп с ограниченными в совокупности порядками, а K -счетное поле. Если p^n -наибольший порядок циклических прямых множителей в разложении группы G , то в разложении группы $S(G)$ каждая из подгрупп порядка p^i ($i = 1, \dots, n$) встречается счетное число раз и каждая из циклических подгрупп в этом разложении имеет порядок p^i , где $i \leq n$.

Доказательство. Пусть $G = \Pi \times G_i$, где $G_i = \langle a_i \rangle$.

В силу леммы 1.11 $S(G_i)$ -сервантная подгруппа группы $S(G)$. Так как порядки элементов группы $S(G_i)$ ограничены, то $S(G_i)$ выделяется прямым множителем в группе $S(G)$ (см. [2]). Для завершения доказательства теперь остается сослаться на лемму 1.10.

Лемма 1.12. Пусть G -счетная полная группа, а K -счетное или конечное поле характеристики p . Тогда группа $S = S(G)$ разлагается в произведение счетного числа групп типа p^∞ .

Доказательство. В силу леммы 1.2, $S(G)$ -полная группа. Для доказательства леммы достаточно установить, что нижний слой N группы S -бесконечная группа.

Рассмотрим разложение группы G в прямое произведение групп типа p^∞ : $G = \prod_i G_i$.

Пусть (a_1) -нижний слой группы G_1 , а $\bar{N} = \{x, x \in GK, x^p = 0\}$. Ввиду леммы 1.2, $\bar{N}$ -бесконечномерная подалгебра алгебры GK . Следовательно, элементы

$a_1 + n$ ($n \in N$) образуют бесконечное подмножество группы N и N -бесконечная группа. Лемма доказана.

Лемма 1.13. Пусть $G = P \times G_1$, где $P \neq 1$ -полная группа, а G_1 -прямое произведение циклических групп. Пусть K -счетное или конечное поле. Тогда $S = S(G) = S(P) \times S_1$, где S_1 -редуцированная компонента группы S . Если порядки элементов группы G_1 не ограничены, то в прямом разложении группы S_1 каждая из циклических подгрупп порядков p^i ($i = 1, 2, \dots$) встречается бесконечное число раз. Если показатель группы G_1 равен p^α , то группа S_1 разлагается в прямое произведение циклических групп порядков $p, \dots, p^\alpha$, причем каждая из циклических подгрупп порядка p^i ($1 \leq i \leq \alpha$) встречается в этом разложении с бесконечной кратностью.

Доказательство. Легко проверить, что порядки элементов групп G_1 и S_1 одновременно ограничены или неограничены, причем в последнем случае показатели групп G_1 и S_1 совпадают. Пусть $G_1^{p^i} \neq 1$ ($i \geq 0$) и пусть $a \in G_1^{p^i}$ и $a \in G_1^{p^{i+1}}$. Положим $\bar{P} = \{x \in PK, x^p = 0\}$. Ввиду леммы 1.2, $\bar{P}$ -бесконечномерная подалгебра алгебры GK . Рассмотрим элементы $(1 + a_1 x_1)S(P)$ и $(1 + a_1 x_2)S(P)$ ($x_1, x_2 \in \bar{P}$) группы $\bar{S} = S(G)/S(P)$. Очевидно, эти элементы принадлежат нижнему слою $\bar{N}_i$ группы $\bar{S}^{p^i}$. Предположим, что они лежат в одном смежном классе группы $\bar{S}^{p^i}$ по подгруппе $\bar{S}^{p^{i+1}}$. Тогда $(1 + ax_1)S(P) = (1 + ax_2)yS(P)$, где $y \in G^{p^{i+1}}K$. Значит,

$$(1.12) \quad (1 + ax_1) = (1 + ax_2)yz \quad (z \in S(P)).$$

Так как $x_i \in G^{p^{i+1}}K$ ($i = 1, 2$) и $yz \in G^{p^{i+1}}K$, то из (1.12) следует, что $yz = 1$ и $ax_1 = ax_2$, откуда $x_1 d = x_2$. Таким образом, при $x_1 \neq x_2$ ($x_1, x_2 \in \bar{P}$) элементы $(1 + ax_1)S(P)$ и $(1 + ax_2)S(P)$ принадлежат различным смежным классам группы $\bar{N}_i$ по подгруппе $\bar{N}_{i+1}$. Значит, $(\bar{N}_i : \bar{N}_{i+1}) = \infty$, откуда вытекает, что разложение фактор-группы $S(G)/S(P)$ в прямое произведение циклических групп содержит бесконечно много циклических групп порядка p^{i+1} . Лемма доказана.

Теорема 1.3. Пусть G -счетная абелева p -группа, P -максимальная полная подгруппа группы G , K -счетное или конечное поле характеристики p , S -силовская p -подгруппа мультипликативной группы алгебры GK , а P' -максимальная полная подгруппа группы S .

Обозначим через A_n (A_∞) прямое произведение циклических p -групп порядков $p, \dots, p^n$ (соответственно порядков $p, \dots, p^n, \dots$), где каждая из циклических групп порядка p^i ($1 \leq i \leq n$) (соответственно каждая из циклических групп порядка p^i , где i -произвольное натуральное число) встречается счетное число раз. Если $P \neq 1$, то $P' \neq 1_\infty$. При $P = 1$ группа $P' = 1$. Ряды Ульма для редуцированных групп G/P и S/P' имеют один и тот же порядковый тип w . Все факторы ряда Ульма группы S/P' , кроме, быть может, последнего фактора $\bar{S}^y$ для случая, когда $w = \gamma + 1$ -трансфинитное число первого ряда, изоморфны группе A_∞ . Пусть $w = \gamma + 1$, а G^γ -последний фактор ряда Ульма группы G/P . Если порядки элементов группы G^γ не ограничены, то $\bar{S}^y \cong A_\infty$. Предположим, что порядки элементов группы G^γ ограничены, причем p^α -показатель группы G^γ , а p^β -наибольший из порядков тех циклических прямых множителей, которые входят в разложение группы G^γ счетное число раз. Обозначим через H прямое произ-

ведение всех циклических прямых множителей группы G^γ , порядки которых не превышают p^β . Если поле K -счетное, то $\bar{S}^\gamma \cong A_\alpha$, а для конечного поля K группа $\bar{S}^\gamma$ представляется в виде прямого произведения $\bar{S}^\gamma = A_\beta \times \bar{S}$, где группа $\bar{S}$ изоморфна силовской p -подгруппе $S(G^\gamma/H)$ мультипликативной группы групповой алгебры FK конечной группы $F = G^\gamma/H$. (Если G^γ -конечная группа, то $H=1$).

Доказательство. Доказательство теоремы сразу получается путем сопоставления лемм 1. 8, 1. 9, 1. 11 следствий из этих лемм и лемм 1. 12 и 1. 13.

Теорема 1. 4. Пусть G и G_1 -счетные абелевы p -группы; S и S_1 -соответственно силовские p -подгруппы групповых алгебр GK и G_1K (K -счетное или конечное поле характеристики p); $P(P_1)$ -максимальная полная подгруппа группы $G(G_1)$; $w(w_1)$ -порядковый тип ряда Ульма группы G/P (G_1/P_1). Если $w = \gamma + 1$ ($w_1 = \gamma_1 + 1$)-трансфинитное число первого рода, то обозначим через $G^\gamma(G_1^{\gamma_1})$ последний фактор ряда Ульма группы G/P (G_1/P_1). Группы S и S_1 изоморфны тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие условия:

1. Если $P \neq 1$, то $P_1 \neq 1$; 2. $w = w_1$ 3. Если $w = w_1 = \gamma + 1$ и K -счетное поле, то группы G^γ и G_1^γ имеют один и тот же показатель p^α или порядки элементов этих групп не ограничены. Если $w = w_1 = \gamma + 1$ и K -конечное поле, то или порядки элементов групп G^γ и G_1^γ одновременно не ограничены, или совпадают показатели групп G^γ и G_1^γ и, при этом, изоморфны конечные группы G^γ/H и G_1^γ/H_1 (см. обозначения теоремы 1. 3).

Доказательство. Теорема 1. 4 непосредственно вытекает из теоремы 1. 3 и теоремы 1. 2.

§ 2. Полупростые групповые алгебры счетных примарных абелевых групп

В этом параграфе находятся необходимые и достаточные условия изоморфизма групповых алгебр GK и G_1K двух счетных абелевых p -групп G и G_1 над полем K , характеристика которого не совпадает с простым p . Устанавливаются также необходимые и достаточные условия изоморфизма комплексных и вещественных групповых алгебр счетных периодических абелевых групп.

На всем протяжении параграфа рассматриваются только групповые алгебры над полем, характеристика которого не делит порядки элементов группы. В дальнейшем всегда будет предполагаться, что $\text{char } K \neq p$.

Напомним некоторые факты о полупростых групповых алгебрах конечных абелевых p -групп. Пусть G -конечная абелева p -группа типа $[\alpha_1, \dots, \alpha_s]$ ($\alpha_1 \cong \dots \cong \alpha_s$), а ξ -первообразный корень степени p^{α_1} из 1. Образует поле $K(\xi) = F$. Групповая алгебра GF разлагается в прямую сумму $(G:1) = t$ одномерных (над F) идеалов:

$$GF = I'_1 + \dots + I'_t.$$

Каждый идеал I'_i порождается минимальным идемпотентом

$$e'_i = \frac{1}{(G:1)} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1})g,$$

где $\chi_i(g)$ ($i = 1, \dots, t$)-характер группы G над полем F .

Множество характеров $\chi_i(g)$ группы G распадается на непересекающиеся подмножества (K -классы).

$$(2.1) \quad \{\chi_{11}, \dots, \chi_{1r_1}\}, \dots, \{\chi_{s1}, \dots, \chi_{sr_s}\}$$

K -сопряженных между собой характеров (характеров, переходящих друг в друга под действием автоморфизмов $\xi \rightarrow \xi^\mu$ поля F над K). Подмножествам (2.1) соответствуют подмножества K -сопряженных между собой минимальных идемпотентов алгебры GK :

$$\{e'_{11}, \dots, e'_{1r_1}\}, \dots, \{e'_{s1}, \dots, e'_{sr_s}\}$$

Минимальные идемпотенты $e_1, \dots, e_s$ алгебры GK получаются в результате сложения K -сопряженных минимальных идемпотентов алгебры GK :

$$e_i = e'_{i1} + \dots + e'_{ir_i} \quad (i = 1, \dots, s).$$

Обозначим через $K(\chi)$ поле, полученное в результате присоединения к полю K всех значений характера χ группы G . Если характер χ имеет ядро H и $(G:H) = m$ то $K(\chi) = K(\varepsilon)$, где ε -первообразный корень степени m из 1.

Ввиду (2.1) и (2.1'), минимальный идеал $I_i = GKe_i$ алгебры GK изоморфен полю $K(\chi_{i1}) = \dots = K(\chi_{ir_i})$. Очевидно, $(K(\chi_{ij}):K) = r_i$ ($i = 1, \dots, s$).

Определение 2.1. Введем обозначение: $w_G(e_i) = r_i$. Число r_i назовем весом минимального идемпотента e_i алгебры GK ($i = 1, \dots, s$).

Так как G -примарная группа, то вес $w_G(e_i)$ определяет поле I_i ($i = 1, \dots, s$) с точностью до изоморфизма.

В соответствии с разбиением (2.1), множество элементов группы G распадается на K -классы $T_1, \dots, T_s$. По определению элементы $a, b \in G$ принадлежат одному K -классу тогда и только тогда, когда $b = a^\mu$, где μ -такое целое число, что отображение $\xi \rightarrow \xi^\mu$ является автоморфизмом поля $F = K(\xi)$ над K .

Порядки K -классов $T_1, \dots, T_s$ (после соответствующей их перенумерации) совпадают с числами $r_1, \dots, r_s$. Таким образом, имеет место теорема [3]:

Теорема 2.1. Групповые алгебры GK и G_1K двух конечных абелевых p -групп G и G_1 изоморфны тогда и только тогда, когда группы G и G_1 распадаются на одно и то же число K -классов и порядки соответствующих K -классов этих групп совпадают.

Из приведенных выше фактов о групповых алгебрах конечных абелевых p -групп легко вытекают следующие леммы:

Лемма 2.1. Пусть G -конечная абелева p -группа типа $[\alpha_1, \dots, \alpha_s]$ ($\alpha_1 \cong \dots \cong \alpha_s$), H циклическая группа порядка p^{α_1} , а ξ_i -первообразный корень степени p^i из 1 ($i = 0, 1, \dots$). Разложение алгебры GK в прямую сумму полей

$$(2.2) \quad GK = I_1 + \dots + I_q$$

содержит те и только те поля, которые встречаются в разложении алгебры HK (без учета кратностей вхождения). Каждый идеал I_i изоморфен полю $K(\xi_j)$, где $0 \leq j \leq \alpha_1$. Наоборот, произвольное поле $K(\xi_j)$ ($0 \leq j \leq \alpha_1$) встречается среди полей I_i в разложении (2.2).

Лемма 2.2. Пусть H -подгруппа конечной абелевой группы G . Тогда полная система представителей K -классов характеров группы G получится, если мы выберем такую систему $\{\psi_1, \dots, \psi_r\}$ для группы H , продолжим каждый характер ψ_i до характеров $\psi_{i1}, \dots, \psi_{in}$ ($n=(G:H)$) группы G и среди характеров ψ_{ij} для каждого i выделим несопряженные (над K) характеры: $\psi_{ij_1}, \dots, \psi_{ij_{q_i}}$.

Лемма 2.3. Пусть ψ -характер подгруппы H конечной p -группы G , $\chi_1, \dots, \chi_q$ — все характеры группы G , индуцирующие на H характер ψ , а e -минимальный идемпотент алгебры HK , соответствующий характеру ψ . Если $(K(\chi_1):K) = \dots = (K(\chi_q):K) = m$, то вес $w_G(e_i)$ каждого минимального идемпотента e_i алгебры GK , возникающего в разложении идемпотента e , равен m .

Лемма 2.4. Пусть конечная абелева p -группа G представляется в виде прямого произведения: $G = G_1 \times G_2$. Пусть e -минимальный идемпотент алгебры G_1K и $w_{G_1}(e) = n$. Пусть $1 = e'_1 + \dots + e'_q$ -разложение единицы алгебры G_2K , в сумму минимальных идемпотентов этой алгебры, где $w_{G_2}(e_i) = m_i$ ($m_1 \geq \dots \geq m_q$), и пусть $e = e_1 + \dots + e_t$ -разложение идемпотента e в сумму минимальных идемпотентов алгебры GK . Если $n \geq m_1$, то $w_G(e_i) = n$ ($i = 1, \dots, t$). Если $n < m_1$ то множество различных весов идемпотентов $e_1, \dots, e_t$ алгебры GK совпадает с множеством $\{n, n+1, \dots, m_1\}$.

Лемма 2.5. Пусть K -произвольное поле ($\text{char } K \neq p$), ξ_i -первообразный корень степени p^i из 1 ($i = 1, 2, \dots$) и $q = 1$ ($q = 2$), если $p \neq 2$ ($p = 2$). Либо для всех натуральных $j \geq q$

$$(2.3) \quad K(\xi_q) = K(\xi_j),$$

либо существует такое натуральное число $f = f(K)$, что

$$(2.4) \quad K(\xi_q) = K(\xi_{q+1}) = \dots = K(\xi_f) \subset K(\xi_{f+1}) \subset \dots$$

Лемма 2.5 является известным фактом теории круговых полей (см., например [4]).

Следствие. Пусть для поля K и простого числа p выполняются условия (2.4). Тогда при $i \geq f$

$$(K(\xi_i):K(\xi_f)) = p^{i-f}.$$

Доказательство. Пусть $H=(\psi)$ -группа Галуа поля $K(\xi_i)$ над подполем $K(\xi_f)$ и $\psi(\xi_i) = \xi_i^\mu$. Не нарушая общности рассуждений, можно предполагать, что $\xi_f = \xi_i^{p^{i-f}}$. Так как $\psi(\xi_i^{p^{i-f}}) = \xi_i^{\mu p^{i-f}}$, то $\mu p^{i-f} \equiv p^{i-f} \pmod{p^i}$, т. е. $\mu \equiv 1 \pmod{p^f}$. При этом, $\mu \not\equiv 1 \pmod{p^{f+1}}$, так как в противном случае автоморфизм ψ оставлял бы на месте элемент ξ_{f+1} . Отсюда, легко получить, что число μ принадлежит показателю p^{i-f} по $\text{mod } p^i$, т. е. порядок группы H равен p^{i-f} . Утверждение доказано.

Лемма 2.5'. Пусть G -циклическая группа порядка p^x , а K -произвольное поле ($\text{char } K \neq p$), удовлетворяющее условию (2.4). Пусть $\alpha \equiv f$ (см. 2.4), а G_1 -подгруппа группы G порядка p^f . Тогда множество минимальных идемпотентов алгебры GK , соответствующих точным*) абсолютно неприводимым

*) Характер χ абелевой группы G называется точным, если ядро представления χ равно 1.

характерам группы, совпадает с множеством минимальных идемпотентов алгебры G_1K , соответствующих точным характерам группы G_1 .

Доказательство. Пусть $G = \langle a \rangle$. Подгруппу G_1 можно записать в виде $G_1 = \langle a^m \rangle$, где $m = p^{\alpha-f}$. Пусть ξ -первообразный корень порядка p^α из единицы, а $\varepsilon = \xi^m$ -первообразный корень из единицы степени p^f . Образует минимальные идемпотенты e' и u' соответственно алгебр $GK(\xi)$ и $G_1K(\varepsilon)$:

$$e' = \frac{1}{(G:1)} \sum_{j=1}^{(G:1)} \xi^j a^j; \quad u' = \frac{1}{(G_1:1)} \sum_{j=1}^{(G_1:1)} \varepsilon^j a^{mj}.$$

Пусть e и u -минимальные идемпотенты алгебр GK и G_1K , соответствующие идемпотентам e' и u' . Ввиду равенства $u'e' = e'$, также $ue = e$, и, следовательно, $GKe \subseteq GK u$. Идеал GKe изоморфен полю $K(\xi)$, а идеал G_1Ku изоморфен полю $K(\varepsilon)$. Пусть $(K(\varepsilon):K) = t$. Тогда размерность идеала GKu над полем K равна $t(G:G_1) = tp^{\alpha-f}$. С другой стороны, в силу следствия из леммы 2. 5, $(K(\xi):K) = tp^{\alpha-f}$. Таким образом, размерности идеалов GKe и GKu над полем K совпадают. Следовательно, $GKe = GK u$ и $e = u$. Лемма доказана.

Следствие. Пусть G -циклическая p -группа, а H и G_1 -такие подгруппы G , что $C_1 \cong H$ и $(G_1:H) = p^f$ (см. 2. 4). Тогда множество минимальных идемпотентов алгебры GK , соответствующих характерам группы G с ядром H , совпадает с множеством минимальных идемпотентов подалгебры G_1K , соответствующих характерам группы G_1 с тем же ядром H .

Определение 2. 2. Поле K ($\text{char } K \neq p$), для которого выполняются условия (2. 3) соответственно (2. 4) будем называть полем второго рода (соответственно полем первого рода) относительно простого числа p .

Лемма 2. 6. Каждое конечномерное представление Γ локально конечной группы G над полем K , характеристика которого не делит порядки элементов группы G , вполне приводимо. Представление Γ неприводимо тогда и только тогда, когда для некоторой конечной подгруппы H группы G индуцированное представление $\Gamma \downarrow(H)$ -неприводимо.

Доказательство. Рассмотрим совокупность матриц $\{\Gamma(g)\}$ ($g \in G$). Так как Γ -конечномерное представление группы G , то из множества $\{\Gamma(g)\}$ можно выделить максимальную линейную независимую подсистему $\Gamma(g_1), \dots, \Gamma(g_t)$, содержащую только конечное число матриц. Обозначим через H конечную подгруппу G , порожденную элементами $g_1, \dots, g_t$. Очевидно, представление Γ неприводимо тогда и только тогда, когда индуцированное представление $\Gamma \downarrow(H)$ -неприводимо. Представление $\Gamma \downarrow(H)$ -вполне приводимо, и поэтому представление Γ также вполне приводимо. (Лемма 2. 6 хорошо известна. Мы привели доказательство леммы для полноты изложения.)

Лемма 2. 7. Пусть G -счетная абелева p -группа без элементов бесконечной высоты, а K -поле ($\text{char } K \neq p$). Тогда для любого элемента $x \in GK$ найдется такое неприводимое конечномерное представление Γ алгебры GK , что $\Gamma(x) \neq 0$.

Доказательство. Группа G разлагается в прямое произведение циклических p -групп: $G = \langle a_1 \rangle \times \dots \times \langle a_s \rangle \times \dots$. Пусть $G_s = \langle a_1 \rangle \times \dots \times \langle a_s \rangle$. Очевидно,

$x \in G_s K$ для достаточно большого натурального s . Алгебра $G_s K$ обладает неприводимым представлением Γ , для которого $\Gamma(x) \neq 0$, причем это представление естественным образом продолжается до представления алгебры GK .

Лемма 2.8. Пусть G -счетная абелева p -группа, а P -подгруппа элементов бесконечной высоты в G . Если K -поле первого рода относительно простого p (см. определение 2.2), то подгруппа P совпадает с пересечением ядер всех конечномерных неприводимых представлений группы G над полем K .

Доказательство. Пусть Γ -неприводимое конечномерное представление группы G над полем K . Ввиду леммы 2.6, Γ индуцирует неприводимое представление некоторой конечной подгруппы H группы G . Пусть $a \in P$ и $\Gamma(a) \neq E$ (E -единичная матрица). Представление Γ неприводимо на любой подгруппе $Q \cong H$. Пусть Γ' -ограничение представления Γ на подгруппу $H' = \{H, a\}$, а χ' -абсолютно неприводимый характер группы H' , соответствующий представлению Γ . Тогда $\chi'(a) = \varepsilon \neq 1$ ($\varepsilon^{p^n} = 1$). Пусть g_n -такой элемент группы G , что $g_n^{p^n} = a$, где n -произвольное натуральное число, а $\chi^{(n)}$ -характер группы $\{H, g_n\}$, индуцирующий на H' характер χ' . Тогда $\chi^{(n)}(g_n) = \xi_n$, где $\xi_n^{p^n} = \varepsilon$. Так как K -поле первого рода, то $(K(\xi_n):K) \rightarrow \infty$, если $n \rightarrow \infty$. С другой стороны, степень m представления Γ совпадает с числом $(K(\chi^{(n)}):K)$ для любого натурального n . Мы получили противоречие, так как $(K(\chi^{(n)}):K) = (K(\xi_n):K)$. Следовательно, $\Gamma(a) = E$ для любого элемента $a \in P$.

Пусть $g \in P$. Так как фактор-группа G/P разлагается в прямое произведение циклических групп, то существует такое неприводимое конечномерное представление Γ группы G/P , что $\Gamma(gP) \neq E$. Представление Γ можно, очевидно, рассматривать как представление группы G над полем K , причем элемент g не содержится в ядре этого представления. Лемма доказана.

Лемма 2.9. Пусть G -периодическая абелева группа, а K -поле характеристика которого не делит порядки элементов группы G .

Если идеал I алгебры GK порождается конечным числом элементов алгебры, то I порождается также идемпотентом e , и, следовательно, через I можно провести прямое разложение алгебры GK :

$$GK = I \oplus I_1 \quad (I_1 = GK(1-e)).$$

Доказательство. Пусть $I = (x_1, \dots, x_s)$. Существует конечная подгруппа $H \subset G$, такая, что $x_i \in HK$ ($i = 1, \dots, s$). Идеал $HKx_1 + \dots + HKx_s$ алгебры HK порождается идемпотентом e . Очевидно, $I = GKe$.

Лемма 2.10. Пусть G -счетная абелева p -группа, P -подгруппа элементов бесконечной высоты в G . K -поле первого рода (относительно p), а V -идеал алгебры GK , порожденный всеми элементами $a-1$ ($a \in P$). Идеал V совпадает с пересечением V' ядер всех неприводимых конечномерных представлений алгебры GK .

Доказательство. Ввиду леммы 2.7, $(a-1) \in V'$ для любого элемента $a \in P$. На основании леммы 1.1, имеет место изоморфизм $GK/V \cong G_1 K$, где $G_1 = G/P$. Так как группа G_1 разлагается в прямое произведение циклических групп, то по лемме 2.7 для каждого класса $(x+V) \neq V$ алгебры GK/V найдется

такое неприводимое конечномерное представление Γ этой алгебры, что $\Gamma(x+V) \neq 0$. Γ можно также рассматривать как представление алгебры GK , и элемент x не содержится в ядре Γ . Таким образом, $V=V'$. Лемма доказана.

Следствие. Пусть $G(G_1)$ -счетная абелева p -группа, $P(P_1)$ -подгруппа элементов бесконечной высоты в $G(G_1)$, $H=G/P$ ($H_1=G_1/P_1$), K -поле первого рода относительно простого p , а $V(V_1)$ -идеал алгебры $GK(G_1K)$, порожденный всеми элементами $a-1$ (a_1-1), где $a \in P$ ($a_1 \in P_1$). Если существует изоморфизм $\theta: GK \rightarrow G_1K$, то 1. $HK \cong H_1K$; 2. Группы G и G_1 одновременно являются полными группами или группами без элементов бесконечной высоты. 3. Если P -конечная группа, то группа P_1 также конечна.

Доказательство. В силу леммы 2. 10 идеал $V(V_1)$ является пересечением ядер всех неприводимых конечномерных представлений алгебры $GK(G_1K)$ и поэтому $\theta(V)=V_1$. Следовательно, $GK/V \cong G_1K/V_1$. На основании леммы 2. 10 и леммы 1. 1, $GK/V \cong HK$, $G_1K/V_1 \cong H_1K$, и, значит, $HK \cong H_1K$. Из леммы 2. 10 далее вытекает, что группа $G(G_1)$ тогда и только тогда является полной группой (группой без элементов бесконечной высоты), когда HK (H_1K)-одномерная алгебра (соответственно, когда $V=0$, ($V_1=0$)). Отсюда следует утверждение 2.

Предположим, что подгруппа P -конечна. Тогда, в силу леммы 2, 9 идеал V порождается идемпотентом e . Если P_1 -бесконечная группа, то идеал V_1 не может порождаться идемпотентом e_1 . В самом деле, идемпотент $e_1 \in V_1$ принадлежит некоторой подалгебре G'_1K , где G'_1 -конечная подгруппа группы G_1 . Очевидно, существует такой элемент $a_1 \in P_1$, что $a_1 \notin G'_1$. Тогда $(a_1-1) \in V_1$ и $(a-1)e_1 \neq (a_1-1)$. Полученное противоречие доказывает, что подгруппа P_1 конечна, откуда следует последнее утверждение леммы.

Лемма 2. 11. Пусть G и G_1 -счетные абелевы p -группы без элементов бесконечной высоты, а K -поле ($\text{char } K \neq p$). Если K -поле первого рода и $GK \cong G_1K$ то порядки элементов групп G и G_1 одновременно ограничены или неограничены. Предположим, что G и G_1 -группы с ограниченными порядками элементов, $p^{\alpha}(p^{\alpha_1})$ -показатель группы $G(G_1)$, $p^{\beta}(p^{\beta_1})$ -наибольший из порядков тех циклических множителей, которые счетное число раз встречаются в прямом разложении группы $G(G_1)$, $\xi(\xi_1)$ -первообразный корень степени $p^{\alpha}(p^{\alpha_1})$ из единицы, а $\varepsilon(\varepsilon_1)$ -первообразный корень из единицы степени $p^{\beta}(p^{\beta_1})$. Пусть $GK \cong G_1K$. Тогда $(K(\xi):K) = (K(\xi_1):K)$, $(K(\varepsilon):K) = (K(\varepsilon_1):K)$.

Доказательство. Рассмотрим разложения групп G и G_1 в прямое произведение циклических групп:

$$(2.8) \quad G = (a_1) \times \dots \times (a_s) \times \dots,$$

$$(2.9) \quad G_1 = (b_1) \times \dots \times (b_s) \times \dots$$

Предположим, что порядки элементов группы G ограничены и p^{α} -показатель этой группы. Пусть $F=K(\xi)$, где K -поле первого рода, а ξ -первообразный корень степени p^{α} из единицы. Ввиду лемм 2. 6 и 2. 4, степени неприводимых представлений группы G не превышают числа $(F:K)$. Если бы порядки элементов группы G_1 были не ограничены, то подгруппа $G_1^{(s)} = (b_1) \times \dots \times (b_s)$ группы G_1 для достаточно большого s обладала бы неприводимым K -пред-

ставлением Γ , степень которого превышала бы $(F:K)$, причем Γ продолжалось бы до представления группы G_1 . Значит, показатель группы G_1 также конечен.

Рассмотрим векторы (p^α, p^β) и $(p^{\alpha_1}, p^{\beta_1})$ для групп G и G_1 с ограниченными порядками элементов. Наибольшие степени неприводимых представлений групп G и G_1 над полем K равны соответственно $(K(\xi):K)$ и $(K(\xi_1):K)$. Так как $GK \cong G_1K$, то $(K(\xi):K) = (K(\xi_1):K)$. Предположим, что $(K(\varepsilon):K) < (K(\varepsilon_1):K)$ (см. обозначения в формулировке леммы).

Представим группу G в виде прямого произведения: $G = G'' \times G'$, где G' -прямое произведение тех циклических прямых множителей в (2.8), порядки которых превышают p^β , а G'' -группа с показателем p^β . Обозначим через I идеал алгебры GK , порожденный элементами $a-1$, где $a \in G'$. В силу леммы 1.1, $GK/I \cong G''K$. Степени неприводимых представлений алгебры $G''K$ не превышают $(K(\varepsilon):K)$. В силу изоморфизма между алгебрами GK и G_1K алгебра G_1K должна обладать таким идеалом I_1 , что I_1 порождается конечным числом элементов, а степени неприводимых представлений фактор-алгебры G_1K/I_1 не превышают $(K(\varepsilon):K)$.

На основании леммы 2.9, имеет место прямое разложение: $G_1K = I_1 + I_2$, где идеал $I_1(I_2)$ порождается идемпотентом $e_1 \in G'_1K (e_2 \in G'_1K)$ G'_1 -конечная подгруппа группы G_1). Не нарушая, общности рассуждений, можно считать, что

$$G'_1 = (b_1) \times \dots \times (b_l).$$

Пусть e'_2 -минимальный идемпотент алгебры G'_1K принадлежащий идеалу G'_1Ke_2 , а ψ -абсолютно неприводимый характер группы G'_1 , соответствующий идемпотенту e'_2 . В силу условий леммы, существует подгруппа $(b_i) \subset G_1$ ($i > t$) порядка p^{β_1} . Образует подгруппу $G''_1 = G'_1 \times (b_i)$. Применяя лемму 2.4, получим, что в разложении идемпотента e'_2 в ортогональную сумму минимальных идемпотентов алгебры G'_1K возникает идемпотент e_3 с весом $m \equiv (K(\varepsilon_1):K)$. Тогда неприводимое представление Γ группы G''_1 над полем K соответствующее идемпотенту e_3 , имеет степень m . Продолжим Γ до представления алгебры G_1K . Так как идемпотенты e_3 и e_1 попарно ортогональны, то $\Gamma(e_1) = 0$. Следовательно, для любого элемента $x \in I_1$ $\Gamma(x) = 0$, и Γ можно рассматривать как неприводимое представление фактор-алгебры G_1K/I_1 . Мы получили противоречие, так как степени неприводимых представлений алгебры G_1K/I_1 не превышают $(K(\varepsilon):K)$, а степень Γ равна $m \equiv (K(\varepsilon_1):K) > (K(\varepsilon):K)$. Итак, $(K(\varepsilon):K) = (K(\varepsilon_1):K)$. Лемма доказана.

Лемма 2.12. Пусть G -счетная абелева p -группа, а K -поле первого рода относительно простого p . Алгебра GK тогда и только тогда содержит минимальные идеалы, когда группа G представляется в виде прямого произведения: $G = P \times G_1$, где P -группа p^∞ , а G_1 -конечная группа.

Доказательство. Пусть алгебра GK содержит минимальный идеал I ($I \neq 0$). Так как $I^2 \neq 0$, то идеал I порождается идемпотентом $e \in HK$, где H -конечная подгруппа группы G . Обозначим через N ядро неприводимого представления группы H над полем K , соответствующего идемпотенту e . Пусть G' -произвольная конечная подгруппа группы G , содержащая подгруппу N . Так как e -минимальный идемпотент алгебры $G'K$, G'/N -циклическая группа, ибо подгруппа N является ядром абсолютно неприводимого характера ψ

группы G' , соответствующего идемпотенту e , а ψ осуществляет гомоморфизм группы G' на циклическую группу. Таким образом группа G содержит такую конечную подгруппу N , что для любой конечной подгруппы $G' \cong N$ факторгруппа G'/N -циклическа. Отсюда сразу следует, что группа G записывается в виде прямого произведения группы p^∞ на конечную группу. Наоборот, если $G = P \times G_1$ (P -группа p^∞ , G_1 -конечная группа), то алгебра GK содержит минимальные идеалы. В самом деле, пусть P_f -подгруппа группы P порядка p^f , где $f=f(K)$ (см. 2,4). В силу леммы 2.5, минимальный идемпотент e алгебры $P_f K$, соответствующий точному характеру группы P_f , остается минимальным для любой циклической подгруппы $\tilde{P} \cong P_f$ ($\tilde{P} < P$). Пусть $x \neq 0$ -произвольный элемент алгебры PK и $xe \neq 0$. Пусть $xe \in \tilde{P}K$, где $\tilde{P} \cong P_f$ -конечная подгруппа группы P . Так как $\tilde{P}Ke$ -минимальный идеал алгебры $\tilde{P}K$, то для некоторого элемента $y \in \tilde{P}K$ $yx = e$. Следовательно, $\frac{1}{(G_1:1)}(\sum_{g \in G_1} g)e$ порождает минимальный идеал алгебры GK . Лемма доказана.

Леммы 2.11, 2.12 и следствие из леммы 2.10 дают ряд необходимых условий изоморфизма групповых алгебр счетных примарных абелевых групп. Рассмотрим вспомогательные конструкции, которые будут применены для изучения достаточных условий изоморфизма.

Пусть H -конечная подгруппа p -группы G , e -минимальный идемпотент алгебры HK , χ -представитель множества K -сопряженных характеров группы H , соответствующих идемпотенту e , а $I = HKe$ -минимальный идеал алгебры HK , порожденный идемпотентом e

$$\left(e = \frac{1}{(H:1)} \sum_{g \in H} x(g^{-1})g \right). \quad \text{Если } x \in \left(\sum_{g \in H} \alpha_g g \right) e \in I \quad (\alpha_g \in K),$$

то положим

$$(2.10) \quad \theta(x) = \sum_{g \in H} \alpha_g \chi(g).$$

Отображение θ определяет изоморфизм поля I на поле $K(\chi)$. Оно зависит от выбора характера χ в K -классе характеров группы H , соответствующем минимальному идемпотенту e алгебры HK .

В силу формулы (2.10), произвольному элементу $\lambda \in K(\chi)$ соответствует однозначно определенный элемент $xe \in I$, для которого мы введем обозначение λe . Чтобы получить элемент $\lambda e \in I$ достаточно произвольным образом записать элемент $\lambda \in K(\chi)$ в виде $\lambda = \sum_{g \in H} \alpha_g \chi(g)$ ($\alpha_g \in K$). Тогда

$$(2.10) \quad \lambda e = \left(\sum_{g \in H} \alpha_g g \right) e.$$

Пусть идемпотент $e \in GK$ представляется в виде суммы попарно ортогональных идемпотентов $e = e_1 + \dots + e_s$, где e_i -минимальный идемпотент подалгебры $H_i K$ ($H_i \subseteq G$ -конечная группа; $i=1, \dots, s$), а $\chi_1, \dots, \chi_s$ -произвольным образом выбранные представители K -классов характеров соответственно

подгрупп $H_1, \dots, H_s$, соответствующие идемпотентам $e_1, \dots, e_s$. Если $\lambda = \bigcap_{i=1}^s K(\chi_i)$, то условимся употреблять запись

$$(2.11) \quad \lambda e_1 + \dots + \lambda e_s = \lambda \circ e.$$

Лемма 2.13. Пусть e -минимальный идемпотент алгебры HK (H -конечная подгруппа группы G), а χ -соответствующий e абсолютно неприводимый характер. Предположим, что идемпотент e разлагается в сумму попарно ортогональных идемпотентов $e = e_1 + \dots + e_s$, где e_i -минимальный идемпотент алгебры $H_i K$ ($H_i \supseteq H$; $i = 1, \dots, s$).

Пусть абсолютно неприводимые характеры $\chi_1, \dots, \chi_s$ конечных групп $H_1, \dots, H_s$, соответствующие идемпотентам $e_1, \dots, e_s$, выбраны таким образом, что каждый из них индуцирует на подгруппе H характер χ . Если $\lambda \in K(\chi)$, то

$$(2.12) \quad \lambda e = \lambda_1 + \dots + \lambda e_s.$$

(Элементы $\lambda e, \lambda e_i$ определяются в соответствии с формулой (2.10))

Доказательство. Пусть $\lambda = \sum_{g \in H} \alpha_g \chi(g)$ ($\alpha_g \in K$). Тогда, в силу (2.10),

$$\begin{aligned} \lambda e &= \left(\sum_{g \in H} \alpha_g g \right) e = \left(\sum_{g \in H} \alpha_g g \right) e_1 + \dots + \left(\sum_{g \in H} \alpha_g g \right) e_s = \\ &= \left(\sum_{g \in H} \alpha_g \chi_1(g) \right) e_1 + \dots + \left(\sum_{g \in H} \alpha_g \chi_s(g) \right) e_s = \lambda e_1 + \dots + \lambda e_s. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Определение 2.3. Пусть G -счетная абелева p -группа и

$$(3.13) \quad G_1 \subset G_2 \subset \dots$$

такая возрастающая последовательность конечных подгрупп группы G , что $\bigcup_i G_i = G$. Образует алгебру GK ($\text{char } K \neq p$). Назовем деревом идемпотентов алгебры GK , соответствующим последовательности (2.13), совокупность идемпотентов $\{e_{r_1, \dots, r_m}^{i_1, \dots, i_m}\}$ (m пробегает натуральный ряд) алгебры GK , удовлетворяющую следующим условиям:

1. Идемпотент $e_{r_1, \dots, r_m}^{i_1, \dots, i_m} = e_u$ однозначно определяется вектором $u = (i_1, \dots, i_m, r_1, \dots, r_m)$ с натуральными компонентами. При фиксированном m множество векторов $M_m = \{(i_1, \dots, i_m, r_1, \dots, r_m)\}$ -конечно.

2. $\sum_{u \in M_m} e_u = 1$. Если $u, v \in M_m$ и $u \neq v$, то $e_u \cdot e_v = 0$ ($m = 1, 2, \dots$).

3. Каждый идемпотент e_u ($u = (i_1, \dots, i_m, r_1, \dots, r_m) \in M_m$; $m = 1, 2, \dots$) представляется в виде суммы попарно ортогональных идемпотентов: $e_u = e_u^{(1)} + \dots + e_u^{(j)}$ (индекс j зависит от вектора $u \in M_m$), где $e_u^{(i)}$ -минимальный идемпотент веса r_m некоторой подгруппы $F_u^i \supseteq G_m$ ($i = 1, \dots, j$). Если $m = 1$, то $e_u \in G_1 K$, а каждая подгруппа $F_u^i (u \in M_1)$ совпадает с подгруппой G_1 .

4. Пусть $u = (\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_m, \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_m) \in M_m$ фиксированный вектор, а $M_{m+1}^{(u)}$ — подмножество множества M_{m+1} , состоящее из всех векторов $v \in M_{m+1}$ вида

$v = (\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_m, i_{m+1}, \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_m, r_{m+1})$ (векторы $v \in M_{m+1}^{(u)}$ могут отличаться друг от друга только $(m+1)$ -ой и $2(m+1)$ -ой компонентами). Тогда $e_v = \sum_{v \in M_{m+1}^{(u)}} e_v$.

5. Пусть $e^{(1)}, \dots, e^{(n)}$ -фиксированная последовательность, элементами которой являются минимальные идемпотенты подалгебр $G_j K$ ($j=1, 2, \dots$), где сначала расположены все минимальные идемпотенты алгебры $G_1 K$, затем все минимальные идемпотенты алгебры $G_2 K$ и т. д. Тогда идемпотент $e^{(i)}$ представляется в виде суммы идемпотентов e_u , где $u \in M_i$ ($i=1, 2, \dots$).

Определение 2.4. Пусть

$$D = \{e_{r_1, \dots, r_m}^{i_1, \dots, i_m}\} \quad \text{и} \quad D' = \{e_{r'_1, \dots, r'_m}^{i'_1, \dots, i'_m}\} \quad —$$

деревья идемпотентов соответственно для алгебр GK и HK (деревья строятся по отношению к фиксированным возрастающим последовательностям конечных подгрупп в группах G и H). Будем говорить, что эти деревья изоморфны, если для каждого натурального m совпадают множества векторов

$$M_m = \{(i_1, \dots, i_m, r_1, \dots, r_m)\} \quad \text{и} \quad M'_m = \{(i'_1, \dots, i'_m, r'_1, \dots, r'_m)\}.$$

Следующая лемма будет играть важную роль для исследования достаточных условий изоморфизма групповых алгебр счетных примарных абелевых групп.

Лемма 2.14. Пусть G' и H' -счетные абелевы p -группы. Если в алгебрах $G'K$ и $H'K$ ($\text{char } K \neq p$) можно построить изоморфные деревья идемпотентов, то эти алгебры изоморфны.

Доказательство. Пусть

$$D = \{e_{r_1, \dots, r_m}^{i_1, \dots, i_m}\} \quad \text{и} \quad \tilde{D} = \{e_{r'_1, \dots, r'_m}^{i'_1, \dots, i'_m}\} \quad —$$

изоморфные деревья идемпотентов для алгебр $G'K$ и $H'K$, соответствующие возрастающим последовательностям подгрупп

$$G'_1 \subset \dots \subset G'_s \subset \dots, \quad H'_1 \subset \dots \subset H'_s \subset \dots \quad (\bigcup_i G'_i = G'; \bigcup_i H'_i = H').$$

Для каждого натурального m эти деревья определяют одно и то же множество $M_m = \{(i_1, \dots, i_m, r_1, \dots, r_m)\}$.

Положим $G = G'$, $H' = H'$ и соответственно $G_i = G'_i$, $H'_i = H'_i$ ($i=1, 2, \dots$). Выделим из последовательности

$$G_1 \subset \dots \subset G_s \subset \dots$$

подпоследовательность

$$(2.14) \quad G_{m_1} \subset G_{m_3} \subset \dots \subset G_{m_{2s+1}} \subset \dots$$

Подпоследовательность (2.14) строится индуктивно. На первом шаге индукции полагаем $G_{m_1} = G_1$. Если уже построена подгруппа $G_{m_{2s+1}}$ ($s \geq 0$), то в силу свойств 5 и 4 дерева идемпотентов (см. определение 2.3) существует такой индекс m_{2s+2} , один и тот же при $G = G'$, $H' = H'$, что каждый минимальный идемпотент $e \in G_{m_{2s+1}}K$ представляется в виде суммы

$$(2.15) \quad e = \sum e_u, \quad \text{где} \quad u \in M_{m_{2s+2}}.$$

Из свойства 2 дерева следует, что в правой части (2. 15) встретятся все идемпотенты e_u при $u \in M_{m_{2s+2}}$, если элемент e в левой части пробегает все минимальные идемпотенты алгебры $G_{m_{2s+2}}K$. Запишем разложение каждого из идемпотентов e_u ($u \in M_{m_{2s+2}}$) в соответствии со свойством 3 дерева:

$$(2. 16) \quad e_u = \sum_i e_u^i,$$

где e_u^i -минимальный идемпотент группы $F_u^i \cong G_{m_{2s+2}}$ (Если $u = (i_1, \dots, i_{m_{2s+2}}, r_1, \dots, r_{m_{2s+2}})$, то вес минимального идемпотента e_u^i группы F_u^i равен r_m). Теперь выбираем такой индекс m_{2s+3} , что при $G = G', H' G_{m_{2s+3}} \supset F_u^i$, для всех подгрупп F_u^i , соответствующих формуле (2. 16). На следующем шаге индукции строится подгруппа $G_{m_{2s+3}}$.

Каждому минимальному идемпотенту e_u^i группы F_u^i ($u \in M_{m_{2s}}; s = 1, 2, \dots$) соответствует K -класс характеров X_u^i группы F_u^i . Произведем теперь специальный выбор представителей K -классов характеров групп $G_{m_{2s+1}}$ ($s = 0, 1, \dots$) и K -классов X_u^i ($u \in M_{m_{2s}}; s = 1, 2, \dots$). На первом шаге индукции произвольным образом отметим систему представителей всех K -классов характеров группы G_{m_1} . Сделаем индуктивное предположение. Предположим, что уже выбрана система представителей $\psi_1, \dots, \psi_r$ K -классов характеров группы $G_{m_{2s-1}}$ ($s \geq 1$). Если характер ψ_j соответствует минимальному идемпотенту e алгебры $G_{m_{2s-1}}K$, то, в силу (2. 15) и (2. 26),

$$(2. 17) \quad e = \sum_{u,i} e_u^i \quad (u \in M_{m_{2s}})$$

Теперь, в каждом из K -классов X_u^i , соответствующих идемпотентам e_u^i в правой части (2. 17), выбираем такие характеры $\chi_1, \dots, \chi_l$, которые на подгруппе $G_{m_{2s-1}}$ индуцируют характер ψ_i .

Так как $F_u^i \subset G_{m_{2s+1}}$ ($u \in M_{m_{2s}}$), то каждый характер χ_j ($j = 1, \dots, l$) допускает продолжение до характеров группы $G_{m_{2s+1}}$. Пусть $\psi_{i1}, \dots, \psi_{in_i}$ -все характеры группы $G_{m_{2s+1}}$, продолжающие характер χ_i . Тогда характеры ψ_{ij} и ψ_{i1j_1} группы $G_{m_{2s+1}}$ при $i \neq i_1$ не могут быть K -сопряжены.

В самом деле, обозначим соответственно через e_{ij} и e_{i1j_1} минимальные идемпотенты алгебры $G_{m_{2s+1}}K$, соответствующие характерам ψ_{ij} и ψ_{i1j_1} . Если последние K -сопряжены то $e_{ij} = e_{i1j_1}$. Пусть $e_{u_1}^{t_1} \in F_{u_2}^{t_1}K$ и $e_{u_2}^{t_2} \in F_{u_2}^{t_2}K$ ($u_1, u_2 \in M_{m_{2s}}$)-идемпотенты, соответствующие характерам χ_i и χ_{i_1} . Тогда $e_{u_1}^{t_1}e_{ij} = e_{ij}$; $e_{u_2}^{t_2}e_{i1j_1} = e_{i1j_1}$ и $e_{u_1}^{t_1}e_{u_2}^{t_2} = 0$ что противоречит равенству $e_{ij} = e_{i1j_1}$. Выберем из каждого множества $\psi_{i1}, \dots, \psi_{in_i}$ максимальную систему характеров $\psi_{iq_1}, \dots, \psi_{iq_f}$, попарно несопряженных над полем K . Тогда характеры $\{\psi_{iq_j}\}$ образуют полную систему представителей K -классов характеров группы $G_{m_{2s+1}}$. Действительно, при сложении минимальных идемпотентов алгебры $G_{m_{2s+1}}K$, соответствующих характерам $\psi_{iq_1}, \dots, \psi_{iq_f}$, возникает минимальный идемпотент e_u^i , соответствующий характеру χ_i . Кроме того, идемпотенты e_u^i попарно ортогональны и в сумме дают единицу алгебры GK .

Мы показали, как выбрать представителей K -классов характеров X_u^i ($u \in M_{m_{2s}}$) и представителей K -классов характеров группы $G_{m_{2s+1}}$, если известна система представителей K -классов характеров группы $G_{m_{2s-1}}$ ($s = 1, 2, \dots$).

Занумеруем представителей K -классов характеров X_u^i (для всевозможных векторов $u \in M_{m_{2s}}$ ($s=1, 2, \dots$) и индексов i):

$$(2.18) \quad \chi_1, \dots, \chi_r, \dots$$

В процессе индуктивного построения мы получили также для каждой подгруппы $G_{m_{2s+1}}$ систему представителей T_s K -классов характеров этой группы. Расположим характеры из множества $\bigcup_s T_s$ в последовательность

$$(2.19) \quad \psi_1, \dots, \psi_r, \dots$$

Характеры χ_i и ψ_i удовлетворяют следующему условию: Если χ_i характер подгруппы F_u^j и $u \in M_{m_{2s}}$, то ограничение характера χ_i на любой подгруппе $G_{m_{2k+1}}$ ($2k+1 < 2s$) совпадает с одним из характеров ψ_j , а ограничение χ_i на любой подгруппе F_u^j , где $u \in M_{m_{2k}}$ ($k < s$) совпадает с одним из характеров χ_j . При этом, каждый характер χ_j группы F_u^i (каждый характер ψ_j группы F_u^i) является ограничением некоторого характера χ_i и некоторого характера ψ_i .

Построим теперь изоморфизм между алгебрами $G'K$ и $H'K$. Рассмотрим множество идемпотентов $\{e_u\} \{\tilde{e}_u\}$ алгебры $G'K$ ($H'K$), где вектор $u = (i_1, \dots, i_{m_{2s}}, r_1, \dots, r_{m_{2s}})$ пробегает множество $M_{m_{2s}}$.

Пусть $e_u = e_u^{(1)} + \dots + e_u^{(j)}$, где $e_u^{(i)}$ - минимальный идемпотент веса $r_{m_{2s}}$ подгруппы F_u^i (см. 2.16). Обозначим через K_i поле $K(\xi)$ (ξ - корень некоторой степени p^l из 1) размерности i над K . Так как для каждого идемпотента e_u^i зафиксирован содержащийся в последовательности (2.18) абсолютно неприводимый характер χ_j , то ввиду (2.11) можно образовать элемент

$$(2.20) \quad \lambda \circ e_u = \lambda e_u^{(1)} + \dots + \lambda e_u^{(j)},$$

где $\lambda \in K_{r_{m_{2s}}}$ ($u = (i_1, \dots, i_{m_{2s}}, r_1, \dots, r_{m_{2s}})$).

Пусть $A_s(\tilde{A}_s)$ - подалгебра алгебры $G'K$ ($H'K$), состоящая из всевозможных линейных комбинаций $\sum_{u \in M_{m_{2s}}} \lambda_u \circ e_u$ ($\sum_{u \in M_{m_{2s}}} \lambda_u \circ \tilde{e}_u$), где для каждого вектора $u = (i_1, \dots, i_{m_{2s}}, r_1, \dots, r_{m_{2s}})$ коэффициент λ_u принимает произвольные значения из поля $K_{r_{m_{2s}}}$ ($s=1, 2, \dots$).

Соответствие

$$\theta_s: \sum_{u \in M_{m_{2s}}} \lambda_u \circ e_u \rightarrow \sum_{u \in M_{m_{2s}}} \lambda_u \circ \tilde{e}_u \quad (\lambda_u \in K_{r_{m_{2s}}}),$$

очевидно, является изоморфизмом между алгебрами A_s и $\tilde{A}_s$. Покажем, что $A_s \subset A_{s+1}$ ($\tilde{A}_s \subset \tilde{A}_{s+1}$) и изоморфизм θ_{s+1} является продолжением изоморфизма θ_s . В самом деле, пусть

$$u = (i_1, \dots, i_{m_{2s}}, r_1, \dots, r_{m_{2s}}) \in M_{m_{2s}} \quad \text{и} \quad e_u = e_{u_1} + \dots + e_{u_t}, \quad \text{где} \quad u_j = (\dots, r_{m_{2(s+1)}}^j) \in M_{m_{2(s+1)}} \quad (j=1, \dots, t).$$

Тогда, в силу (2.16), $e_{u_j} = \sum_i e_{u_j}^i$ и $e_u = \sum_{i,j} e_{u_j}^i$ где $e_{u_j}^i$ - минимальный идемпотент группы $F_{u_j}^i$.

Так как $K_{r_{m_{2s}}} \subseteq K_{r_{m_{2(s+1)}}}$ ($j=1, \dots, t$), то в силу (2. 20) для любого элемента $\lambda \in K_{r_{m_{2s}}}$

$$(2.21) \quad \lambda \circ e_u = \sum_{i,j} \lambda e_{u_j}^i = \lambda \circ e_{u_1} + \dots + \lambda \circ e_{u_t}.$$

Аналогично, $\lambda \circ \tilde{e}_u = \lambda \circ \tilde{e}_{u_1} + \dots + \lambda \circ \tilde{e}_{u_t}$. Следовательно, $A_s \subset A_{s+1}$, $\tilde{A}_s \subset \tilde{A}_{s+1}$. Из формулы (2. 21) также сразу вытекает, что изоморфизм θ_{s+1} продолжает изоморфизм θ_s . Покажем теперь, что $\bigcup_i A_i = G'K$. В самом деле, пусть x — произвольный элемент алгебры $G'K$. Тогда найдется такая подгруппа $G'_{m_{2s+1}}$, что $x \in G'_{m_{2s+1}}K$.

Пусть $1 = e_1 + \dots + e_t$ — разложение единицы алгебры $G'_{m_{2s+1}}K$ в сумму минимальных идемпотентов этой алгебры и пусть r_i — вес идемпотента e_i . Тогда $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_t e_t$, где $\lambda_i \in K_{r_i}$ ($i=1, \dots, t$).

По доказанному, каждый элемент $e \in \{e_1, \dots, e_t\}$ можно представить в виде суммы

$$e = e_{u_1} + \dots + e_{u_q},$$

где $u_j = (i_1^{(j)}, \dots, i_{m_{2s+2}}^{(j)}, r_1^{(j)}, \dots, r_{m_{2s+2}}^{(j)}) \in M_{m_{2s+2}}$. Каждый идемпотент e_{u_j} записывается в виде суммы $e_{u_j} = e_{u_j}^{(1)} + \dots + e_{u_j}^{(f)}$, где $e_{u_j}^{(i)}$ — минимальный идемпотент веса $r_{m_{2s+2}}^{(j)}$ некоторой подгруппы $F_{u_j}^i \subseteq G'_{m_{2s+1}}$. Таким образом, $e = \sum_{i,j} e_{u_j}^{(i)}$.

Пусть идемпотент e имеет вес r . Так как $K_r \subseteq K_{r^{(j)}}$ для $j=1, \dots, t$, то для произвольного элемента $\lambda \in K_r$ имеем $\lambda e = \sum_{i,j} \lambda e_{u_j}^i = \lambda \circ e_{u_1} + \dots + \lambda \circ e_{u_t}$ и, следовательно, $\lambda e \in A_{m_{2s+2}}$, т. е. $x \in A_s$. Таким образом,

$$(2.22) \quad \bigcup_i A_i = G'K; \quad \bigcup_i \tilde{A}_i = H'K.$$

Изоморфизм алгебр GK и HK вытекает теперь из (2. 22) и того факта, что изоморфизм θ_{s+1} продолжает изоморфизм θ_s . Лемма доказана.

Лемма 2. 15. Пусть G и H — счетные абелевы p -группы, а K — произвольное поле ($\text{char } K \neq p$). Предположим, что в G и H удалось выделить такие возрастающие последовательности конечных подгрупп

$$(2.23) \quad 1 \subset G_1 \subset \dots \subset G_s \subset \dots \quad (\bigcup_i G_i = G),$$

$$(2.24) \quad 1 \subset H_1 \subset \dots \subset H_s \subset \dots \quad (\bigcup_i H_i = H)$$

что:

1. В алгебрах $G_i K$ ($H_i K$) ($i=1, 2, \dots$) определены минимальные идемпотенты первого и второго рода. Либо для $i \geq 1$ все минимальные идемпотенты алгебр $G_i K$ ($H_i K$) — первого рода, либо для каждого $i \geq 2$ множество минимальных идемпотентов алгебры $G_i K$ ($H_i K$) распадается на непересекающиеся (непустые) подмножества E_1 и E_2 соответственно идемпотентов первого и второго рода. Идемпотент

$$(2.25) \quad e = \frac{1}{(F_i: 1)} \sum_{g \in F_i} g \quad (F_i = G_i, H_i)$$

является идемпотентом первого рода алгебры $F_i K$ ($i=1, 2, \dots$). Если K -поле второго рода относительно простого p , то все минимальные идемпотенты алгебр $F_i K$ -первого рода ($i=1, 2, \dots$).

2. Между множествами минимальных идемпотентов первого рода алгебр $G_1 K$ и $H_1 K$ существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее вес. Множества различных весов минимальных идемпотентов второго рода этих алгебр совпадают.

3. Пусть e -минимальный идемпотент первого рода алгебры $F_i K$ ($F_i = G_i, H_i$) и

$$(2.26) \quad e = e_1 + \dots + e_t$$

-разложение идемпотента e в сумму минимальных идемпотентов алгебры $F_{i+1} K$. Тогда среди идемпотентов e_j в (2.26) обязательно встречаются идемпотенты первого рода. Множество $W = \{r_1, \dots, r_f\}$ различных весов идемпотентов первого рода e_j в (2.26) зависит только от номера i и веса идемпотента e в алгебре $F_i K$.

Каждый минимальный идемпотент второго рода алгебры $F_i K$ ($F_i = G_i, H_i$) разлагается в сумму минимальных идемпотентов второго рода алгебры $F_{i+1} K$ ($i=1, 2, \dots$).

Имеет место одно из следующих условий:

3-а. Пусть $r_j \in W$. Если $r_j \neq 1$ или если $r_j = 1$, но поле K содержит первообразный корень степени p из 1, то в (2.24) встречаются по крайней мере два идемпотента e_j первого рода веса r_j . Если поле K не содержит первообразного корня из 1 степени p , то каждая подалгебра $F_i K$ ($F_i = G_i, H_i$) содержит точно один минимальный идемпотент первого рода веса 1, который имеет вид (2.25).

3-б. Пусть $e_1, \dots, e_q$ -все минимальные идемпотенты первого рода алгебры $F_1 K$ ($F_1 = G_1, H_1$). Каждая подалгебра $F_i K$ содержит точно q минимальных идемпотентов первого рода $e'_1, \dots, e'_q$, причем $e'_i e_i = e'_i$ ($i=1, \dots, q$) и вес идемпотента e'_j (в $F_i K$) совпадает с весом идемпотента e_j (в $F_1 K$).

4. Пусть ε_i -первообразный корень степени p^i из единицы ($i=1, 2, \dots$), а e -идемпотент второго рода алгебры $F_t K$. Произвольной подгруппе F_j ($j \leq t$) можно сопоставить натуральное m , такое, что если $r_i = (K(\varepsilon_i):K) \cong m$, то найдется такая конечная подгруппа $F \supseteq F_j$, что идемпотент e представляется в виде суммы по крайней мере двух минимальных идемпотентов алгебры FK веса r_i .

5. Для всех подгрупп F_i выполняется точно одно из следующих условий:

5-а. Каждый минимальный идемпотент первого рода алгебры $F_i K$ разлагается в сумму минимальных идемпотентов первого рода алгебры $F_{i+1} K$.

5-б. В разложении каждого минимального идемпотента e первого рода алгебры $F_i K$ в сумму минимальных идемпотентов алгебры $F_{i+1} K$ всегда встречаются минимальные идемпотенты второго рода ($F_i = G_i, H_i$).

Тогда алгебры GK и HK изоморфны.

Доказательство. Покажем, что для алгебр GK и HK можно построить изоморфные деревья идемпотентов, соответствующие последовательностям подгрупп (2.23) и (2.24).

Будем рассматривать три случая:

I. Все минимальные идемпотенты групповых алгебр $G_i K$ и $H_i K$ ($i=1, 2, \dots$)-первого рода.

II. III. Для каждого натурального $i \geq 2$ подалгебры $G_i K$ и $H_i K$ содержат минимальные идемпотенты второго рода, но, при этом, для всех $i \geq 2$ в случае II имеет место условие 5-а, а в случае III-условие 5-б.

Положим $F_i = G_i, H_i$ ($i = 1, 2, \dots$).

Рассмотрим последовательность идемпотентов

$$(2.27) \quad e^{(1)}, \dots, e^{(n)}, \dots$$

в которой сначала расположены все минимальные идемпотенты алгебры $F_1 K$, затем все минимальные идемпотенты алгебры $F_2 K$ и т. д.

Пусть $W_1 = \{r_1, \dots, r_q\}$ и $W_2 = \{r_{q+1}, \dots, r_s\}$ — соответственно множества различных весов минимальных идемпотентов первого и второго рода алгебры $F_1 K$ (Множество W_2 может быть пустым), и пусть в алгебре $F_1 K$ существует точно n_i минимальных идемпотентов первого рода веса r_i ($i = 1, \dots, q$). В силу условия 2 леммы, множества W_1 и W_2 и числа $n_1, \dots, n_q$ будут одними и теми же для групп G_1 и H_1 .

Пусть $e_{r_i}^{(1)}, \dots, e_{r_i}^{(n_i)}$ — все минимальные идемпотенты первого рода веса r_i ($i = 1, \dots, q$) алгебры $F_1 K$, а $e_{r_j}^{(1)}$ ($j = q+1, \dots, s$) — сумма всех минимальных идемпотентов второго рода веса r_j алгебры $F_1 K$. Для построения изоморфных деревьев идемпотентов алгебр GK и HK на первом шаге индукции берем систему идемпотентов $e_{r_1}^{(1)}, \dots, e_{r_1}^{(n_1)}, \dots, e_{r_q}^{(1)}, \dots, e_{r_q}^{(n_q)}, e_{r_{q+1}}^{(1)}, \dots, e_{r_s}^{(1)}$ алгебры $F_1 K$.

Предположим, что на m -ом шаге индукции уже построена система идемпотентов

$$(2.28) \quad E_m = \{e_u = e_{r_1, \dots, r_m}^{i_1, \dots, i_m}\}$$

алгебры $\tilde{G}K$ ($\tilde{G} = G, H$), где вектор $u = (i_1, \dots, i_m, r_1, \dots, r_m)$ пробегает конечное множество M_m (i_j, r_j — натуральные числа), причем идемпотенты e_u ($u \in M_m$) удовлетворяют следующим условиям:

А) $1 = \sum e_u$; $e_u \cdot e_{u_1} = 0$, если $u \neq u_1$; $e_u = \sum_i e_u^{(i)}$, где $e_u^{(i)}$ — минимальный идемпотент веса r_m некоторой подгруппы $F_u^i \supseteq F_m$ ($u = (i_1, \dots, i_m, r_1, \dots, r_m)$).

Б) Идемпотент $e^{(m)}$ из последовательности (2.27) представляется в виде суммы некоторых идемпотентов e_u ($u \in M_m$). В множестве $E_m = \{e_u\}$ ($u \in M_m$) существует такое непустое подмножество E'_m , что каждый идемпотент $e_u \in E'_m$ ($u = (i_1, \dots, i_m, r_1, \dots, r_m)$) равен сумме минимальных идемпотентов $e_u^{(i)}$ первого рода алгебры $F_m K$ одного и того же веса r_m , а сумма $\sum_{e_u \in E'_m} e_u$ совпадает с суммой

всех минимальных идемпотентов первого рода алгебры $F_m K$ (см. А). Если дополнение $E''_m = E_m \setminus E'_m$ — непусто, то для каждого минимального идемпотента $e_u \in E''_m$ найдется такой минимальный идемпотент e второго рода алгебры $F_m K$, что $ee_u \neq 0$.

Покажем, как на $m+1$ -шаге индукции построить систему идемпотентов $E_{m+1} = \{e_{r_1, \dots, r_{m+1}}^{i_1, \dots, i_{m+1}}\}$. Для этого произведем дальнейшее разложение идемпотентов $e_u \in E_m$.

Пусть $e_u = \sum_i e_u^{(i)} \in E'_m$ ($e_u^{(i)}$ — минимальный идемпотент веса r_m алгебры $F_m K$). Запишем разложение каждого идемпотента $e_u^{(i)}$ в сумму минимальных идемпотентов алгебры $F_{m+1} K$:

$$(2.29) \quad e_u^{(i)} = e'_1 + \dots + e'_t.$$

В силу условий леммы 2.15 множество $W = \{f_1, \dots, f_q\}$ различных весов идемпотентов e'_j первого рода в (2.29) определяется только индексом m и весом r_m идемпотента e_u^i . В случаях I и II все идемпотенты e'_j в (2.29)-первого рода. В случае Ш среди этих идемпотентов обязательно встречаются идемпотенты второго рода.

Если $e_u = \sum_i e_u^{(i)} \in E_m''$, то в силу индуктивного предположения существует такой минимальный идемпотент e второго рода алгебры $F_m K$, что $ee_u \neq 0$. Отсюда и из условия 4 в формулировке леммы 2.15 легко вытекает, что можно выбрать такой вес r_{m+1} , превосходящий веса всех идемпотентов e'_j в правой части (2.29) при переменном $e_u^{(i)}$ ($e_u \in E_m'$) и веса всех идемпотентов $e_u^{(i)}$ при $e_u \in E_m''$, что каждый минимальный идемпотент второго рода e'_j алгебры $F_{m+1} K$ в (2.29) и каждый идемпотент $e_u^{(i)}$ при $e_u \in E_m''$ допускает разложение в сумму по крайней мере двух слагаемых

$$(2.30) \quad \tilde{e}_1 + \tilde{e}_2 + \dots,$$

где $\tilde{e}_j$ -минимальные идемпотенты одного и того же веса r_{m+1} соответственно подгрупп $F^{(j)} \supseteq F_{m+1}$. Совершив разложения типа (2.30), мы для каждого идемпотента e_u ($u \in M_m$) получим разложение:

$$(2.31) \quad e_u = e_u^{(1)} + \dots + e_u^{(j_u)}.$$

Разложение (2.31), удовлетворяет следующим свойствам:

Если $e_u \in E_m'$, то в правой части (2.31) встречаются минимальные идемпотенты первого рода алгебры $F_{m+1} K$. Множество различных весов этих идемпотентов $W = \{f_1, \dots, f_q\}$ зависит только от пары (m, r_m) ($u = (i_1, \dots, i_m, r_1, \dots, r_m)$). Если идемпотент e_u пробегает множество E_m' , то идемпотентами $e_u^{(j)}$ первого рода исчерпываются все минимальные идемпотенты первого рода алгебры $F_{m+1} K$. Остальные идемпотенты $e_u^{(j)}$ в (2.31) ($u \in M_m$) являются минимальными идемпотентами веса r_{m+1} некоторых подгрупп $F_u^{(j)} \supseteq F_{m+1}$; если $e_u \in E_m''$, то каждый идемпотент в (2.31) является минимальным идемпотентом веса r_{m+1} некоторой подгруппы $F_u^{(j)} \supseteq F_{m+1}$. Число r_{m+1} -константа, зависящая, в силу выбора, только от индекса m и превосходящая вес любого минимального идемпотента первого рода $e_u^{(j)}$ алгебры $F_{m+1} K$ в (2.31).

Для каждого идемпотента e_u^j в (2.31) веса r_{m+1} найдется такой минимальный идемпотент e второго рода алгебры $F_{m+1} K$, что $ee_u^j = e_u^j$.

Если e_u^j -идемпотент веса r_{m+1} , то в разложении (2.31) встречается по крайней мере еще один идемпотент веса r_{m+1} .

Если e_u^j -минимальный идемпотент первого рода алгебры $F_{m+1} K$ веса n , то в (2.31) также встречаются по крайней мере два минимальных идемпотента e_u^j первого рода веса n , за исключением случаев, когда выполняется условие 3-б в формулировке леммы или когда имеет место условие 3-а, но, при этом, $n=1$ и поле K не содержит первообразный корень степени p из единицы.

Отметим еще следующие свойства разложения (2.31): $e_u^i \cdot e_{u_1}^{i_1} = 0$, если $(u, i) \neq (u_1, i_1)$;

$$(2.32) \quad \sum_{u \in M_m} \sum_i e_u^i = 1.$$

Так как каждый из идемпотентов e_u^j в (2.31) является минимальным идемпотентом некоторой подгруппы $F_u^j \supseteq F_{m+1}$ то для минимального идемпотента $e^{(m+1)}$

алгебры $F_i K$ ($i \leq m+1$) (см. 2. 27) и любого идемпотента e_u^j выполняется точно одно из равенств

$$(2. 33) \quad e_u^j \cdot e^{(m+1)} = e_u^j; \quad e_u^j \cdot e^{(m+1)} = 0.$$

Отсюда, в силу (2. 32), вытекает разложение:

$$(2. 34) \quad e^{(m+1)} = e_{u_1^i}^{i_1} + \dots + e_{u_t^i}^{i_t},$$

где в правой части участвуют некоторые из идемпотентов e_u^j ($u \in M_m$).

Мы осуществили вспомогательные конструкции для образования $m+1$ -го этажа дерева идемпотентов.

Построение идемпотентов $e_{r_1, \dots, r_{m+1}}^{i_1, \dots, i_{m+1}}$ осуществляем следующим образом.

Пусть $W' = \{f_1, \dots, f_t\}$ -множество различных весов идемпотентов e_u^j в (2. 31), где $u = (i_1, \dots, i_m, r_1, \dots, r_m)$, а $E^{(f)} = \{\tilde{e}_{j_1}, \dots, \tilde{e}_{j_r}\}$ ($f \in W'$)-множество всех идемпотентов веса f из этого разложения.

Если множество $\tilde{E}_f$ содержит более одного элемента, то полагаем

$$e_{r_1, \dots, r_m, f}^{i_1, \dots, i_m, 1} = \tilde{e}_{j_1}; \quad e_{r_1, \dots, r_m, f}^{i_1, \dots, i_m, 2} = \tilde{e}_{j_2} + \dots + \tilde{e}_{j_r}.$$

Предположим теперь, что множество $\tilde{E}_f$ содержит точно один идемпотент $\tilde{e}_{j_1}$. Из предыдущих рассуждений следует, что это возможно только тогда, когда $\tilde{e}_{j_1}$ -идемпотент первого рода алгебры $F_{m+1} K$ и, при этом, либо выполняется условие 3-б, либо имеет место условие 3-а, но поле K не содержит первообразного корня степени p из единицы, а вес идемпотента $\tilde{e}_{j_1}$ равен 1.

В этом случае полагаем $e_{r_1, \dots, r_m, f}^{i_1, \dots, i_m, 1} = \tilde{e}_{j_1}$.

Таким образом, для каждого идемпотента e_u ($u \in M_m$) мы получили ортогональное разложение:

$$e_u = \sum_{i_{m+1} r_{m+1}} e_{r_1, \dots, r_{m+1}}^{i_1, \dots, i_{m+1}}.$$

Из (2. 34) и (2. 33) вытекает, что идемпотент $e^{(m+1)}$ представляется в виде суммы некоторых идемпотентов $e_{r_1, \dots, r_{m+1}}^{i_1, \dots, i_{m+1}}$, ибо в силу ортогональности идемпотентов $e_{r_1, \dots, r_{m+1}}^{i_1, \dots, i_{m+1}}$ каждый идемпотент $e_{u_j}^j$ из (2. 33) входит в разложение только одного из этих идемпотентов.

Далее легко проверить, что для идемпотентов $e_{r_1, \dots, r_{m+1}}^{i_1, \dots, i_{m+1}}$ выполняются индуктивные свойства А) и В).

Из способа построения множества идемпотентов $D = \{e_{r_1, \dots, r_m}^{i_1, \dots, i_m}\}$ алгебры $\tilde{G}K$ ($m = 1, 2, \dots$) вытекает, что D —дерево идемпотентов (см. определение 2. 3).

Рассматривая систему идемпотентов D при $\tilde{G} = G$ и $\tilde{G} = H$ мы получим для алгебр GK и HK изоморфные деревья идемпотентов (на m -ом шаге индукции для алгебр $G_m K$ и $H_m K$ возникают один и те же векторы $u = (i_1, \dots, i_m, r_1, \dots, r_m)$).

Отсюда в силу леммы 2. 14 вытекает изоморфизм алгебр GK и HK . Лемма доказана.

Замечание 1. Пусть $p=2$, K -поле второго рода относительно простого числа 2 ($\text{char } K \neq 2$) и $K \subset K(i)$ (i -первообразный корень 4 степени из единицы). Предположим, что для групповых алгебр GK и HK счетных 2-групп выполняются условия леммы 2. 15, но, при этом, для подалгебр $G_j K$ ($H_j K$) (см. (2. 23),

(2. 24)) определены идемпотенты второго рода, так что имеют место условия 1, 2, 3, 5 леммы 2. 15, а условие 4 трансформируется следующим образом: Если e -идемпотент второго рода алгебры $G_1 K(H_1 K)$, то для любой подгруппы $G_j (H_j) (j \equiv t)$ найдется такая конечная подгруппа $F \cong G_j (F \cong H_j)$ группы $G(H)$, что идемпотент e разлагается в сумму по крайней мере двух идемпотентов веса 2 алгебры FK (каждый минимальный идемпотент групповой алгебры $G'K$ произвольной конечной 2-группы G' имеет вес 1 или 2.) Тогда сохраняются рассуждения леммы 2. 15 и $GK \cong HK$.

Замечание 2. Замечание 1 остается справедливым для произвольных периодических групп G и H и поля вещественных чисел K , так как минимальные идемпотенты вещественной групповой алгебры произвольной конечной группы имеют вес 1 или 2.

Теорема 2. 2. Пусть K -поле первого рода относительно простого p . Отметим следующие типы счетных абелевых p -групп:

1. G -прямое произведение циклических групп с неограниченными в совокупности порядками элементов.
2. G -прямое произведение циклических групп с ограниченными в совокупности порядками.
3. G -группа p^∞ .
4. G -полная группа, прямое разложение которой содержит по крайней мере две группы p^∞ .
5. G -прямое произведение группы p^∞ на конечную группу.
6. G -прямое произведение полной группы типа 4. на конечную p -группу.
7. G -прямое произведение полной группы на бесконечную p -группу без элементов бесконечной высоты с ограниченными в совокупности порядками элементов.
8. G -редуцированная p -группа, а подгруппа P элементов бесконечной высоты в G -конечна и отлична от единицы.
9. Подгруппа P элементов бесконечной высоты в G бесконечна, а порядки элементов фактор-группы G/P неограничены в совокупности (каждая счетная p -группа принадлежит к одному из перечисленных 9 типов).

Если группы G и G_1 принадлежат различным типам, то групповые алгебры GK и $G_1 K$ -неизоморфны.

Если G и G_1 -группы одного и того же типа $n=1, 3, 4, 8, 9$, то групповые алгебры GK и $G_1 K$ изоморфны.

Пусть G и G_1 -группы типа 2; $p^\alpha (p^{\alpha_1})$ -показатель группы $G (G_1)$; $p^\beta (p^{\beta_1})$ -наибольший из порядков тех циклических прямых множителей группы $G(G_1)$, которые содержатся в прямом разложении группы $G(G_1)$ счетное число раз. Обозначим через ξ и ξ_1 -первообразные корни степеней p^α и p^{α_1} из единицы, а через ε и ε_1 -первообразные корни из единицы соответственно степеней p^β и p^{β_1} . Групповые алгебры GK и $G_1 K$ изоморфны тогда и только тогда, когда $(K(\xi):K) = (K(\xi_1):K)$ и $(K(\varepsilon):K) = (K(\varepsilon_1):K)$.

Пусть G и G_1 -одновременно группы типа 5 или типа 6: $G = P \times H$; $G_1 = P_1 \times H_1$ (P и P_1 -группы p^∞ или полные группы типа 4, H и H_1 -конечные группы). Алгебры GK и $G_1 K$ изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны алгебры HK и $H_1 K$.

Пусть, наконец, G и G_1 -группы типа 7.: $G = P \times H$, $G_1 = P_1 \times H_1$ (P и P_1 -полные группы, H и H_1 -счетные p -группы типа 2). Алгебры GK и G_1K изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны алгебры HK и H_1K .

Доказательство. 1. Пусть G -группа типа 1 и $GK \cong G_1K$. Тогда в силу следствия из леммы 2. 10. и леммы 2. 11 группа G_1 имеет также тип 1.

Наоборот, предположим, что группы G и G_1 разлагаются в прямое произведение циклических групп с неограниченными в совокупности порядками элементов. Образует группу $H = G \times G_1$ и покажем, что $HK \cong GK$ и $HK \cong G_1K$.

Обозначим через $\tilde{G}$ группу G или группу G_1 . Выделим в прямом разложении группы $\tilde{G}$ такую последовательность циклических подгрупп $(c_1), \dots, (c_s), \dots$, что порядок (c_i) равен p^{n_i} и $\gamma_1 < \dots < \gamma_s < \dots$. Подгруппы (c_i) ($i=1, \dots$) входят в прямые разложения групп $\tilde{G}$ и H . Обозначим через F группу $\tilde{G}$ или H и рассмотрим произвольное разложение группы F в прямое произведение циклических подгрупп, содержащее подгруппы (c_i) :

$$F = (b_1) \times \dots \times (b_s) \times \dots$$

Положим $F_1 = (c_1)$ и обозначим через F_i ($i \geq 2$) подгруппу группы F , порожденную подгруппой (c_i) и теми из групп $(b_1), \dots, (b_i)$, порядки которых не превышают p^{n_i} ($i=2, 3, \dots$). Очевидно, подгруппа F_i ($i \geq 1$) представляется в виде прямого произведения

$$F_i = (c_i) \times (b_{j_1}) \times \dots \times (b_{j_r}) \quad (r \leq i),$$

причем подгруппа F_i выделяется прямым множителем в F_{i+1} . Далее, $\bigcup_i F_i = F$, так как для каждой подгруппы (b_i) существует такая подгруппа (c_j) , что $p^{n_i} \leq (b_i):1$.

К прямому произведению $F_{i+1} = F_i \times \dots \times (c_{i+1})$ применима лемма 2. 4, и поэтому для алгебр $\tilde{G}K$ и HK можно построить возрастающие последовательности подгрупп

$$(2.34') \quad \begin{aligned} G'_1 &\subset \dots \subset G'_s \subset \dots, \\ H'_1 &\subset \dots \subset H'_s \subset \dots \end{aligned}$$

(эти последовательности являются специализациями последовательности $F_1 \subset \dots \subset F_s \subset \dots$ при $F=H$ и $F=\tilde{G}$), для которых выполняются условия леммы 2. 15 (Здесь все минимальные идемпотенты алгебр G'_iK и H'_iK -первого рода). Значит, $HK \cong GK$ и $HK \cong G_1K$, что и доказывает изоморфизм алгебр GK и G_1K .

2. Пусть G -группа типа 2. Если $GK \cong G_1K$, то, в силу леммы 2. 11 и следствия из леммы 2. 10, G_1 -также группа типа 2 и, при этом, выполняются равенства

$$(2.35) \quad (K(\xi):K) = (K(\xi_1):K); \quad (K(\varepsilon):K) = (K(\varepsilon_1):K)$$

Наоборот, предположим, что для групп G и G_1 типа 2 выполняются условия (2. 35), где K -может быть и полем второго рода.

Обозначим через F группу G или G_1 . Пусть

$$(2.36) \quad F = (a_1) \times \dots \times (a_s) \times \dots$$

Пусть p^γ -старший из порядков циклических прямых множителей (2. 36), а p^{γ_1} -

старший из порядков тех множителей из (2.36), которые входят в это разложение счетное число раз. Пусть $(b_1), \dots, (b_n), \dots$ -все множители из (2.36), порядки которых равны p^{r_1} , $F' = (c_1) \times \dots \times (c_r)$ -прямое произведение тех множителей из (2.36), порядки которых превышают p^{r_1} , а $F'' = (d_1) \times \dots \times (d_s) \times \dots$ -произведение прямых множителей (2.36), порядки которых меньше p^{r_1} (подгруппы F' и F'' могут быть равны 1).

Положим $F_1 = (b_1)$; $F_n = F' \times (b_1) \times \dots \times (b_n) \times (d_1) \times \dots \times (d_n)$ ($n \geq 2$) (Если $F'' = (d_1) \times \dots \times (d_r)$ -конечная подгруппа, то полагаем $d_i = 1$ при $i > r$).

Пусть последовательность $F_1 \subset \dots \subset F_s \subset \dots$ соответственно для групп G и G_1 принимает вид:

$$(2.37) \quad G_{11} \subset \dots \subset G_{1n} \subset \dots,$$

и

$$(2.28) \quad G'_{11} \subset \dots \subset G'_{1n} \subset \dots$$

В силу леммы 2.4, алгебры GK и G_1K по отношению к последовательностям (2.37), (2.38) удовлетворяют условиям леммы 2.15, и, следовательно, $GK \cong G_1K$ (Здесь все минимальные идемпотенты алгебр $G_{1i}K$ и $G_{2i}K$ -первого рода).

3. Пусть группа G представляется в виде прямого произведения $G = P \times H$, где P -группа p^∞ , а H -конечная группа. Из леммы 2.12 и следствия из леммы 2.10 следует, что $GK \cong G_1K$ тогда и только тогда, когда $G_1 = P_1 \times H_1$, где P_1 -группа p^∞ , а H_1 -такая конечная группа, что $H_1K \cong HK$. В вырожденном случае получаем, что из изоморфизма $GK \cong G_1K$, где G -группа p^∞ следует, что G_1 -группа p^∞ .

4. Пусть G -группа типа 4. Если $GK \cong G_1K$, то из следствия из леммы 2.10 и леммы 2.12 вытекает, что G_1 -группа типа 4.

Предположим, что G и G_1 -группы типа 4. Обозначим через F группу G или G_1 и рассмотрим разложение F в прямое произведение s групп p^∞ , где $s \geq 2$ -либо конечное число, либо счетная мощность:

$$F = P_1 \times \dots \times P_n \times \dots$$

Представим группу P_i в виде объединения возрастающей последовательности циклических групп:

$$(a_{i1}) \subset (a_{i2}) \subset \dots,$$

где a_{ij} -элемент порядка p^j ($j=1, 2, \dots$).

Построим в F возрастающую последовательность конечных подгрупп $F_1 \subset F_2 \subset \dots$, где $F_j = \{a_{1j}, \dots, a_{sj}\}$ если s -счетная мощность, и $F_j = \{a_{1j}, \dots, a_{sj}\}$ при $j \leq s$ в случае конечного числа s .

Пусть последовательность $F_1 \subset \dots \subset F_t \subset \dots$ для групп G и G_1 соответственно имеет вид:

$$G_{11} \subset \dots \subset G_{1t} \subset \dots;$$

и

$$(2.39) \quad G'_{11} \subset \dots \subset G'_{1t} \subset \dots$$

Ввиду лемм 2.3 и 2.4, алгебры GK и G_1K удовлетворяют условиям леммы 2.15 по отношению к последовательностям (2.39). Следовательно, $GK \cong G_1K$ (Все минимальные идемпотенты алгебр F_iK -первого рода).

5. Пусть группа G представляется в виде прямого произведения $G = P \times H$, где P -полная группа, прямое разложение которой содержит по крайней мере две группы p^∞ , а H -конечная группа. Если $GK \cong G_1K$, то в силу леммы 2. 10 и следствия из леммы, $G_1 = P_1 \times H_1$, где P_1 -полная группа, а H_1 -конечная группа, причем $HK \cong H_1K$. Так как алгебра GK не содержит минимальных идеалов, то прямое разложение группы P_1 содержит по крайней мере две группы p^∞ . Значит, по доказанному в предыдущем пункте, $PK \cong P_1K$.

Наоборот, пусть $G = P \times H$ и $G_1 = P_1 \times H_1$, где P и P_1 -полные группы, неизоморфные группе p^∞ , а H и H_1 -такие конечные p -группы, что $HK \cong H_1K$. Тогда, по предыдущему, $PK \cong P_1K$. Следовательно, алгебры GK и G_1K изоморфны, ибо они являются тензорными произведениями попарно изоморфных алгебр.

6. Пусть группа G представляется в виде прямого произведения $G = P \times H$, где P -полная группа, а H -бесконечная p -группа с ограниченными в совокупности порядками элементов. Если $GK \cong G_1K$, то $G_1 = P_1 \times H_1$, где $HK \cong H_1K$. Это следует из леммы 2. 10 и следствия из этой леммы.

Предположим, что $G = P \times H$, $G_1 = P_1 \times H_1$ и $HK \cong H_1K$, где H и H_1 -бесконечные p -группы с ограниченными в совокупности порядками элементов, а P и P_1 -полные группы. Покажем, что $GK \cong G_1K$. Поскольку H и H_1 -группы типа 2, то для них можно построить возрастающие последовательности подгрупп типа (2. 37) и (2. 38):

$$(2.40) \quad \begin{aligned} H_{11} &\subset \dots \subset H_{1s} \subset \dots; \\ H_{21} &\subset \dots \subset H_{2s} \subset \dots \end{aligned}$$

Образуем в группах P и P_1 возрастающие последовательности подгрупп:

$$\begin{aligned} P_{11} &\subset \dots \subset P_{1s} \subset \dots \left(\bigcup_i P_{1i} = P \right); \\ P_{21} &\subset \dots \subset P_{2s} \subset \dots \left(\bigcup_i P_{2i} = P_1 \right). \end{aligned}$$

Положим $\tilde{H}_{1s} = P_{1s} \times H_{1s}$; $\tilde{H}_{2s} = P_{2s} \times H_{2s}$.

Построим последовательности

$$(2.41) \quad \tilde{H}_{11} \subset \dots \subset \tilde{H}_{1s} \subset \dots;$$

$$(2.42) \quad \tilde{H}_{21} \subset \dots \subset \tilde{H}_{2s} \subset \dots$$

Назовем минимальными идемпотентами первого рода алгебры $\tilde{H}_{is}K$ ($i=1, 2$) идемпотенты вида $\frac{1}{(P_{is}, 1)} \left(\sum_{g \in P_{is}} g \right) e_t$, где e_t -минимальный идемпотент алгебры H_{is} , а идемпотентами второго рода — остальные минимальные идемпотенты этой алгебры. Ввиду лемм 2. 3, 2. 4, и 2. 5, для алгебр GK и G_1K по отношению к последовательностям (2. 41), (2. 42) выполняются условия леммы 2. 15. Следовательно, $GK \cong G_1K$.

7. Пусть подгруппа P элементов бесконечной высоты в группе G конечна ($P \neq 1$). Если $GK \cong G_1K$, то в силу следствия из леммы 2. 10 подгруппа P_1 элементов бесконечной высоты в G_1 также конечна, причем $P_1 \neq 1$.

Наоборот, предположим, что G и G_1 -группы типа 8. Покажем, что $GK \cong G_1K$.

Пусть P и P_1 -конечные подгруппы элементов бесконечной высоты соответственно в группах G и G_1 . Фактор-группы $H = G/P$ и $H_1 = G_1/P_1$ -группы типа 1. Образует для групп H и H_1 последовательности типа (2. 34') (см. рассуждения пункта 1):

$$G_{11}/P \subset \dots \subset G_{1s}/P \subset \dots;$$

$$G_{11}/P_1 \subset \dots \subset G'_{1s}/P_1 \subset \dots,$$

а для групп G и G_1 последовательности

$$(2.43) \quad P = \tilde{G}_{10} \subset \tilde{G}_{11} \subset \dots \subset \tilde{G}_{1s} \subset \dots;$$

$$P_1 = \tilde{G}'_{10} \subset \tilde{G}'_{11} \subset \dots \subset \tilde{G}'_{1s} \subset \dots,$$

где $\tilde{G}_{1j}(\tilde{G}'_{1j})$ -полный прообраз группы G_{1j}/P (G'_{1j}/P_1) при естественном гомоморфизме $G \rightarrow G/P$ ($G_1 \rightarrow G_1/P_1$) ($j=1, \dots$).

Назовем идемпотентами первого рода алгебры $\tilde{G}_{1j}K$ ($\tilde{G}'_{1j}K$) ($j=1, 2, \dots$) минимальные идемпотенты этой алгебры, соответствующие таким абсолютно неприводимым характерам группы $\tilde{G}_{1j}(\tilde{G}'_{1j})$, ядро которых содержит подгруппу $\tilde{G}_{10}(\tilde{G}'_{10})$. Остальные минимальные идемпотенты алгебр $\tilde{G}_{1j}K(\tilde{G}'_{1j}K)$ ($j \geq 1$) назовем идемпотентами второго рода. На основании лемм 2. 3, 2. 4 и 2. 5 для алгебр GK и G_1K по отношению к последовательностям (2. 43) выполняются условия леммы 2. 15, и, следовательно, $GK \cong G_1K$.

8. Предположим, что G -группа типа 9 и $GK \cong G_1K$. Тогда, на основании следствия из леммы 2. 10 и леммы 2. 11, G_1 -также группа 9. Пусть G и G_1 -группы типа 9, а $P(P_1)$ -бесконечные подгруппы элементов бесконечной высоты в $G(G_1)$. Выделим в группах P и P_1 возрастающие последовательности подгрупп:

$$P_{11} \subset \dots \subset P_{1s} \subset \dots \quad (\bigcup_i P_{1i} = P);$$

$$P_{21} \subset \dots \subset P_{2s} \subset \dots \quad (\bigcup_i P_{2i} = P_1).$$

Группы $G/P = H$ и $G_1/P_1 = H_1$ являются группами типа 1 и поэтому к ним применимы рассуждения пункта 1. Построим для групп H и H_1 последовательности типа (2. 34):

$$G_{11}/P \subset \dots \subset G_{1s}/P \subset \dots;$$

$$G_{21}/P_1 \subset \dots \subset G_{2s}/P_1 \subset \dots.$$

Обозначим через $Q_{1j}(Q_{2j})$ систему представителей смежных классов группы $G_{1j}(G_{2j})$ по подгруппе $P(P_1)$, и пусть $H_{1j}(H_{2j})$ -подгруппа группы $G(G_1)$, порожденной подгруппой $P_{1j}(P_{2j})$ и подмножеством $Q_{1j}(Q_{2j})$.

Образует для групп G и G_1 последовательности:

$$(2.44) \quad H_{11} \subset \dots \subset H_{1s} \subset \dots;$$

$$(2.45) \quad H'_{11} \subset \dots \subset H'_{1s} \subset \dots.$$

Очевидно, $\bigcup_i H_{1i} = G$, $\bigcup_i H'_{1i} = G_1$.

Положим $P \cap H_{1j} = P_{1j}$; $P_1 \cap H'_{1j} = P'_{1j}$. Назовем идемпотентами первого рода алгебры $H_{1j}K(H'_{1j}K)$ минимальные идемпотенты этой алгебры,

соответствующие таким абсолютно неприводимым характеристам группы $H_{1j}(H'_{1j})$, ядро которых содержит, подгруппу $P_{1j}(P'_{1j})$. Остальные минимальные идемпотенты алгебры $H_{1j}K(H'_{1j}K)$ назовем идемпотентами второго рода. В силу лемм 2. 3 и 2. 5 для последовательностей (2. 44), (2. 45) выполняются условия леммы 2. 15, и поэтому $GK \cong G_1K$.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь задачу об изоморфизме групповых алгебр GK , где G -счетная p -группа, а K -поле второго рода относительно простого p .

Теорема 2. 3. Если $p \neq 2$, а K -поле второго рода (относительно простого p), то групповые алгебры GK и G_1K любых двух счетных абелевых p -групп G и G_1 изоморфны.

Доказательство. Образует в группах G и G_1 возрастающие последовательности подгрупп

$$G_{11} \subset \dots \subset G_{1s} \subset \dots \quad \left(\bigcup_i G_{1i} = G \right);$$

$$G'_{11} \subset \dots \subset G'_{1s} \subset \dots \quad \left(\bigcup_i G'_{1i} = G_1 \right).$$

Так как поле K -второго рода, то каждый минимальный идемпотент любых из алгебр $G_{1i}K$, $G'_{1i}K$ ($i=1, 2, \dots$) имеет вес 1 и разлагается в сумму по крайней мере двух минимальных идемпотентов алгебры $G_{1i+1}K$ (соответственно $G'_{1i+1}K$). Отсюда, в силу леммы 2. 15, вытекает утверждение теоремы.

Теорема 2. 4. Пусть $p=2$, а K -поле второго рода относительно простого числа 2. Если $K=K(i)$ ($i^4=1$) то $GK \cong HK$ для любых счетных 2-групп G и H . Если $K \subset K(i)$, то групповая алгебра GK произвольной счетной 2-группы G изоморфна групповой алгебре 2-группы одного из следующих типов:

1. G_1 -группа типа $(2, \dots, 2, \dots)$;
2. G_2 -группа типа $(4, 2, \dots, 2, \dots)$;
3. G_3 -группа типа $(4, 4, \dots, 4, \dots)$;
4. G_4 -группа типа 2^∞ .
5. $G_5^{(s)} = P \times H_s$, где P -группа 2^∞ , а H_s -прямое произведение s циклических групп порядка 2 ($s=1, 2, \dots$).

Групповые алгебры групп типов 1—5 попарно неизоморфны.

1. $GK \cong G_1K$ тогда и только тогда, когда $G \cong G_1$.
2. $GK \cong G_2K$ тогда и только тогда, когда G не содержит элементов бесконечной высоты и разложение группы G в прямое произведение циклических групп входит только конечное число множителей с порядками, превосходящими 2.
3. Пусть P -подгруппа элементов бесконечной высоты в G . $GK \cong G_3K$ тогда и только тогда, когда в разложении группы G/P в прямое произведение циклических групп встречается бесконечно много множителей с порядком, большим 2.
4. $GK \cong G_4K$ тогда и только тогда, когда G -полная 2-группа.
5. $GK \cong G_5^{(s)}K$, когда $G = P \times F$, где P -полная группа, а F -конечная группа, разлагающаяся в прямое произведение s циклических групп.

Доказательство. Первое утверждение теоремы доказывается так же, как теорема 2. 3. Пусть $K \subset K(i)$. Из леммы 2. 11 вытекает, что групповые алгебры G_1K , G_2K , G_3K попарно неизоморфны. Группа G_4 обладает только тривиаль-

ным одномерным представлением над полем K , а группа $G_5^{(s)}$ имеет точно 2^s одномерных представлений. Отсюда вытекает, что алгебры $G_5^{(s)}K$ при различных s между собой неизоморфны. Кроме того, алгебра $G_5^{(s)}K$ не может быть изоморфна ни одной из алгебр G_iK ($i=1, 2, 3$), так как число одномерных K -представлений каждой из групп G_1, G_2, G_3 бесконечно.

Пусть G -счетная 2-группа, а P -подгруппа элементов бесконечной высоты в G . Предположим, что выполняются следующие условия: 1. Фактор-группа G/P -бесконечна. 2. Если $P=1$, то в разложении группы G в прямое произведение циклических групп встречается бесконечно много множителей, порядки которых превышают 2. Покажем, что $GK \cong G_3K$.

Пусть $G/P = (b_1P) \times \dots \times (b_sP) \times \dots$ -разложение группы G/P в прямое произведение циклических групп.

В случае, когда группа P бесконечна, представим P в виде объединения возрастающей последовательности конечных подгрупп: $P_1 \subset \dots \subset P_s \subset \dots$ ($\bigcup_i P_i = P$). При $P=1$ положим $P_1 = \dots = P_s = \dots = 1$, а в случае конечной группы P положим $P = P_1 = \dots = P_s = \dots$. Далее, в группе $F = G/P$ выделим последовательность конечных подгрупп

$$F_1/P \subset \dots \subset F_i/P \subset \dots \quad (F_1/P = (c); c^{2^r} = 1; r \geq 2),$$

где при $P=1$ подгруппы F_i задаются произвольно, а при $P \neq 1$ показатель каждой из подгрупп F_i больше 2 и

$$F_{i+1}/P = F_i/P \times F'_i/P.$$

Пусть R_i -система представителей смежных классов группы F_i по подгруппе P , а $\tilde{G}_i$ -подгруппа группы G , порожденная множеством R_i и подгруппой P_i . Образует последовательность.

$$(2.46) \quad \tilde{G}_1 \subset \dots \subset \tilde{G}_s \subset \dots \quad (\bigcup_i \tilde{G}_i = G).$$

Рассмотрим разложение группы G_3 в прямое произведение циклических групп порядка 4:

$$G_3 = (b_1) \times \dots \times (b_s) \times \dots$$

и образуем последовательность подгрупп

$$(2.47) \quad G_3^{(1)} \subset \dots \subset G_3^{(s)} \subset \dots,$$

где $G_3^{(s)} = (b_1) \times \dots \times (b_s)$ ($s=1, 2, \dots$). Тогда каждая из алгебр $\tilde{G}_iK(G_3^{(i)}K)$ содержит идемпотенты веса 1 и 2, причем в разложении минимального идемпотента веса 1 алгебры $\tilde{G}_iK(G_3^{(i)}K)$ в сумму минимальных идемпотентов алгебры $\tilde{G}_{i+1}K(G_3^{(i+1)}K)$ встречаются по крайней мере два идемпотента веса 1 и по крайней мере два идемпотента веса 2, а каждый минимальный идемпотент $e \in \tilde{G}_iK(G_3^{(i)}K)$ веса 2 разлагается в сумму по крайней мере двух минимальных идемпотентов веса 2 алгебры $\tilde{G}_{i+1}K(G_3^{(i+1)}K)$. Отсюда, в силу леммы 2.15 и замечания 1 к лемме вытекает, что $GK \cong G_3K$.

Предположим, что группа G разлагается в прямое произведение счетного числа циклических групп, среди которых встречается только конечное число групп порядков 2^{2+i} ($i \geq 0$). Тогда, в силу пункта 2 в доказательстве теоремы

2. 2, $GK \cong G_1K$, если $G \cong G_1$ и $GK \cong G_2K$, если в прямом разложении группы G встречается хотя бы одна циклическая группа порядка 2^{2+i} ($i \geq 0$). Предыдущие рассмотрения охватывают все случаи, когда группа G имеет бесконечно много одномерных представлений над полем K . Пусть группа G имеет только конечное число одномерных представлений над полем K . Тогда G представляется в виде прямого произведения $G = P \times H$, где P -полная группа, а $H = (b_1) \times \dots \times (b_s)$ -конечная 2-группа. Покажем, что $GK \cong G_s^{(s)}K$, а в вырожденном случае (при $s=0$) $GK \cong G_4K$ (G_4 -группа типа 2^∞). Пусть разложение группы P в прямое произведение n групп 2^∞ имеет вид: $P = P_1 \times \dots \times P_t \times \dots$ где n -натуральное число или счетная мощность.

Представим группу P_i в виде объединения возрастающей последовательности циклических подгрупп:

$$(c_{i1}) \subset \dots \subset (c_{in}) \subset \dots \quad (c_{i1}^2 = 1).$$

Положим $H_i = H \times (c_{i1}) \times \dots \times (c_{in})$ ($i=1, 2, \dots$) если n -счетная мощность, а в случае конечного числа n будем считать, что $H_j = H \times (c_{1j}) \times \dots \times (c_{nj})$ при $j \geq n$. Положим $G_i = H \times H_i$ ($i=1, 2, \dots$) и образуем возрастающую последовательность подгрупп группы G

$$(2.48) \quad G_1 \subset \dots \subset G_t \subset \dots \quad (\bigcup G_i = G).$$

Алгебра HK содержит точно 2^s минимальных идемпотентов $e_1, \dots, e_r$ веса 1 ($r=2^s$). Назовем минимальными идемпотентами первого рода для алгебры G_iK ($i=1, 2, \dots$) идемпотенты вида $e_i e$, где e_i пробегает все минимальные идемпотенты веса 1 алгебры HK , а $e = \frac{1}{(H_i:1)} \sum_{g \in H_i} g$ -идемпотент алгебры H_iK ,

соответствующий единичному характеру группы. Остальные минимальные идемпотенты алгебр G_iK ($i=1, 2, \dots$) назовем идемпотентами второго рода.

Для каждого минимального идемпотента $e \in G_iK$ второго рода и произвольной подгруппы G_j в (2.48) найдется такая подгруппа $G_r \supset G_j$, что идемпотент e разлагается в сумму по крайней мере двух минимальных идемпотентов веса 2 алгебры G_rK . В разложении каждого идемпотента первого рода алгебры G_iK в сумму минимальных идемпотентов алгебры $G_{i+1}K$ возникает точно один идемпотент первого рода и идемпотенты второго рода. Таким образом, для двух групп G и G_1 обладающих точно 2^s одномерными представлениями над полем K , можно построить последовательности подгрупп (2.48), для которых выполняются условия замечания 1, к лемме 2.15. Следовательно, $GK \cong G_1K$. В вырожденном случае получим, что групповая алгебра GK любой счетной полной 2-группы G изоморфна алгебре G_4K . Теорема доказана.

Теорема 2.5. Пусть G и G_1 -счетные периодические абелевы группы, а K -алгебраически замкнутое поле, характеристика которого не делит порядки элементов групп G и G_1 . Тогда групповые алгебры GK и G_1K изоморфны.

Доказательство. Утверждение теоремы доказывается так же, как и теорема 2.3. Если для групп G и G_1 построить возрастающие последовательности подгрупп

$$G_{11} \subset \dots \subset G_{1s} \subset \dots$$

и

$$G_{21} \subset \dots \subset G_{2s} \subset \dots,$$

то все минимальные идемпотенты алгебр $G_{ij}K$ ($i=1, 2; j=1, 2, \dots$) имеют вес 1 и каждый минимальный идемпотент алгебры $G_{ij}K$ разлагается в сумму по крайней мере двух минимальных идемпотентов алгебры $G_{ij+1}K$. Поэтому, в силу леммы 2.15, $GK \cong G_1K$.

Теорема 2.6. Групповая алгебра GD произвольной счетной периодической абелевой группы G над полем действительных чисел D изоморфна вещественной групповой алгебре одной из 2-групп, перечисленных в формулировке теоремы 2.4.

Представим группу G в виде прямого произведения $G = N \times P \times R$, где N -группа с элементами нечетного порядка, P -полная 2-группа, а R -редуцированная 2-группа.

Если подгруппа $N \times P$ -бесконечна, а группа R конечна, то $GD \cong G_5^{(s)}D$, где s -число циклических прямых множителей в разложении группы R .

$GD \cong G_3D$ тогда и только тогда, когда подгруппа R бесконечна и, при этом, выполняется, по крайней мере, одно из следующих условий: 1. Подгруппа $(N \times P)$ -бесконечна. 2. Подгруппа R содержит элементы бесконечной высоты. 3. $(N \times P)$ -конечная группа, а группа R разлагается в прямое произведение циклических групп, среди которых имеется бесконечно много групп порядков 2^{2+i} ($i \geq 0$).

$GD \cong G_2D$ тогда и только тогда, когда группа R разлагается в прямое произведение счетного числа циклических групп, а R^2 и $(N \times P)$ -конечные группы, и, при этом, группа R не изоморфна группе G_1 , если $(N \times P) = 1$.

$GD \cong G_1D$ тогда и только тогда, когда $G \cong G_1$.

Доказательство. Пусть G -счетная периодическая группа, все элементы которой имеют нечетный порядок. Покажем, что $GD \cong G_4D$, где G_4 -группа типа 2^∞ . Представим группу G_4 в виде объединения возрастающей последовательности циклических подгрупп.

$$(2.49) \quad H_1 \subset \dots \subset H_s \subset \dots \quad \left(\bigcup_i H_i = G_4 \right)$$

и построим возрастающую последовательность конечных подгрупп в G :

$$(2.50) \quad G_1 \subset \dots \subset G \subset \dots \subset \left(\bigcup_i G_i = G \right)$$

Назовем минимальным идемпотентом первого рода для группы $F_i = G_i$, H_i идемпотент $e = \frac{1}{(F_i:1)} \sum_{g \in F_i} g$, а остальные минимальные идемпотенты группы F_i -идемпотентами второго рода. Тогда для последовательностей (2.49) и (2.50) выполняются условия замечание 2 к лемме 2.15 и, следовательно, $GD \cong G_sD$. Далее, если N -группа с элементами нечетного порядка, и $G = N \times P$ (P -полная 2-группа), то $GD \cong G'D$, где $G' = N \times N_1$ (N_1 -произвольная счетная группа с нечетными порядками элементов). Следовательно, $G'D \cong G_4D$ (G_4 -группа 2^∞). Таким образом, если счетная 2-группа G представляется в виде прямого произведения $N \times P$, то $GD \cong G_4D$. Отсюда вытекает, что групповая алгебра GD , где $G = P \times N \times R$ в случае бесконечной группы $P \times N$ изоморфна групповой алгебре $\tilde{G}D$, где $\tilde{G} = G_4 \times R$ -счетная 2-группа.

Предположим теперь, что $G = N \times R$, где $N(N \neq 1)$ -конечная группа нечетного порядка, а R -редуцированная (бесконечная) 2-группа. Рассмотрим два случая: а) R^2 -конечная группа; б) Группа R^2 -бесконечна.

В случае а) группу R можно представить в виде прямого произведения $R = R_1 \times G_1$, где $G_1 = (a_1) \times \dots \times (a_s) \times \dots$ — прямое произведение циклических групп второго порядка, а R_1 — конечная 2-группа, разлагающаяся в прямое произведение i циклических групп порядков 2^{2+i} ($i \geq 0$). Построим для группы G возрастающую последовательность подгрупп:

$$(2.50) \quad H_1 = (N \times R_1) \subset \dots \subset H_s = \{N, R_1, a_1, \dots, a_s\} \subset \dots$$

Рассмотрим теперь группу $G_2 = (a_1) \times \dots \times (a_s) \times \dots$, где (a_1) — циклическая группа 4-го порядка, а каждая из подгрупп (a_j) при $j \geq 2$ имеет порядок 2. Образуем для группы G_2 последовательность подгрупп

$$(2.51) \quad G'_1 = (a_1) \times \dots \times (a_i) \subset \dots \subset G'_s = G'_1 \times (a_{i+1}) \times \dots \times (a_{i+s+1}) \subset \dots$$

Каждый минимальный идемпотент веса 1 алгебры $H_i D$ ($G'_i D$) разлагается в сумму точно двух минимальных идемпотентов веса 1 алгебры $H_{i+1} D$ ($G'_{i+1} D$). Алгебры GD и $G_2 D$ по отношению к последовательностям (2.50) и (2.51) удовлетворяют условиям замечания 2 к лемме 2.15. Следовательно, $GD \cong \cong G_2 D$. В случае б) для группы G и группы $G_3 = (4, \dots, 4, \dots)$ можно построить такие возрастающие последовательности подгрупп

$$G_{11} \subset \dots \subset G_{1s} \subset \dots \quad \left(\bigcup_i G_{1i} = G \right);$$

и

$$G'_{11} \subset \dots \subset G'_{1s} \subset \dots \quad \left(\bigcup_i G'_{1i} = G_3 \right),$$

что разложение каждого минимального идемпотента веса 1 алгебры $G_{1i} D$ ($G'_{1i} D$) в сумму минимальных идемпотентов алгебры $G_{1i+1} D$ ($G'_{1i+1} D$) содержит по крайней мере два идемпотента веса 1 и по крайней мере два идемпотента веса 2. Отсюда в силу замечания 2 к лемме 2.15 вытекает изоморфизм $GD \cong \cong G_3 D$.

Итак, мы показали, что для любой периодической счетной группы G имеет место изоморфизм $GD \cong HD$, где H — 2-группа. Утверждение доказываемой теоремы легко получается теперь путем привлечения теоремы 2.4. Теорема доказана.

2. Изучим теперь неразложимые представления произвольной периодической абелевой группы G (не обязательно счетной) над произвольным полем K характеристики нуль.

Пусть G — произвольная группа, а K — любое поле. Назовем групповой полуалгеброй $\Gamma(GK)$ совокупность всевозможных формальных сумм вида $\sum_{g \in G} \lambda_g g$ ($\lambda_g \in K$), для которых естественным образом определены операции сложения и правого и левого умножения на элементы групповой алгебры GK (по определению $\sum_g \lambda_g g = \sum_g \gamma_g g$, тогда и только тогда, когда $\lambda_g = \gamma_g$ для всех $g \in G$).

Если $x = \sum_{g \in G} \lambda_g g \in \Gamma(GK)$, а H — подгруппа группы G , то через $d_H(x)$ условимся обозначать сумму $\sum_{g \in H} \alpha_g g$.

Лемма 2.16. Пусть G — конечная абелева группа. H — подгруппа группы G , K — поле, характеристика которого не делит порядок G , e — минимальный идемпотент

тент алгебры GK , а e_1 -такой минимальный идемпотент алгебры HK , что $e_1 e = e$. Тогда $d_H(e) = \lambda e_1$ где $\lambda \in K$.

Доказательство. Пусть χ -абсолютно неприводимый характер группы G , соответствующий идемпотенту e . Пусть поле $F(F_1)$ получается в результате присоединения к полю K всех значений характера χ на группе $G(H)$. Идемпотент $e(e_1)$ получается в результате сложения всех идемпотентов, K -сопряженных с идемпотентом

$$e' = \frac{1}{(G:H)} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1})g \quad \left(e'_1 = \frac{1}{(H:1)} \sum_{g \in H} \chi(g^{-1})g \right).$$

Отсюда легко получить, что $d_H(e) = \frac{(F:F_1)}{(G:H)} e_1$. Лемма доказана.

Теорема 2. 7. Пусть G -периодическая абелева группа, а K -поле характеристики нуль. Каждый неразложимый G - K -модуль неприводим. Неприводимые представления Γ группы G над полем K находятся во взаимно однозначном соответствии с такими множествами E идемпотентов алгебры GK , что

1. Элементами E являются минимальные идемпотенты e групповых алгебр HK всевозможных конечных подгрупп H группы G . Для каждой конечной подгруппы $H \subseteq G$ множество E содержит точно один минимальный идемпотент e алгебры HK .

2. Любые два идемпотента из множества E неортогональны.

Неприводимые представления F и F_1 группы G над полем K эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им множества идемпотентов E и E_1 совпадают.

Доказательство. Пусть M -произвольный неразложимый G - K -модуль, H -произвольная конечная подгруппа группы G , а $e_1, \dots, e_t$ -все минимальные идемпотенты алгебры HK . Так как $1 = e_1 + \dots + e_t$, то $M = e_1 M + \dots + e_t M$, и, в силу неразложимости модуля M , все слагаемые в правой части, кроме одного, обращаются в нуль. Таким образом, для каждой конечной подгруппы $H \subseteq G$ существует точно один минимальный идемпотент $e_H \in HK$, такой, что

$$(2.52) \quad e_H M = M.$$

Пусть x -произвольный ненулевой элемент модуля M . Образует подмодуль $N = GKx \subseteq M$. Покажем, что модуль N неприводим. В самом деле, пусть N_1 -любой ненулевой G - K -подмодуль модуля N и $0 \neq ax \in N$, где $a \in GK$. Тогда существует такая конечная подгруппа $H \subseteq G$, что $a \in HK$. Ввиду (2.52), $x = e_H x_1$, где e_H -минимальный идемпотент алгебры HK , а x_1 -ненулевой элемент модуля M . Тогда для некоторого элемента $a' \in HK$ имеем $a' a e_H = e_H$ и, следовательно, $a' a e_H x_1 = e_H x_1 = x$, т. е., $x \in N_1$ и $N_1 = N$. Таким образом, каждый ненулевой элемент $x \in M$ содержится в неприводимом G - K -подмодуле модуля M . Следовательно, модуль M -вполне приводим, а так как M -неразложимый модуль, то M -неприводим. Итак, каждый неразложимый G - K -модуль M неприводим.

Пусть H пробегает все конечные подгруппы группы G , а $E = E(M) = \{e_H\}$ -множество всех минимальных идемпотентов e_H , для которых имеет место

(2. 52). Очевидно, множество E удовлетворяет условиям 1. и 2., перечисленным в формулировке теоремы.

Покажем, что неизоморфным неприводимым модулям M_1 и M_2 соответствуют различные множества $E(M_1)$ и $E(M_2)$.

В самом деле, предположим, что $E = E(M_1) = E(M_2)$.

Пусть $0 \neq x \in M_1$; $0 \neq y \in M_2$. Тогда для любого минимального идемпотента $e_H \in E$ выполняются равенства

$$x = e_H x_H; \quad y = e_H y_H (0 \neq x_H \in M_1; 0 \neq y_H \in M_2).$$

Очевидно, $M_1 = GKx$, $M_2 = GKy$. Произвольный элемент $\tilde{x} \in M_1$ записывается в виде $\tilde{x} = ax$, где $a \in GK$. Если $a_1 x = a_2 x$, где $a_1, a_2 \in HK$ (H -конечная подгруппа группы G), то

$$(2. 53) \quad a_1 e_H x_H = a_2 e_H x_H.$$

Пусть $I = HKe_H$ -минимальный идеал алгебры HK . Тогда имеет место H - K -изоморфизм $\theta: I \rightarrow HKe_H x_H$, где $\theta(ae_H) = ae_H x_H$ ($a \in HK$). Значит, из (2. 53) вытекает равенство $a_1 e_H = a_2 e_H$, а из этого равенства следует, что $a_1 e_H y_H = a_2 e_H y_H$ или $a_1 y = a_2 y$. Таким образом, формула $ax \rightarrow ay$ определяет операторный изоморфизм модуля M_1 на M_2 , что ведет к противоречию.

Итак, неизоморфным неприводимым модулям M_1 и M_2 соответствуют различные множества $E(M_1)$ и $E(M_2)$. Рассмотрим теперь произвольное множество $E' = \{e_H\}$ идемпотентов алгебры GK , удовлетворяющее условиям 1. и 2. теоремы 2. 7. Покажем, что существует такой неприводимый G - K -модуль M , что $E(M) = E'$.

Обозначим через N_H ядро неприводимого представления группы H над полем K , соответствующего идемпотенту $e_H \in E'$. Пусть N -подгруппа группы G , порожденная всеми подгруппами N_H (H пробегает все конечные подгруппы группы G). Покажем, что $N \cap H = N_H$. В самом деле, предположим, что $N' = (N \cap H) \supset N_H$. Пусть $N' \subseteq N_{H_1} \dots N_{H_t}$, где $H_1, \dots, H_t$ -некоторые конечные подгруппы группы G . Из неравенств $e_{N_{H_i}} e_{H_i} \neq 0$ легко вытекает, что $e_{N_{H_i}} =$

$$= \frac{1}{(N_{H_i}:1)} \sum_{g \in N_{H_i}} g \quad (i=1, \dots, t). \text{ Далее используя неравенства } e_N e_{N_{H_i}} \neq 0 \quad (i=1, \dots, t)$$

получим, что $e_{N'} = \frac{1}{(N':1)} \sum_{g \in N'} g$, т. е. идемпотент $e_{N'} \in E'$ соответствует единичному представлению группы N' над полем K . Так как по предположению $N' \supset N_H$, то $e_{N'} e_H = 0$, что противоречит свойству 2. множества E' . Итак,

$$(2. 54) \quad N \cap H = N_H.$$

Так как фактор-группы H/N_H -циклическа, то из (2. 54) сразу вытекает, что каждая конечная подгруппа группы G/N -циклическа. Следовательно, G/N -счетная группа, изоморфная подгруппе группы всех комплексных корней из единицы.

Построим в группе G/N возрастающую последовательность конечных групп

$$(2.55) \quad G_1/N \subset \dots \subset G_s/N \subset \dots \quad \left(\bigcup_i G_i = G \right).$$

Выберем в каждой из подгрупп G_i систему L_i представителей смежных классов

по подгруппе N таким образом, что $L_i \subset L_{i+1}$ ($i=1, 2, \dots$). Пусть $L = \bigcup_i L_i$. Обозначим через G'_i подгруппу группы G , порожденную множеством L_i . Тогда $G'_1 \subset \dots \subset G'_s \subset \dots$. Рассмотрим совокупность идемпотентов $\{e_{G'_i}\}$. Так как $G'_i \subset G'_{i+1}$ и $e_{G'_i} e_{G'_{i+1}} \neq 0$, то $e_{G'_i} e_{G'_{i+1}} = e_{G'_{i+1}}$. Тогда, в силу леммы 2.16, $d_{G'_i}(e_{G'_{i+1}}) = \lambda e_{G'_i}$ ($\lambda \in K$). Следовательно, существует такая последовательность $\lambda_1 = 1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ элементов поля K , что

$$d_{G'_i}(\lambda_{i+1} e_{G'_{i+1}}) = \lambda_i e_{G'_i} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Из формул (2.55) следует, что существует такой элемент $x \in \Gamma(GK)$ ($\Gamma(GK)$ -групповая подалгебра группы G над полем K), что $d_{G'_i}(x) = \lambda_i e_{G'_i}$ ($i=1, 2, \dots$). Пусть

$$x = \sum_{g \in G} \alpha_g g = \sum_{g \in L} \alpha_g g + \sum_{g \notin L} \alpha_g g.$$

Положим

$$(2.56) \quad x_1 = \sum_{g \in L} \alpha_g g.$$

Пусть $y = (\sum_{g \in N} g) x_1$ ($y \in \Gamma(G, K)$). Положим $M = GK y$ и покажем, что M -неприводимый G - K -модуль и $E(M) = E'$.

Пусть I -идеал алгебры GK , порожденный всевозможными элементами $h-1$, где $h \in N$ и $Q = G/N$. В силу леммы 1.1, существует гомоморфизм $\theta: GK \rightarrow QK$ с ядром I . Произвольный элемент $a \in GK$ записывается в виде

$$a = \sum_{h \in N} \sum_{b \in L} \alpha_{h,b} h b \quad (\alpha_{h,b} \in K).$$

Тогда

$$(2.57) \quad \theta(a) = \sum_{b \in L} \sum_h \alpha_{h,b} (bN) = \bar{a}.$$

Так как модуль M аннулируется идеалом I , то M можно рассматривать как модуль над фактор-алгеброй $QK \cong GK/I$.

Пусть H -произвольная конечная подгруппа группы G и $L \cap H = L_H$. Положим $H' = HN/N$. Ввиду (2.54), минимальный идемпотент $e_H \in E'$ можно записать в виде

$$(2.58) \quad e_H = \frac{1}{(N_H:1)} \left(\sum_{g \in N_H} g \right) \sum_{b \in L_H} \gamma_b b \quad (\gamma_b \in K),$$

где $\sum_b \gamma_b (bN)$ -минимальный идемпотент алгебры $H'K$. Вследствие (2.57) отсюда вытекает, что $\theta(e_H) = \bar{e}_H = \sum_{b \in L_H} \gamma_b (bN)$, где $\theta(e_H) \neq 0$ -минимальный идемпотент групповой алгебры подгруппы HN/N группы Q .

Отсюда вытекает, что для произвольного идемпотента $e \in GK$ ($e \neq 0$) идемпотент $\bar{e} \neq 0$ (e -записывается в виде суммы минимальных идемпотентов некоторой алгебры HK , где H конечная подгруппа группы G). В силу (2.56), $\bar{e}_{G'_i} = \gamma \sum_{g \in L_i} \alpha_g (gN)$ ($\gamma \in K$). Тогда при $j \equiv i$ имеем:

$$(\overline{e_{G'_i} \sum_{g \in L_j} \alpha_g g}) = \bar{e}_{G'_i} \sum_{g \in L_j} \alpha_g (gN) = \bar{e}_{G'_j} \cdot \gamma \bar{e}_{G_j} = \gamma \bar{e}'_{G_j}.$$

Следовательно, $e_{G'_i} \sum_{g \in L_j} \alpha_g g = \sum_{g \in L_j} \alpha_g g + c$ где $c \in I$. Теперь при $j \equiv i$:

$$\begin{aligned} d_{G_j}(e_{G'_i} y) &= e_{G_i} \left(\sum_{g \in N} g \right) \cdot \sum_{g \in L_j} \alpha_g g = \left(\sum_{g \in N} g \right) \cdot \left(\sum_{g \in L_j} \alpha_g g + c \right) = \\ &= \left(\sum_{g \in N} g \right) \sum_{g \in L_j} \alpha_g g = d_{G_j}(y). \end{aligned}$$

Так как $\bigcup_j G_j = G$, то отсюда вытекает, что

$$e_{G'_i} y = y \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Пусть $0 \neq ay \in M$, где $a \in GK$. Тогда $a \in G_j K$ и $ay = a \bar{e}_{G_j} y$. Так как $\bar{e}_{G_j}$ -минимальный идемпотент алгебры $(G_j/N)K$, то существует такой элемент $\bar{b} \in (G_j/N)K$ что $\bar{b} \bar{a} \bar{e}_{G_j} = \bar{e}_{G_j}$. Значит M -неприводимый модуль над QK , а, следовательно, и над GK .

Пусть H -произвольная конечная подгруппа группы G . Тогда для некоторого j

$$HN \subset G_j, \quad HN/N \subset G_j/N.$$

Так как $e_H e'_{G'_j} \neq 0$, то $\bar{e}_H \bar{e}'_{G'_j} \neq 0$. Значит, $\bar{e}_H \bar{e}'_{G'_j} = \bar{e}'_{G'_j}$. Таким образом, $e_H M = \bar{e}_H \bar{e}'_{G'_j} M = \bar{e}'_{G'_j} M = e'_{G'_j} M = M$. Следовательно, $E(M) = E'$ и теорема доказана.

Литература

- [1] W. E. DESKINS, Finite abelian groups with isomorphic group algebras *Duke Math. J.* **23** (1956), 35—40.
- [2] А. Г. Курош, Теория групп., Москва, 1953.
- [3] С. Д. Берман, Характеры линейных представлений конечных групп над произвольным полем, Матем. сборник **44**, (1958), 409—456.
- [4] S. PERLIS—G. L. WALKER, Abelian group algebras of finite orders. *Trans. Amer. Math. Soc.* **68** (1950), 420—426.
- [5] С. Д. Берман, Об изоморфизме групповых алгебр счетных абелевых групп. Докл. и сообщ. УжГУ, физ. матем. сер. **3**, (1960), 56—57.
- [6] С. Д. Берман, Об изоморфизме групповых алгебр прямых произведений примарных циклических групп. Докл. и сообщ. УжГУ физ. матем. сер., **3**, (1961), 56—57.
- [7] С. Д. Берман. Групповые алгебры счётных абелевых p -групп. Доклады АН СССР, **175**, (1967), N3 514—516.

(Поступило 20. XII. 1966.)